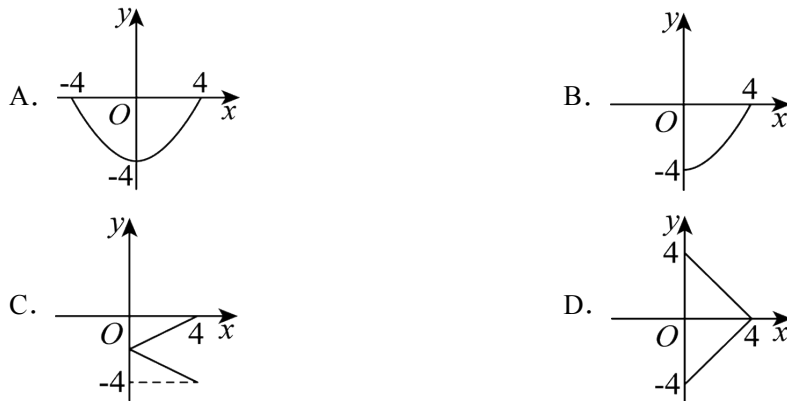


函数的概念与表示-一轮复习考点专练

核心考点 1 函数的概念与表示

角度 1 函数的概念辨析

1. 设 $M = \{x | 0 \leq x \leq 4\}$, $N = \{y | -4 \leq y \leq 0\}$, 函数 $f(x)$ 的定义域为 M , 值域为 N , 则 $f(x)$ 的图象可以是



2. (多选) 函数概念最早是在 17 世纪由德国数学家莱布尼茨提出的, 后又经历了贝努利、欧拉等人的改译. 德国数学家康托尔创立的集合论使得函数的概念更严谨. 后人在此基础上构建了高中教材中的函数定义: “一般地, 设 A, B 是两个非空的数集, 如果按某种对应法则 f , 对于集合 A 中的每一个元素 x , 在集合 B 中都有唯一的元素 y 和它对应, 那么这样的对应叫做从 A 到 B 的一个函数”, 则下列对应法则 f 满足函数定义的有 ()

- A. $f(x^2) = |x|$ B. $f(x^2) = x$
- C. $f(\cos x) = x$ D. $f(e^x) = x$

3. 设 α 是正实数, 将函数 $y = |x|$ 的图像绕坐标原点逆时针方向旋转角 θ ($0 < \theta < \alpha$), 得到曲线 C . 若对于每一个旋转角 θ , 曲线 C 都可以看成是某一个函数的图像, 则 α 的最大值为_____.

角度 2 相等函数

4. 下列各组函数中, 两个函数表示同一个函数的是 ()

- A. $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x - \sqrt{2}}$ 与 $g(x) = x + \sqrt{2}$ B. $f(x) = \frac{1}{2} \log_3 x^2$ 与 $g(x) = \log_3 x$
- C. $f(x) = \sqrt{x^2}$ 与 $g(x) = x$ D. $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^3}$ 与 $g(x) = x - 1$

5. 下列各组函数是同一函数的是 ()

- A. $f(x) = \sqrt{-2x^3}$ 与 $g(x) = x\sqrt{-2x}$ B. $f(x) = x^0$ 与 $g(x) = \frac{1}{x^0}$
- C. $f(x) = \sqrt{x+1}\sqrt{x-1}$ 与 $g(x) = \sqrt{x^2-1}$ D. $f(x) = x^2 - 2x$ 与 $g(t) = t^2 - 2t$

6. 给出四个命题：①函数是其定义域到值域的映射；② $f(x) = \sqrt{x-3} + \sqrt{2-x}$ 是函数；③函数 $y = 2x(x \in \mathbb{N})$ 的图象是一条直线；④ $f(x) = \frac{x^2}{x}$ 与 $g(x) = x$ 是同一个函数. 其中正确的有_____.

角度3 与函数概念有关的计数问题

7. 已知函数 $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ 的值域为 $\{0, 1, 2\}$, 则满足这样条件的函数的个数为 ()
- A. 8 B. 9 C. 26 D. 27
8. 已知函数 $y = f(x)$ 的定义域为 $\{a, b, c\}$, 值域为 $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ 的子集, 则满足 $f(a) + f(b) + f(c) = 0$ 的函数 $y = f(x)$ 的个数为_____.
9. 给定 $k \in \mathbb{N}^*$, 设函数 $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ 满足: 对于任意大于 k 的正整数 n , $f(n) = n - k$.

