

2.7 弧长及扇形的面积

知识点梳理

一、弧长公式

半径为 R 的圆中

360° 的圆心角所对的弧长(圆的周长)公式: $C = 2\pi R$

n° 的圆心角所对的圆的弧长公式: $l = \frac{n\pi R}{180}$ (弧是圆的一部分)

要点:

(1) 对于弧长公式, 关键是要理解 1° 的圆心角所对的弧长是圆周长的 $\frac{1}{360}$, 即 $\frac{1}{360} \times 2\pi R = \frac{\pi R}{180}$;

(2) 公式中的 n 表示 1° 圆心角的倍数, 故 n 和 180 都不带单位, R 为弧所在圆的半径;

(3) 弧长公式所涉及的三个量: 弧长、圆心角度数、弧所在圆的半径, 知道其中的两个量就可以求出第三个量.

二、扇形面积公式

1. 扇形的定义

由组成圆心角的两条半径和圆心角所对的弧所围成的图形叫做扇形.

2. 扇形面积公式

半径为 R 的圆中

360° 的圆心角所对的扇形面积(圆面积)公式: $S = \pi R^2$

n° 的圆心角所对的扇形面积公式: $S_{\text{扇形}} = \frac{n\pi R^2}{360} = \frac{1}{2}lR$

要点:

(1) 对于扇形面积公式, 关键要理解圆心角是 1° 的扇形面积是圆面积的 $\frac{1}{360}$,

即 $\frac{1}{360} \times \pi R^2 = \frac{\pi R^2}{360}$;

(2) 在扇形面积公式中, 涉及三个量: 扇形面积 S 、扇形半径 R 、扇形的圆心角, 知道其中的两个量就可以求出第三个量.

(3) 扇形面积公式 $S_{\text{扇形}} = \frac{1}{2}lR$, 可根据题目条件灵活选择使用, 它与三角形面积公式 $S = \frac{1}{2}ah$ 有点类似, 可类比记忆;

(4) 扇形两个面积公式之间的联系: $S_{\text{扇形}} = \frac{n\pi R^2}{360} = \frac{1}{2} \times \frac{n\pi R}{180} \times R = \frac{1}{2}lR$.

典例与范例

题型 1: 求弧长

1. 一个扇形的圆心角是 120° , 面积为 $3\pi \text{cm}^2$, 那么这个扇形的弧长为 () cm .

A. 3π

B. 2π

C. $\frac{2}{3}\pi$

D. $\frac{1}{2}\pi$

【答案】B

【分析】根据扇形的面积求出半径, 再利用弧长公式进行计算即可.

【解析】解：设扇形的半径为 r ，

$$\text{则：} \frac{n\pi r^2}{360} = \frac{120\pi r^2}{360} = 3\pi，$$

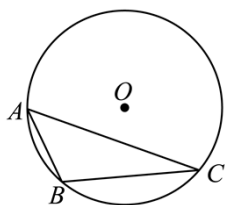
$\therefore r = 3$ （负值已舍掉）；

$$\therefore \text{这个扇形的弧长为} = \frac{120}{180}\pi \times 3 = 2\pi(\text{cm})；$$

故选 B.

【点睛】本题考查求弧长. 熟练掌握扇形的面积公式和弧长公式，是解题的关键.

2. 如图所示， $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$ ，且 $BC = 2\sqrt{2}\text{cm}$ ， $\angle A = 45^\circ$ ，则 $\widehat{BC}$ 的长度为（ ）



A. $\frac{\pi}{2}\text{cm}$

B. πcm

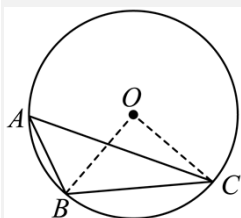
C. $2\pi\text{cm}$

D. $4\pi\text{cm}$

【答案】B

【分析】连结 OB ， OC ，根据同弧所对圆周角的圆心角的性质得到 $\angle BOC = 90^\circ$ ，再利用勾股定理以及弧长计算公式计算即可.

【解析】解：如图所示，连结 OB ， OC



$$\because \angle A = 45^\circ，$$

$$\therefore \angle BOC = 90^\circ，$$

$$\text{又} \because BC = 2\sqrt{2}\text{cm}，OB = OC，$$

$$\therefore \text{由勾股定理，得 } OB^2 + OC^2 = BC^2 = 8$$

$$\therefore OB = OC = 2\text{cm}，$$

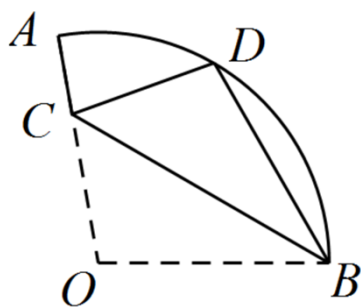
$$\therefore l_{\widehat{BC}} = \frac{90 \times \pi \times 2}{180} = \pi(\text{cm})，$$

故选 B.

【点睛】本题主要考查圆心角与圆周角性质，弧长的计算，熟练掌握弧长计算公式是解决本题的关键.

3. 如图，在扇形 OAB 中， $\angle AOB = 100^\circ$ ， $OA = 9$ ，将扇形 OAB 沿着过点 B 的直线折叠，点 O 恰好落在弧 AB

上的点 D 处，折痕交 OA 于点 C ，则弧 AD 的长为（结果保留 π ）（ ）



A. π

B. 2π

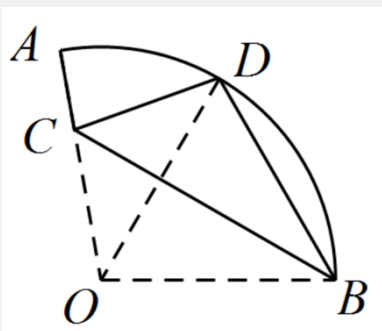
C. 3π

D. 4π

【答案】 B

【分析】 如图，连接 OD ．根据折叠的性质、圆的性质推知 $\triangle ODB$ 是等边三角形，则易求 $\angle AOD = 100^\circ - \angle DOB = 40^\circ$ ；然后由弧长公式弧长的公式 $l = \frac{n\pi r}{180}$ 来求 $\widehat{AD}$ 的长即可．

【解析】 解：如图，连接 OD ．



根据折叠的性质知， $OB = DB$ ．

又 $\because OD = OB$ ，

$\therefore OD = OB = DB$ ，即 $\triangle ODB$ 是等边三角形，

$\therefore \angle DOB = 60^\circ$ ．

$\because \angle AOB = 100^\circ$ ，

$\therefore \angle AOD = \angle AOB - \angle DOB = 40^\circ$ ，

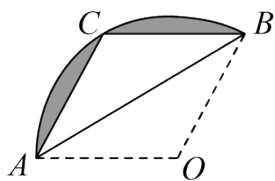
$\therefore \widehat{AD}$ 的长为 $\frac{40\pi \times 9}{180} = 2\pi$ ．

故选：B．

【点睛】 本题考查了弧长的计算，翻折变换（折叠问题）．折叠是一种对称变换，它属于轴对称，折叠前后图形的形状和大小不变，位置变化，对应边和对应角相等．所以由折叠的性质推知 $\triangle ODB$ 是等边三角形是解答此题的关键之处．

题型 2：求扇形面积

4. 如图，扇形纸片 AOB 的半径为 6，沿 AB 折叠扇形纸片，点 O 恰好落在 $\widehat{AB}$ 上的点 C 处，图中阴影部分的面积为（ ）



- A. $12\pi - 16\sqrt{3}$ B. $12\pi - 18\sqrt{3}$ C. $18\pi - 16\sqrt{3}$ D. $12\pi - 16\sqrt{3}$

【答案】B

【分析】根据折叠， $\triangle ACB \cong \triangle AOB$ ，进一步得到四边形 $OACB$ 是菱形；进一步由 $OC = OB = BC = 6$ 得到 $\triangle OBC$ 是等边三角形；最后阴影部分面积 = 扇形 AOB 面积 - 菱形的面积，即可求解。

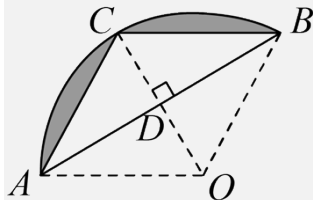
【解析】依题意： $\triangle ACB \cong \triangle AOB$ ， $AO = BO = 6$

$$\therefore AC = BC = AO = BO = 6$$

$\therefore$ 四边形 $OACB$ 是菱形

$$\therefore AB \perp CO$$

连接 OC 与 AB 交于 D 点



$$\therefore OC = OB = 6$$

$$\therefore OC = OB = BC = 6$$

$\therefore \triangle OBC$ 是等边三角形

同理： $\triangle OAC$ 是等边三角形

$$\text{故 } \angle AOB = 120^\circ$$

由三线合一，在 $\text{Rt}\triangle OBD$ 中：

$$\therefore \angle OBD = \frac{1}{2} \angle OBC = 30^\circ,$$

$$\therefore OD = \frac{1}{2} OB = 3, \quad BD = \sqrt{3} OD = 3\sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\text{菱形}OACB} = \frac{1}{2} \times 2BD \cdot 2OD = \frac{1}{2} \times 2 \times 3\sqrt{3} \times 2 \times 3 = 18\sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\text{扇形}AOB} = \frac{120^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 6^2 = 12\pi,$$

$$\therefore S_{\text{阴影}} = S_{\text{扇形}AOB} - S_{\text{菱形}OACB} = 12\pi - 18\sqrt{3}.$$

故选：B.

【点睛】本题考查菱形的判定，菱形面积公式，扇形面积公式；解题关键是发现 $\triangle OBC$ 是等边三角形.

5. 已知半径为6的扇形的圆心角为 60° ，则该扇形的面积为（ ）

A. 4

B. 6

C. 4π

D. 6π

【答案】D

【分析】根据扇形面积公式 $S = \frac{n}{360} \times \pi r^2$ ，将题中已知条件代入求解即可得到结论.

【解析】解：∵ 半径为6的扇形的圆心角为 60° ，

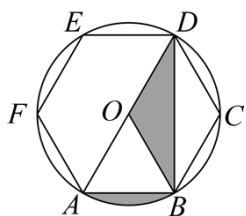
$$\therefore S = \frac{60}{360} \times \pi \times 6^2$$

$$= 6\pi,$$

故选：D.

【点睛】本题考查扇形面积公式，熟练掌握扇形面积 $S = \frac{n}{360} \times \pi r^2$ 是解决问题的关键.

6. 如图，正六边形 $ABCDEF$ 内接于 $\odot O$ ，若 $\odot O$ 的半径等于2，则图中阴影部分的面积是（ ）



A. $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$

B. $\frac{1}{3}\pi$

C. $\frac{2}{3}\pi$

D. $\sqrt{3}\pi$

【答案】C

【分析】由题意可知 $S_{\triangle AOB} = S_{\triangle ODB}$ ，所以图中阴影部分的面积 $= S_{\text{扇形}OAB} = \frac{60}{360} \pi \times 2^2 = \frac{2}{3}\pi$.

【解析】解：∵ 正六边形 $ABCDEF$ 内接于 $\odot O$ ，

$$\therefore \angle ABD = 90^\circ, \angle AOB = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ, OA = OD,$$

$$\therefore S_{\triangle AOB} = S_{\triangle ODB},$$

$$\therefore \text{图中阴影部分的面积} = S_{\text{扇形}OAB} = \frac{60}{360} \pi \times 2^2 = \frac{2}{3}\pi,$$

故选：C.

【点睛】本题考查了正多边形与圆，将阴影部分面积转化为扇形面积是解题的关键.

题型 3：求圆心角

7. 一个扇形的弧长是 $20\pi\text{cm}$ ，面积是 $240\pi\text{cm}^2$ ，则这个扇形的圆心角是（ ）

- A. 120° B. 150° C. 60° D. 100°

【答案】B

【分析】利用扇形的弧长与面积公式确定出所求圆心角即可.

【解析】解：设这个扇形的半径为 r ，圆心角是 n ，面积为 S ，弧长为 l ，

由题意得： $S = \frac{1}{2}lr$ ，即 $240\pi = \frac{1}{2} \times 20\pi r$ ，

解得： $r = 24$ ，

又由 $l = \frac{n\pi r}{180^\circ}$ 可得： $20\pi = \frac{n\pi \times 24}{180^\circ}$ ，

解得： $n = 150^\circ$ ，

故选：B.

【点睛】此题考查了扇形面积的计算以及弧长的计算，熟练掌握相关的公式是解本题的关键.

8. 一扇形的半径等于已知圆的半径的 2 倍，且它的面积等于该圆的面积，则这一扇形的圆心角为（ ）

- A. 20° B. 120° C. 100° D. 90°

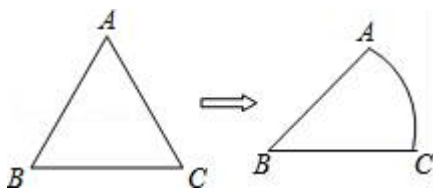
【答案】D

【解析】试题分析：设圆的半径为 r ，则扇形的半径为 $2r$ ，利用面积公式可得： $\frac{n\pi(2r)^2}{360} = \pi r^2$ ，

解得 $n = 90$ 。故选 D.