- (1) 设 $k = 1$, 则其中一个函数 f 在 $n = 1$ 处的函数值为_____;
- (2) 设 $k = 4$, 且当 $n \leq 4$ 时, $2 \leq f(n) \leq 3$, 则不同的函数 f 的个数为_____.

核心考点2 函数的解析式

角度1 待定系数法

10. 若函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + b$ 满足对任意的实数 m, n 都有 $f(mn) = f(m)f(n) + 2f(m) + 2f(n) + 2$, 则曲线 $y = f(x)$ 在 $x = -1$ 处的切线方程为 ()
- A. $x - y - 4 = 0$ B. $x - y - 2 = 0$ C. $3x - y - 6 = 0$ D. $3x - y = 0$
11. 已知定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$, 对任意的 x, y 满足 $f(x + f(x+y)) + f(xy) = x + f(x+y) + yf(x)$, 下列说法正确的是 ()
- A. 若 $f(x)$ 为一次函数, 则 $f(0) = 0$
- B. 若 $f(x)$ 为一次函数, 则 $f(1) = 1$
- C. 若 $f(x)$ 不是一次函数且 $f(0) = 0$, 则 $f(-1) = -1$
- D. 若 $f(x)$ 不是一次函数且 $f(0) = 0$, 则 $f(1) = 1$

12. 已知集合 $A = \{u(x) \mid u(x) = ax^2 - (a+b)x + b, a, b \in \mathbf{R}\}$, 函数 $f(x) = x^2 - 1$. 若函数 $g(x)$ 满

足: 对任意 $u(x) \in A$, 存在 $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, 使得 $u(x) = \lambda f(x) + \mu g(x)$, 则 $g(x)$ 的解析式可以
是_____. (写出一个满足条件的函数解析式即可)

13. 已知 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 函数 $f(x) = x^2 + bx + c$, $g(x) = \log_a[f(x) - ax]$. 对任意 $x \in \mathbf{R}$,

$f(x-4) = f(-x)$ 恒成立, 且 $f(1) = 5$.

(1) 求实数 b, c 的值.

(2) 若 $y = g(x)$ 在 $[2, 3]$ 上是严格增函数, 求实数 a 的取值范围.

角度 2 已知 $f[g(x)]$ 求解析式

14. 已知 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的单调函数, 且 $f(f(x) - 3x) = 4$, 若 $2^a = \log_2 b = c$, 则 ()

A. $f(a) < f(b) < f(c)$

B. $f(b) < f(c) < f(a)$

C. $f(a) < f(c) < f(b)$

D. $f(c) < f(b) < f(a)$

15. 下列说法正确的是 ()

A. 存在函数 $f(x)$, 使得 $f(x + \ln x) = \frac{x}{e^x}$

B. 存在唯一的函数 $f(x)$, 使得 $f(x \ln x) = x^x$

C. 存在无数个函数 $f(x)$, 使得 $f(x - \ln x) = \frac{x}{e^x}$

D. 不存在函数 $f(x)$, 使得 $f(\cos x) = \cos 2x$, 且 $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$

16. 已知 $f(3^x) = 4x \log_2 3 + 10$, 则 $f(2) + f(4) + f(8) + \dots + f(2^{10})$ 的值等于__.

17. 已知函数 $f(\sqrt{x} + 1) = 2x + 1$, 曲线 $g(x) = ax^3 + bx^2$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线与直线 $x + 3y - 4 = 0$
垂直.

(1) 求 $f(x)$ 的解析式及 a, b 的值;

(2) 当 $x \in [1, +\infty)$ 时, $mf(x) - g(x) \leq 0$ 恒成立, 求 m 的取值范围.

角度 3 函数方程组法

18. 已知函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上满足 $f(x) = 2f(2-x) - x^2 + 8x - 8$, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的
切线方程是 ()

- A. $y=2x-1$ B. $y=x$ C. $y=3x-2$ D. $y=-2x+3$

19. 函数 $f(x)$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $2f(x) - 3f(-x) = 5\sin 2x + \cos 2x$, 则关于函数

$g(x) = f(x) + 1$ 的命题正确的是 ()

A. 函数 $g(x)$ 在区间 $\left(0, \frac{2\pi}{3}\right)$ 上单调递增

B. 直线 $x = -\frac{\pi}{8}$ 是函数 $g(x)$ 图像的一条对称轴

C. 点 $\left(\frac{5\pi}{8}, 0\right)$ 是函数 $g(x)$ 图像的一个对称中心

D. 将函数 $g(x)$ 图像向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位, 可得到 $y = 1 - \sqrt{2}\cos 2x$ 的图像

20. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(\ln x) + 2f(1 - \ln x) = x + \frac{2e}{x} - \ln x + 2$. 若 $f(x - \ln a) > x + \ln x$ 对于 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是_____.

21. 已知 $f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, $g(x) = \frac{f'(x)}{\ln 2}$, 且 $f(x) + g(x) = 2^{x+1}$.

(1) 求函数 $f(x)$, $g(x)$ 的解析式;

(2) 求不等式 $2[f(x)]^2 - 3g(x) \leq 8$ 的解集.

角度 4 求抽象函数的解析式

22. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 且 $xf(x) = (y+1)f(y+1)$, 则 ()

- A. $f(x) \geq 0$ B. $f(1) = 1$ C. $f(x)$ 是偶函数 D. $f(x)$ 没有极值点

23. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 且 $f\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0$, 若 $f(x+y) + f(x)f(y) = 4xy$, 则下列结论错误的是 ()

A. $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$

B. $f\left(\frac{1}{2}\right) = -2$

C. 函数 $f\left(x - \frac{1}{2}\right)$ 是偶函数

D. 函数 $f\left(x + \frac{1}{2}\right)$ 是减函数

24. 已知函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 对任意 $x \in (0, +\infty)$, 均有 $f(x) \cdot f\left(f(x) + \frac{2}{x}\right) = \frac{1}{3}$,

记 $g(x) = f(x) + 4x^2$, $x \in (0, +\infty)$, 则函数 $g(x)$ 的最小值为_____.

角度 5 求解析式中参数值

25. 已知函数 $f(x) = ax^4 + 2x$ 的图象经过点 $A(1, 1)$, 则函数 $f(x)$ 在点 A 处的切线方程是 ()

A. $x + y - 2 = 0$

B. $2x + y - 3 = 0$

C. $2x - y - 1 = 0$

D. $3x + y - 4 = 0$

26. 已知函数 $f(x) = a\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|} + b$ 的图象过原点, 且无限接近直线 $y=1$ 但又不与该直线相交,

则 ()

A. $a + b = 0$

B. $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{|x|} - 1$

C. $f(x)$ 是偶函数

D. $f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上单调递增

27. 已知函数 $f(x) = \frac{b}{x-a}$ 的图象过点 $A\left(0, -\frac{3}{2}\right), B(3, 3)$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) 判断函数 $f(x)$ 在 $(2, +\infty)$ 上的单调性, 并用单调性的定义加以证明;

(3) 若 $m, n \in (2, +\infty)$ 且函数 $f(x)$ 在 $[m, n]$ 上的值域为 $[1, 3]$, 求 $m+n$ 的值.

参考答案:

1. B

【详解】因为定义域为 $\{x|0 \leq x \leq 4\}$ ，所以舍去 A；因为值域为 $\{y|-4 \leq y \leq 0\}$ ，所以舍去 D；因为对于定义域内每一个 x 有且只有一个 y 值，所以去掉 C；选 B.

2. AD

【分析】通过换元法、三角函数方程以及指数函数方程即可逐一证明或者举反例判断.

【详解】对于 A，令 $t = x^2 (t \geq 0)$, $f(t) = |\pm\sqrt{t}| = \sqrt{t}$ ，符合函数定义；

对于 B，令 $t = x^2 (t \geq 0)$, $f(t) = \pm\sqrt{t}$ ，设 $t = 4$, $f(t) = \pm 2$ ，一个自变量对应两个值，不符合函数定义；

对于 C，设 $t = \cos x$ ，当 $t = \frac{1}{2}$ ，则 x 可以取包括 $\pm\frac{\pi}{3}$ 等无数多的值，不符合函数定义；

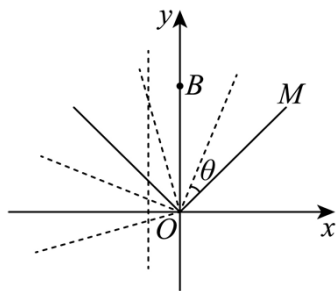
对于 D，令 $t = e^x (t > 0)$, $f(t) = \ln t$ ，符合函数定义.