【考点】扇形面积的计算.

9. 如图，将等边 $\triangle ABC$ 的边 AC 逐渐变成以 B 为圆心、 BA 为半径的 $\widehat{AC}$ ，长度不变， AB 、 BC 的长度也不变，则 $\angle ABC$ 的度数大小由 60° 变为（ ）



- A. $(\frac{60}{\pi})^\circ$ B. $(\frac{90}{\pi})^\circ$ C. $(\frac{120}{\pi})^\circ$ D. $(\frac{180}{\pi})^\circ$

【答案】D

【分析】设 $\angle ABC$ 的度数为 n ，根据弧长的计算公式把已知条件代入计算即可.

【解析】解：设 $\angle ABC$ 的度数大小由 60 变为 n ，

则 $AC = \frac{n\pi \cdot AB}{180}$ ，由 $AC = AB$ ，

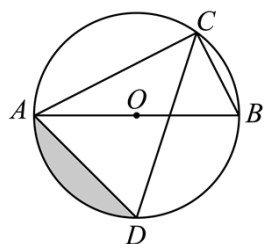
解得 $n = \frac{180}{\pi}$

故选 D.

【点睛】 本题考查的是弧长的计算和等边三角形的性质，掌握弧长的计算公式 $l = \frac{n\pi r}{180}$ 是解题的关键.

题型 4：求弓形面积

10. 如图，已知 $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$ ， AB 为直径， $\angle ACB$ 的平分线交 $\odot O$ 于点 D ，连接 AD ，若 $AB = 4$ ，则图中阴影部分的面积为（ ）



A. $\pi - 2$

B. $\pi - 4$

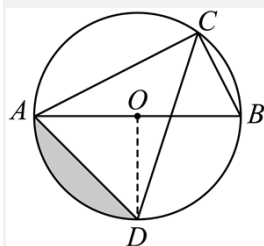
C. $4\pi - 8$

D. $\frac{\pi}{2} - 2$

【答案】 A

【分析】 连接 OD ，求得 $\angle ACD = 45^\circ$ ，得到 $\angle AOD = 90^\circ$ ，因为 $OA = OD = \frac{1}{2}AB = 2$ ，根据 $S_{\text{阴影}} = S_{\text{扇形}AOD} - S_{\triangle AOD}$ ，于是得到问题的答案.

【解析】 解：连接 OD ，



$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径，

$\therefore \angle ACB = 90^\circ$ ，

$\because CD$ 平分 $\angle ACB$ ，

$\therefore \angle ACD = \frac{1}{2}\angle ACB = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle AOD = 2\angle ACD = 90^\circ$ ，

$\because AB = 4$ ，

$\therefore OA = OD = \frac{1}{2}AB = 2$ ，

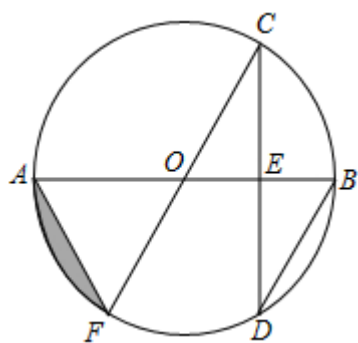
$$\therefore S_{\text{阴影}} = S_{\text{扇形}AOD} - S_{\triangle AOD} = \frac{90 \times \pi \times 2^2}{360} - \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = \pi - 2,$$

故选：A.

【点睛】此题重点考查圆周角定理、扇形的面积公式、三角形的面积公式、根据转化思想求图形面积等知识与方法，正确地作出所需要的辅助线是解题的关键.

11. 如图， AB 是 $\odot O$ 的直径，弦 CD 与 AB 垂直，垂足为点 E ，连接 OC 并延长交 $\odot O$ 于点 F ，

$\angle CDB = 30^\circ$ ， $CD = 2\sqrt{3}$ ，则图中阴影部分的面积为（ ）

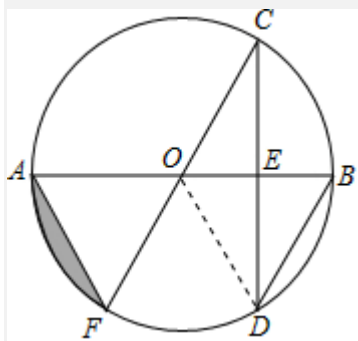


- A. $\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}$ C. $\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$ D. $2\pi - 2\sqrt{3}$

【答案】B

【分析】连接 OD ，首先证明 $\triangle OBD$ 是等边三角形，证明 $\angle COB = \angle BOD = 60^\circ$ ，求出 OC 即可解决问题.

【解析】解：如图，连接 OD .



$\because AB \perp CD$,

$\therefore \angle DEB = 90^\circ, EC = DE = \sqrt{3}$,

$\because \angle CDB = 30^\circ$,

$\therefore \angle B = 60^\circ$,

$\because OB = OD$,

$\therefore \triangle OBD$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle DOB = 60^\circ,$$

$$\because AB \perp CD,$$

$$\therefore \widehat{BC} = \widehat{BD},$$

$$\therefore \angle COB = \angle AOF = 60^\circ,$$

$$\because EC = \sqrt{3}, \angle CEO = 90^\circ,$$

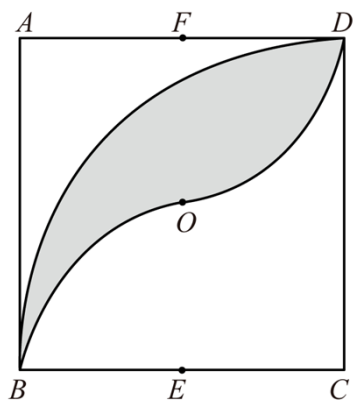
$$\therefore OE = 1, OC = 2,$$

$$\therefore S_{\text{圆}} = S_{\text{扇形}OAF} - S_{\triangle AOF} = \frac{60 \cdot \pi \cdot 2^2}{360} - \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 = \frac{2}{3}\pi - \sqrt{3},$$

故选：B.

【点睛】本题考查等边三角形的判定和性质，扇形的面积等知识，解题的关键是学会添加常用辅助线，构造特殊三角形解决问题.

12. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 2， O 为对角线的交点，点 E 、 F 分别为 BC 、 AD 的中点，以 C 为圆心，2 为半径作弧 BD ，再分别以 E 、 F 为圆心，1 为半径作弧 BO 、弧 OD ，则图中阴影部分的面积为（ ）



A. $\pi-1$

B. $\pi-2$

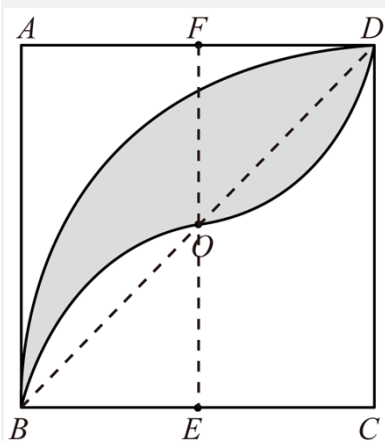
C. $\pi-3$

D. 4

【答案】B

【分析】根据阴影部分形状为不规则图形，连接 BD ， EF ，将阴影部分面积转化可得阴影部分面积等于扇形面积减去三角形面积即可.

【解析】解：连接 BD ， EF ，如图，



∵正方形 $ABCD$ 的边长为 2, O 为对角线的交点,

由题意可得: EF, BD 经过点 O , 且 $EF \perp AD, EF \perp CB$.

∵点 E, F 分别为 BC, AD 的中点,

∴ $FD = FO = EO = EB = 1$,

∴ $\angle B = \angle D, OB = OD$,

∴ 弓形 $OB =$ 弓形 OD ,

∴ 阴影部分的面积等于弓形 BD 的面积.

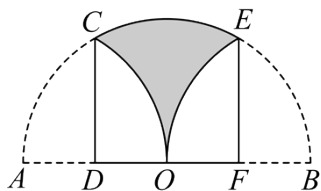
$$\therefore S_{\text{阴影}} = S_{\text{扇形} CBD} - S_{\triangle CBD} = \frac{90\pi \times 2^2}{360} - \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = \pi - 2,$$

故选: B.

【点睛】题目主要考查计算不规则图形面积, 作出辅助线, 利用扇形面积公式及三角形面积公式求解是解题关键.

题型 5: 求其他不规则图形的面积

13. 如图, 将直径为 4 的半圆形分别沿 CD, EF 折叠使得直径两端点 A, B 的对应点都与圆心 O 重合, 则图中阴影部分的面积为 ()



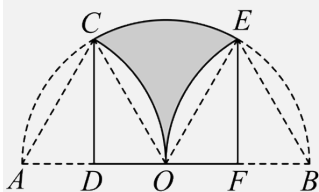
- A. $2\sqrt{3} - \frac{2}{3}\pi$ B. $\frac{2}{3}\pi - 2\sqrt{3}$ C. $2\sqrt{3} - \frac{1}{3}\pi$ D. $\frac{2}{3}\pi - \sqrt{3}$

【答案】A

【分析】连接 AC, OC, BE, OE , 可推出 $\triangle ACO, \triangle BEO, \triangle COE$ 是边长为 2 的等边三角形, 进一步可得

$S_{\text{阴影部分}} = 2S_{\triangle ACO} - S_{\text{扇形} AOC}$, 即可求解.

【解析】解：连接 AC, OC, BE, OE ，如图所示：



由折叠可知： $AC = OC, BE = OE, CD \perp AB, EF \perp AB$

$$\therefore OC = OE = OA = OB = \frac{1}{2} AB = 2$$

$\therefore \triangle ACO, \triangle BEO$ 是边长为 2 的等边三角形

$$\therefore \angle AOC = \angle BOE = 60^\circ$$

$$\therefore \angle COE = 60^\circ$$

$\therefore \triangle COE$ 也是边长为 2 的等边三角形

$$S_{\text{阴影部分}} = S_{\text{扇形COE}} - 2(S_{\text{扇形AOC}} - S_{\triangle ACO}) = S_{\text{扇形COE}} - 2S_{\text{扇形AOC}} + 2S_{\triangle ACO}$$

$$\therefore S_{\text{扇形COE}} = S_{\text{扇形AOC}}$$

$$\therefore S_{\text{阴影部分}} = 2S_{\triangle ACO} - S_{\text{扇形AOC}}$$

$$\therefore OD = \frac{1}{2} AO = 1, \angle COD = 60^\circ$$

$$\therefore CD = OD \times \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\therefore S_{\triangle ACO} = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3} = \sqrt{3}$$

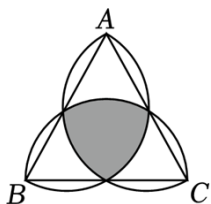
$$\therefore S_{\text{扇形AOC}} = \frac{60^\circ}{360^\circ} \times \pi \times 2^2 = \frac{2}{3} \pi$$

$$\therefore S_{\text{阴影部分}} = 2S_{\triangle ACO} - S_{\text{扇形AOC}} = 2\sqrt{3} - \frac{2}{3} \pi$$

故选：A

【点睛】本题考查了圆中不规则图形面积的求解，得出 $S_{\text{阴影部分}} = 2S_{\triangle ACO} - S_{\text{扇形AOC}}$ 是解题关键。

14. 如图，等边三角形 ABC 的边长为 4，分别以其三边为直径作半圆，则图中阴影部分的面积为（ ）



A. $4\pi - 2\sqrt{3}$

B. $2\pi - \sqrt{3}$

C. $2\pi + 2\sqrt{3}$

D. $2\pi - 2\sqrt{3}$

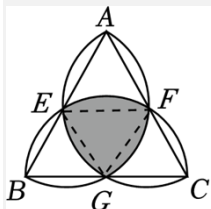
【答案】D

【分析】根据阴影部分的面积等于3个扇形 EFG 的面积减去2个 $\triangle EFG$ 的面积计算即可.

【解析】解：如图，设 AB 的中点为 E ， AC 的中点为 F ， BC 的中点为 G ，

由三角形的中位线可知 $EF = FG = GE = 2$ ，

$\therefore \triangle EFG$ 是等边三角形，



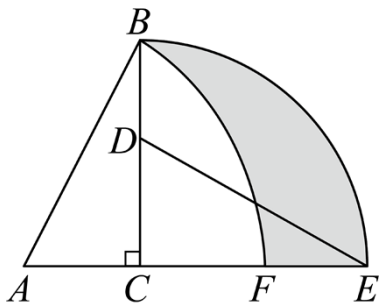
$\therefore$ 阴影部分的面积等于3个扇形 EFG 的面积减去2个 $\triangle EFG$ 的面积，

$$\text{即阴影部分的面积} = 3 \times \frac{60\pi \times 2^2}{360} - 2 \times \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = 2\pi - 2\sqrt{3},$$

故选：D.

【点睛】本题考查扇形的面积的计算，等边三角形的性质等知识，解题的关键是学会利用分割法求阴影部分的面积，属于中考常考题型.

15. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ACB$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = 1$ ， $\angle A = 60^\circ$ ，将 $\text{Rt}\triangle ACB$ 绕点 C 顺时针旋转 90° 后得到 $\text{Rt}\triangle DCE$ ，点 B 经过的路径为 $\widehat{BE}$ ，将线段 AB 绕点 A 顺时针旋转 60° 后，点 B 恰好落在 CE 上的点 F 处，点 B 经过的路径为 $\widehat{BF}$ ，则图中阴影部分的面积是()



A. $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{12}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{12}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{12}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{12}$

【答案】A

【分析】根据 $S_{\text{阴影}} = S_{\triangle ACB} + S_{\text{扇形}BCE} - S_{\text{扇形}BAF}$ 即可求解.

【解析】解： $\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ACB$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = 1$ ， $\angle A = 60^\circ$ ，

$$\therefore \angle ABC = 30^\circ, AB = 2, \text{ 则 } BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\text{阴影}} = S_{\triangle ACB} + S_{\text{扇形}BCE} - S_{\text{扇形}BAF}$$

$$= \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{3} + \frac{90 \cdot \pi \cdot (\sqrt{3})}{360} - \frac{60 \cdot \pi \cdot 2^2}{360}$$

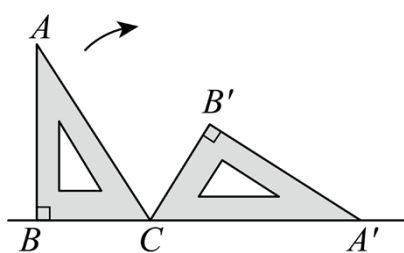
$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{12}.$$

故选：A.

【点睛】本题考查了求扇形面积，熟练掌握扇形面积公式 $S = \frac{n\pi r^2}{360}$ 是解题的关键.

题型 6：求某点的弧形运动轨迹长度

16. 如图，一块含有 30° 角的直角三角板 ABC ，在水平桌面上绕点 C 按顺时针方向旋转到 $A'B'C$ 的位置. 若 BC 的长为 7.5cm ，那么顶点 A 从开始到结束所经过的路径长为（ ）



- A. $10\pi\text{cm}$ B. $10\sqrt{3}\pi\text{cm}$ C. $15\pi\text{cm}$ D. $20\pi\text{cm}$

【答案】A

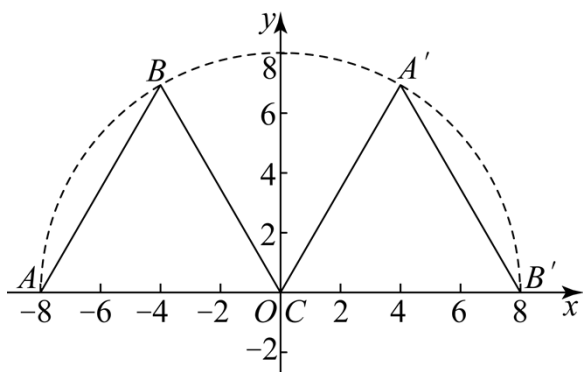
【分析】顶点 A 从开始到结束所经过的路径是一段弧长是以点 C 为圆心， AC 为半径的圆弧，旋转的角度是 $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ ，所以根据弧长公式可得.

【解析】解：在含有 30° 角的直角三角板 ABC 中， $\angle ACB = 60^\circ$ ， $BC = 7.5\text{cm}$ ，
 $\therefore \angle ACA' = 120^\circ$ ， $AC = 2BC = 15\text{cm}$ ，
 $\therefore \frac{120\pi \times 15}{180} = 10\pi\text{cm}$ ，

故选：A.

【点睛】本题考查弧长公式，解题的关键是弄准弧长的半径和圆心角的度数.

17. 如图，一个边长为 8 的等边三角形木板 ABC 在平面直角坐标系上绕点 C 按顺时针旋转到 $\triangle A'B'C$ 的位置，则顶点 A 从开始到结束所经过的路程及 A' 的横坐标分别为()

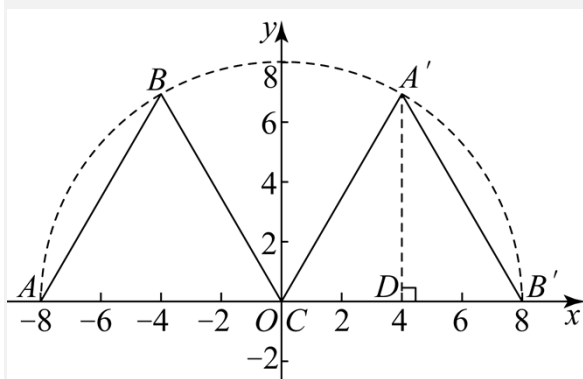


- A. $\frac{16\pi}{3}, 4$ B. $8\pi, 4$ C. $\frac{16\pi}{3}, -4$ D. $8\pi, -4$

【答案】 A

【分析】由题意知，顶点A从开始到结束所经过的路径为圆弧 AA' ，所对的圆心角为 120° ，根据弧长公式计算求得顶点A从开始到结束所经过的路程，再根据等边三角形的三线合一的性质，即可求得 A' 的横坐标.

【解析】解： $\because$ 一个边长为8的等边三角形木板 ABC ，在平面直角坐标系上绕点C按顺时针旋转到 $\triangle A'B'C$ 的位置，



$$\therefore \angle ACA' = 120^\circ, \quad OA = 8,$$

$$\therefore \widehat{AA'} = \frac{120\pi \times 8}{180} = \frac{16\pi}{3},$$

作 $AD \perp CB'$ 于 D ,

$\because \triangle A'B'C$ 是等边三角形，

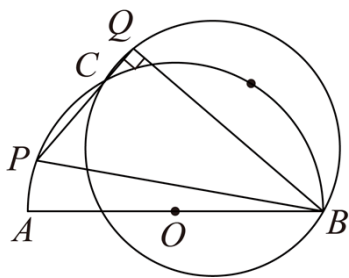
$$\therefore CD = B'D = \frac{1}{2}B'C = 4$$

$\therefore A'$ 的横坐标为4，

故选：A.

【点睛】此题考查了旋转的性质，等边三角形的性质，弧长公式等知识，得出A点运动的路径是解题关键.