故选：AD.

3. $\frac{\pi}{4}$

【分析】画出函数 $y = |x|$ 的图像，由图可知，当函数 $y = |x|$ 的图像绕坐标原点逆时针方向旋转角 θ 大于 $\angle MOB$ 时，曲线 C 不是一个函数的图像，由此求出答案.

【详解】画出函数 $y = |x|$ 的图像，如图，在 y 轴正半轴上取一点 B ，则 $\angle MOB = \frac{\pi}{4}$ ，



由图可知，当函数 $y = |x|$ 的图像绕坐标原点逆时针方向旋转角 θ 大于 $\angle MOB$ 时，旋转所得的图像与垂直于 x 轴的直线就有两个交点，曲线 C 不是一个函数的图像，

故 α 的最大值是 $\angle MOB = \frac{\pi}{4}$.

故答案为： $\frac{\pi}{4}$.

4. D

【分析】从函数的定义域和对应法则两个方面是否都相同考查函数即得.

【详解】对于 A 项, $f(x) = \frac{x^2-2}{x-\sqrt{2}}$ 定义域为 $\{x|x \neq \sqrt{2}\}$, $g(x) = x + \sqrt{2}$ 定义域为 $\mathbf{R}$,

故两函数定义域不同, 故 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不是同一函数, 错误;

对于 B 项, $f(x) = \frac{1}{2} \log_3 x^2$ 定义域为 $\{x|x \neq 0\}$, $g(x) = \log_3 x$ 定义域为 $\{x|x > 0\}$, 故

两函数定义域不同, 故 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不是同一函数, 错误;

对于 C 项, $f(x) = \sqrt{x^2}$ 与 $g(x) = x$ 的定义域相同, 但 $f(x) = \sqrt{x^2} = |x|$ 与 $g(x) = x$ 对应法则不同,

故 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不是同一函数, 错误;

对于 D 项, $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^3} = x-1$ 与 $g(x) = x-1$ 的定义域、对应关系都相同,

所以是同一函数, 正确.

故选: D

5. BD

【分析】结合同一函数的定义, 判断两个函数的定义域与对应关系是否一致即可得.

【详解】对 A: 对 $g(x) = x\sqrt{-2x}$ 的定义域为 $(-\infty, 0]$, 则 $g(x) = x\sqrt{-2x} = -\sqrt{-2x^3}$,

故 $f(x) = \sqrt{-2x^3}$ 与 $g(x) = x\sqrt{-2x}$ 不是同一函数, 故 A 错误;

对 B: $f(x) = x^0 = 1 (x \neq 0)$, $g(x) = \frac{1}{x^0} = 1 (x \neq 0)$,

故 $f(x) = x^0$ 与 $g(x) = \frac{1}{x^0}$ 是同一函数, 故 B 正确;

对 C: $f(x)$ 定义域为 $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases}$, 即 $x \geq 1$, $g(x)$ 定义域为 $x^2-1 \geq 0$,

即 $x \geq 1$ 或 $x \leq -1$, 故 $f(x) = \sqrt{x+1}\sqrt{x-1}$ 与 $g(x) = \sqrt{x^2-1}$ 不是同一函数, 故 C 错误;

对 D: $f(x) = x^2 - 2x$ 与 $g(t) = t^2 - 2t$ 定义域与对应关系都相同,

故 $f(x) = x^2 - 2x$ 与 $g(t) = t^2 - 2t$ 是同一函数, 故 D 正确.

故选: BD.

6. ①

【分析】根据相关概念分析、判断后可得正确的结论.

【详解】对于①, 由函数的定义知正确, 所以①正确.