18. 如图，点C为半 $\odot O$ 上的三等分点，点P是弧AC上的一动点，过点B作 $BQ \perp PC$ 交PC延长线于点Q，若直径 $AB = 6$ ，在点P从点A运动到点C的过程中，则点Q的运动路径长为（ ）



A. $\frac{\sqrt{3}\pi}{4}$

B. $\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$

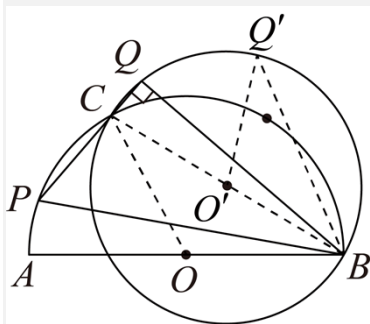
C. $\sqrt{3}\pi$

D. $2\sqrt{3}\pi$

【答案】B

【分析】由 P 点的运动特点可知 Q 点轨迹是以 BC 为直径圆上的弧 CQ' ，求出 BC 的长以及圆心角 $\angle Q'O'C = 60^\circ$ ，即可求解。

【解析】解：连接 OC ， BC ，以 $\frac{1}{2}BC$ 的长为半径， BC 的中点为圆心 O' 画圆，点 Q' 为半圆 $\odot O'$ 上的三等分点，连接 $Q'O'$ ， BQ' ，如图：



$\because$ 点 C 为半 $\odot O$ 上的三等分点，

$$\therefore \angle AOC = \frac{1}{3} \angle AOB = 60^\circ,$$

$$\text{故 } AC = \frac{1}{2} AB = 3,$$

$$\therefore \angle BOC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle QPB = \angle CAB = \frac{1}{2} \angle COB = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle QBP = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ,$$

当点 P 从点 A 运动到点 C 的过程中， $\angle QPB = 60^\circ$ ，

即 $\angle QBP = 30^\circ$ ，

$$\therefore \angle Q'O'C = 2\angle Q'BP = 60^\circ,$$

故点 Q 的运动轨迹是 $\widehat{CQ'}$ ，且 $\angle Q'O'C = 60^\circ$ ，

$$\text{在 Rt}\triangle ABC \text{ 中， } BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3},$$

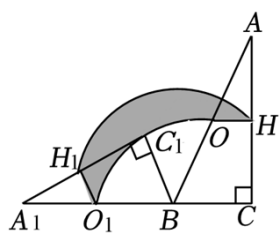
$$\therefore \text{点 } Q \text{ 的运动路径长为 } \frac{60}{360} \times 3\sqrt{3} \times \pi = \frac{\sqrt{3}\pi}{2},$$

故答案为：B.

【点睛】本题考查了点的运动轨迹，勾股定理，弧长公式，三角形内角和定理，圆周角定理，能够根据 P 点的运动特点分析 Q 点的运动轨迹是解题的关键.

题型 7：求图形旋转后扫过的面积

19. 如图， $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\angle CAB = 30^\circ$ ， $BC = 2$ ， O ， H 分别为边 AB ， AC 的中点，将 $\triangle ABC$ 绕点 B 逆时针旋转 120° 到 $\triangle A_1BC_1$ 的位置，则整个旋转过程中线段 OH 所扫过部分的面积（即阴影部分面积）为（ ）

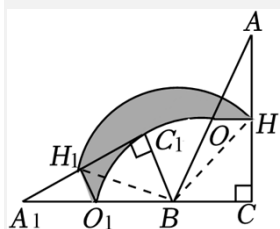


- A. $\frac{7}{3}\pi - \frac{7}{8}\sqrt{3}$ B. $\frac{4}{3}\pi + \frac{7}{8}\sqrt{3}$ C. π D. $\frac{4}{3}\pi + \sqrt{3}$

【答案】C

【分析】整个旋转过程中线段 OH 所扫过部分的面积(即阴影部分面积)为以点 B 为圆心， OB 、 BH 为半径的两个扇形组成的一个环形，分别求出 OB 、 BH ，即可求出阴影部分面积.

【解析】解：连接 BH ， BH_1 ，



$\because O$ 、 H 分别为边 AB ， AC 的中点，将 $\triangle ABC$ 绕点 B 逆时针旋转 120° 到 $\triangle A_1BC_1$ 的位置，

$$\therefore \triangle OBH \cong \triangle O_1BH_1,$$

$\therefore$ 线段 OH 所扫过部分的面积(即阴影部分面积)为以点 B 为圆心， OB 、 BH 为半径的两个扇形组成的一个环形，

$$\because \angle ACB = 90^\circ, \angle CAB = 30^\circ, BC = 2,$$

$$\therefore AB = 2BC = 4,$$

$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3},$$

$\because H$ 为边 AC 的中点,

$$\therefore CH = \frac{1}{2}AC = \sqrt{3},$$

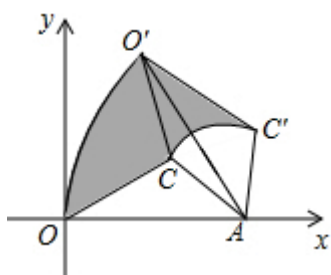
$$\therefore BH = \sqrt{BC^2 + CH^2} = \sqrt{2^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{7},$$

$$\therefore \text{阴影部分面积} = \frac{120\pi(BH^2 - BC^2)}{360} = \frac{120\pi \times (7 - 4)}{360} = \pi,$$

故选: C.

【点睛】 本题考查的是扇形面积的计算, 涉及到直角三角形的性质及旋转的性质, 根据题意作出辅助线, 构造出全等三角形是解题的关键.

20. 如图, $\triangle OAC$ 按顺时针方向旋转, 点 O 在坐标原点上, OA 边在 x 轴上, $OA = 8$, $AC = 4$, 把 $\triangle OAC$ 绕点 A 按顺时针方向转到 $\triangle O'AC'$, 使得点 O' 的坐标是 $(4, 4\sqrt{3})$, 则在这次旋转过程中线段 OC 扫过部分 (阴影部分) 的面积为 ()



A. 6π

B. 8π

C. 10π

D. 12π

【答案】 B

【分析】 过 O' 作 $O'M \perp OA$ 于 M , 则 $\angle O'MA = 90^\circ$, 证得 $\angle AO'M = 30^\circ$, 从而得到旋转角为 60° , 再根据 $S = S_{\text{扇形}OAO'} - S_{\text{扇形}CAC'}$ 求解即可.

【解析】 过 O' 作 $O'M \perp OA$ 于 M , 则 $\angle O'MA = 90^\circ$,

$\because$ 点 O' 的坐标是 $(4, 4\sqrt{3})$,

$$\therefore O'M = 4\sqrt{3}, \quad OM = 4,$$

$$\because AO = 8,$$

$$\therefore AM = 8 - 4 = 4,$$

由旋转的性质得 $AO' = 8$,

$$\therefore AM = \frac{1}{2}AO',$$

$$\therefore \angle AO'M = 30^\circ,$$

$\therefore \angle O'AM = 60^\circ$ ，即旋转角为 60° ，

$\therefore \angle CAC' = \angle OAO' = 60^\circ$ 。

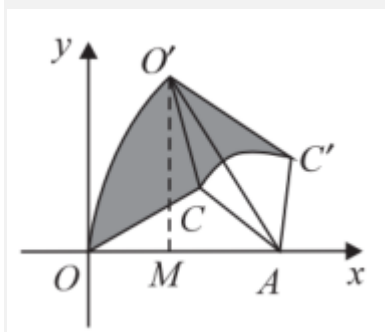
$\therefore$ 把 $\triangle OAC$ 绕点 A 按顺时针方向旋转到 $\triangle O'AC'$ ，

$\therefore S_{\triangle OAC} = S_{\triangle O'AC'}$ ，

$\therefore$ 阴影部分的面积：

$$S = S_{\text{扇形}OAO'} + S_{\triangle O'AC'} - S_{\triangle OAC} - S_{\text{扇形}CAC'} = S_{\text{扇形}OAO'} - S_{\text{扇形}CAC'} = \frac{60\pi \cdot 8^2}{360} - \frac{60\pi \cdot 4^2}{360} = 8\pi。$$

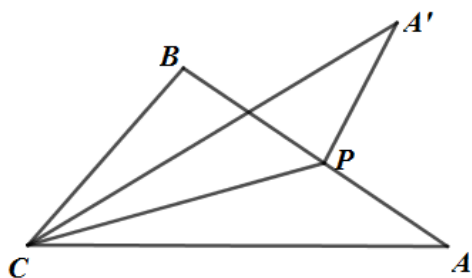
故选：B。



【点睛】本题考查与扇形相关的阴影部分面积问题，理解旋转的性质，找准旋转角，并对所求图形面积进行转换是解题关键。

二、填空题

21. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 30^\circ$ ， $\angle ACB = 45^\circ$ ， $AB = 2$ ，点 P 从点 A 出发沿 AB 方向运动，到达点 B 时停止运动，连结 CP ，点 A 关于直线 CP 的对称点为 A' ，连接 $A'C$ ， $A'P$ 。在运动过程中，点 A' 到直线 AB 距离的最大值是_____；点 P 到达点 B 时，线段 $A'P$ 扫过的面积为_____。



【答案】 $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ $\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\pi-1-\sqrt{3}$

【分析】（1）通过分析点 A' 的运动轨迹，是以点 C 为圆心， CA 为半径的圆上，从而求解；

（2）画出相应的图形，从而利用扇形面积和三角形面积公式计算求解

【解析】解：（1）由题意可得点 A' 的运动轨迹是以点 C 为圆心， CA 为半径的圆上，

$\because$ 点 P 从点 A 出发沿 AB 方向运动，到达点 B 时停止运动， $\angle ACB = 45^\circ$ ，点 A 关于直线 CP 的对称点为 A' ，

$\therefore \angle ACA'$ 最大为 90°

当 $CA' \perp AB$ 时，点 A' 到直线 AB 的距离最大，如图

过点 B 作 $BE \perp AC$

$\because \angle BAC = 30^\circ$ ， $\angle ACB = 45^\circ$ ， $AB = 2$ ，

$\therefore$ 在 $Rt\triangle ABE$ 中， $BE = 1$ ， $AE = \sqrt{3}$ ，

在 $Rt\triangle BCE$ 中， $BE = CE = 1$

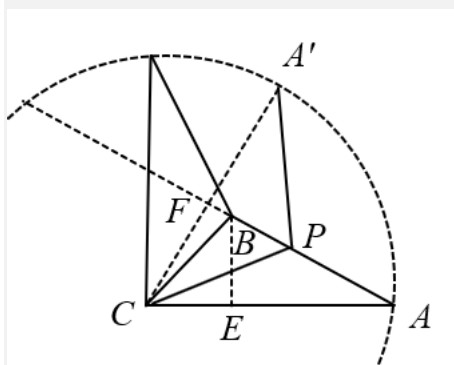
$\therefore CA' = CA = \sqrt{3} + 1$

又 $\because CA' \perp AB$

$\therefore$ 在 $Rt\triangle ACF$ 中， $CF = \frac{1}{2}AC = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$

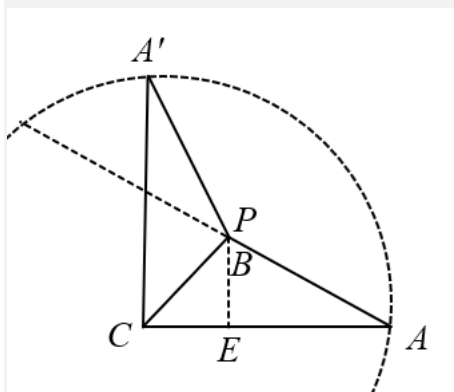
$\therefore A'F = A'C - CF = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$

即点 A' 到直线 AB 距离的最大值是 $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ ；



点 P 到达点 B 时，线段 $A'P$ 扫过的面积为：

$$S_{\text{扇形}A'CA} - 2S_{\triangle ABC} = \frac{\pi(\sqrt{3}+1)^2}{4} - 2 \times \frac{1}{2} \times (\sqrt{3}+1) \times 1 = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\pi - 1 - \sqrt{3}$$



故答案为: $\frac{\sqrt{3}+1}{2}; \left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\pi-1-\sqrt{3}$

【点睛】本题考查轨迹, 含 30° 直角三角形的性质, 扇形的面积等知识, 解题的关键是理解题意, 灵活运用所学知识解决问题, 属于中考常考题型.

跟踪训练

一、单选题

1. 半径为9、圆心角为 60° 的弧长为 ()

- A. 6 B. 2π C. 3π D. 4π

【答案】C

【分析】根据半径可求出圆的周长, 再根据圆心角为 60° 占整个圆的比例, 即可算出所对弧长.

【解析】解: 圆心角为 60° , 则占整个圆的比例为 $\frac{60^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{6}$,

$$\therefore 9 \times 2\pi \times \frac{1}{6} = 3\pi,$$

故选: C.

【点睛】本题主要考查扇形弧长的计算方法, 掌握圆的周长的计算方法, 扇形弧长的计算方法是解题的关键.

2. 若扇形的圆心角为 120° , 半径为6, 则扇形的面积为 ()

- A. 2π B. 4π C. 12π D. 24π

【答案】C

【分析】根据扇形的面积计算公式计算即可.

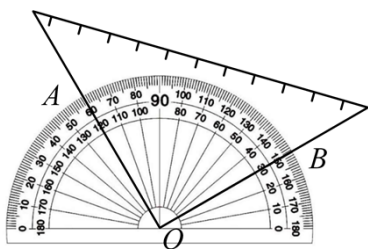
【解析】解: 由题意得:

$$S = \frac{n}{360^\circ} \pi r^2 = \frac{120^\circ}{360^\circ} \times \pi \times 6^2 = \frac{1}{3} \times 36\pi = 12\pi$$

故选 C.