对于②，由于满足 $f(x) = \sqrt{x-3} + \sqrt{2-x}$ 的 x 不存在，所以不是函数，即②不正确。

对于③，函数 $y=2x(x \in \mathbb{N})$ 的图象是一条直线上的一群孤立的点，所以③不正确。

对于④，由于函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域不同，所以不是同一函数，故④不正确。

综上命题①正确。

【点睛】解答本题的关键是正确理解函数及同一函数的定义，然后根据定义进行判断，属于基础题。

7. B

【分析】根据函数值确定自变量的取值，从而确定函数的个数。

【详解】根据题意，值域为 $\{0, 1, 2\}$ ，所以 $\ln(x^2 + 1) = 0$ 时， $x = 0$

$\ln(x^2 + 1) = 1$ 时， $x = \pm\sqrt{e-1}$ ； $\ln(x^2 + 1) = 2$ 时， $x = \pm\sqrt{e^2-1}$

所以定义域中元素在这 5 个 x 的取值中选取：

①当定义域中有 3 个元素时，有 $C_1^1 C_2^1 C_2^1 = 4$ 个函数满足条件；

②当定义域中有 4 个元素时，有 $C_1^1 C_4^3 = 4$ 个函数满足条件；

③当定义域中有 5 个元素时，有 1 个函数满足条件

所以满足条件的函数共有 $4 + 4 + 1 = 9$ （个）。选项 B 正确，选项 ACD 错误。

故选：B。

8. 19

【分析】对 $f(a)$ 、 $f(b)$ 、 $f(c)$ 的取值进行分类讨论，计算出不同情况下函数 $y = f(x)$ 的个数，即可得解。

【详解】分以下几种情况讨论：

①当 $f(a)$ 、 $f(b)$ 、 $f(c)$ 全为 0 时，只有 1 种；

②当 $f(a)$ 、 $f(b)$ 、 $f(c)$ 中有两个为 -1，一个为 2 时，有 3 种；

③当 $f(a)$ 、 $f(b)$ 、 $f(c)$ 中有两个为 1，一个为 -2 时，有 3 种；

④当 $f(a)$ 、 $f(b)$ 、 $f(c)$ 三者都不相等时，可分别取值为 -1、0、1，有 $3 \times 2 \times 1 = 6$ 种；

⑤当 $f(a)$ 、 $f(b)$ 、 $f(c)$ 三者都不相等时，可分别取值为 -2、0、2，有 $3 \times 2 \times 1 = 6$ 种。

综上所述，满足条件的函数 $y = f(x)$ 的个数为 $1 + 3 + 3 + 6 + 6 = 19$ 个。

故答案为：19.

9. 正整数 16

【分析】(1) $n=k=1$ ，题中给出的条件“大于 k 的正整数 n ”不适合，但函数值必须是一个正整数，故 $f(1)$ 的值是一个正整数；

(2) $k=4$ ，且 $n \leq 4$ ，与条件“大于 k 的正整数 n ”不适合，故 $f(n)$ 的值在 2、3 中任选其一，求出所有可能的组合数即可得不同函数的个数.

【详解】(1) $\mathbb{Q}$ 函数 $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ ， $\therefore$ 其值域为正整数，故函数 f 在 $n=1$ 处的函数值为正整数；

(2) $\mathbb{Q}$ 函数 $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ ， $\therefore$ 其值域为正整数，

又 $n \leq 4$ 时， $2 \leq f(n) \leq 3$ ，

故 $n \leq 4$ 时， $f(n) \in \{2, 3\}$ ，

即 $f(1)$ 、 $f(2)$ 、 $f(3)$ 、 $f(4)$ 的取值可能是 2 或 3，

则共 $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4 = 16$ 种组合，

$\therefore$ 不同的函数 f 的个数为 16.

故答案为：正整数；16.

10. D

【分析】由已知可得 $f(mn)+2=(f(m)+2)(f(n)+2)$ ，利用多项式相等可得 $f(x)=x^3-2$ ，再利用导数的几何意义可得答案.

【详解】因为 $f(mn)=f(m)f(n)+2f(m)+2f(n)+2$ ，

所以 $f(mn)+2=(f(m)+2)(f(n)+2)$ ，

设 $g(x)=f(x)+2$ ，则 $g(mn)=g(m)g(n)$ ，

因为 $g(mn)=(mn)^3+a(mn)^2+b+2$ ，

$g(m)g(n)=(m^3+am^2+b+2)(n^3+an^2+b+2)$

$= (mn)^3 + a^2m^2n^2 + am^3n^2 + (b+2)m^3 + am^2n^3 + am^2(b+2)$

$+ (b+2)n^3 + an^2(b+2) + (b+2)^2$ ，

所以 $a=0$ ， $b=-2$ ，得 $f(x)=x^3-2$ ，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/367053134025006140>