【点睛】本题主要考查扇形的面积计算, 熟练掌握扇形的面积计算公式是解决本题的关键.

3. 将等腰直角三角板与量角器按如图所示的方式摆放, 使三角板的直角顶点与量角器的中心 O 重合, 且两条直角边分别与量角器边缘所在的弧交于 A, B 两点. 若 $OA = 5$ 厘米, 则 $\widehat{AB}$ 的长度为 ()



- A. 2π 厘米 B. $\frac{5}{2}\pi$ 厘米 C. 5π 厘米 D. $\frac{25}{4}\pi$ 厘米

【答案】 B

【分析】 直接根据弧长公式进行计算即可.

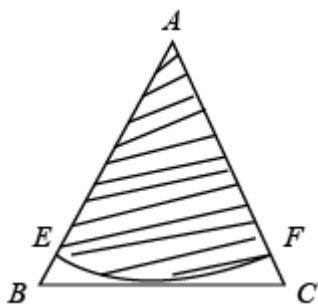
【解析】 $\because \angle AOB = 90^\circ, OA = 5,$

$$\therefore \widehat{AB} = \frac{90 \times \pi \times 5}{180} = \frac{5}{2}\pi,$$

故选: B.

【点睛】 本题考查了弧长公式, 即 $l = \frac{n\pi r}{180}$, 熟练掌握知识点是解题的关键.

4. 如图, 在边长为 2 的等边 $\triangle ABC$ 中, D 是 BC 边上的中点, 以点 A 为圆心, AD 为半径作圆与 AB , AC 分别交于 E , F 两点, 则图中阴影部分的面积为 ()



- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{2\pi}{3}$

【答案】 C

【分析】 由等边 $\triangle ABC$ 中, D 是 BC 边上的中点, 可知扇形的半径为等边三角形的高, 利用扇形面积公式即可求解.

【解析】 $\because \triangle ABC$ 是等边三角形, D 是 BC 边上的中点

$$\therefore AD \perp BC, \angle A = 60^\circ$$

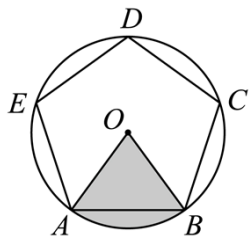
$$\therefore AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$$

$$S_{\text{扇形} AEF} = \frac{60\pi r^2}{360} = \frac{60\pi \times (\sqrt{3})^2}{360} = \frac{\pi}{2}$$

故选 C.

【点睛】本题考查了等边三角形的性质，勾股定理，扇形面积公式，熟练等边三角形性质和扇形面积公式，求出等边三角形的高是解题的关键.

5. 如图， $\odot O$ 是正五边形 $ABCDE$ 的外接圆. 若 $\odot O$ 的半径为 5，则半径 OA ， OB 与 $\widehat{AB}$ 围成的扇形的面积是 ()



- A. 2π
- B. 5π
- C. $\frac{25}{6}\pi$
- D. 10π

【答案】B

【分析】先求出圆心角 $\angle AOB$ 的度数，再根据扇形面积公式即可求解.

【解析】 $\because \odot O$ 是正五边形 $ABCDE$ 的外接圆.

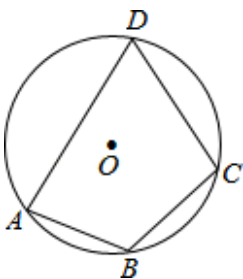
$$\therefore \angle AOB = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$$

$$\therefore OB \text{ 与 } \widehat{AB} \text{ 围成的扇形的面积是 } \frac{72 \times \pi \times 5^2}{360} = 5\pi$$

故选 B.

【点睛】此题主要考查扇形面积的求解，解题的关键是熟知圆内正多边形的性质及扇形面积公式的运用.

6. 如图，圆上有 A, B, C, D 四点，其中 $\angle BCD = 100^\circ$ ，若 $\widehat{ABC}, \widehat{ADC}$ 得长度分别为 $16\pi, 20\pi$ ，则 $\widehat{BAD}$ 的长为 ()



- A. 10π
- B. 15π
- C. 20π
- D. 25π

【答案】C

【分析】由 $\widehat{ABC}, \widehat{ADC}$ 的长度分别为 $16\pi, 20\pi$ ，得到圆的周长为 $16\pi + 20\pi = 36\pi$ ，由 $\angle BCD = 100^\circ$ ，得到 $\angle BAD = 80^\circ$ ，即可求解。

【解析】 $\because \widehat{ABC}, \widehat{ADC}$ 得长度分别为 $16\pi, 20\pi$ ，

圆的周长为 $16\pi + 20\pi = 36\pi$ ，

$\because \angle BCD = 100^\circ$ ，

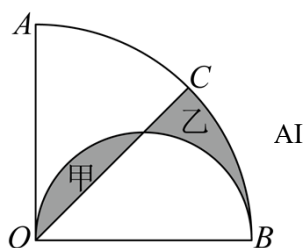
$\therefore \angle BAD = 80^\circ$ ，

故 $\widehat{BAD}$ 的长 $= \frac{100}{180} \times 36\pi = 20\pi$ 。

故选：C。

【点睛】本题考查了弧长的计算，关键是利用圆的内接四边形对角互补和圆周角与弧的关系求解。

7. 如图， $\angle AOB = 90^\circ$ ， C 为弧 AB 的中点，则阴影部分甲的面积与乙的面积的大小关系是（ ）



- A. 甲 $>$ 乙 B. 甲 $<$ 乙 C. 甲 $=$ 乙 D. 无法确定

【答案】C

【分析】先分别求扇形 COB 的面积和以 OB 为直径的半圆面积，再分别求出甲，乙的面积进行比较即可得到答案。

【解析】解：设 OB 为 R ，

$$\text{则半圆面积} = \frac{1}{2} \times \pi \times \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{1}{8} \pi R^2;$$

$$S_{\text{扇形}COB} = \frac{45}{360} \pi R^2 = \frac{1}{8} \pi R^2;$$

所以半圆面积 $= S_{\text{扇形}COB}$ ，

所以： $S_{\text{甲}} = S_{\text{乙}}$ 。

故选：C。

【点睛】题目主要考查不规则图形的面积计算，解决本题的关键是根据图形特点找出图形间的关系。

8. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $CA = CB$ ， $AB = 4$ ，点 D 是 AB 的中点，分别以点 A 、 B 、 C 为圆心， AD 的长为半

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/367050131003006113>