

5. 5 三角恒等变换

目录

【题型归纳】	2
题型一：两角和与差的正（余）弦公式.....	2
题型二：两角和与差的正切公式.....	2
题型三：二倍角公式的简单应用.....	3
题型四：给角求值.....	5
题型五：给值求值.....	5
题型六：给值求角.....	6
题型七：利用半角公式化简求值问题.....	8
题型八：三角恒等式的证明.....	9
题型九：辅助角公式的应用.....	10
题型十：三角恒等变换与三角函数图象性质的综合.....	11
题型十一：利用两角和与差的余弦进行证明.....	12
题型十二：三角恒等变换在实际问题中的应用.....	14
【重难点集训】	17
【高考真题】	28

【题型归纳】

题型一：两角和与差的正（余）弦公式

1. (2024·高一·贵州贵阳·阶段练习) 已知锐角 θ 的终边过点 $(2,1)$, 则 $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = (\quad)$

- A. $-\frac{\sqrt{10}}{10}$ B. $\frac{\sqrt{10}}{10}$ C. $-\frac{3\sqrt{10}}{10}$ D. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

【答案】B

【解析】根据题意可得 $\sin\theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos\theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, 故 $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\theta - \sin\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{\sqrt{10}}{10}$.

故选：B.

2. (2024·高一·山东临沂·期中) $\cos 15^\circ = (\quad)$

- A. $2 - \sqrt{3}$ B. $\sqrt{6} - \sqrt{3}$ C. $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ D. $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

【答案】D

【解析】由题意可得： $\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ$
 $= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$,

所以 $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

故选：D.

3. (2024·高一·江苏镇江·阶段练习) 计算： $\sin 105^\circ = (\quad)$

- A. $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ D. $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

【答案】D

【解析】 $\sin 105^\circ = \sin(60^\circ + 45^\circ) = \sin 60^\circ \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

故选：D.

题型二：两角和与差的正切公式

4. (2024·湖南岳阳·模拟预测) 已知 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 且 $\tan \alpha = \frac{3}{4}$, 则 $\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$ 的值等于 $(\quad)$

- A. $-\frac{1}{7}$ B. $-\frac{1}{4}$ C. -1 D. $\frac{1}{7}$

【答案】A

【解析】 $\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan \alpha - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan \alpha \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{3}{4} - 1}{1 + \frac{3}{4}} = -\frac{1}{7}$.

故选：A.

5. (2024·高一·四川内江·阶段练习) $\tan 15^\circ = (\quad)$.

- A. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ B. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ C. $2+\sqrt{3}$ D. $2-\sqrt{3}$

【答案】D

【解析】 $\tan 15^\circ = \tan(45^\circ - 30^\circ)$

$$= \frac{\tan 45^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 45^\circ \tan 30^\circ} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + 1 \times \frac{\sqrt{3}}{3}} = 2 - \sqrt{3}.$$

故选：D

6. (2024·高一·甘肃甘南·期末) $\frac{\tan 38^\circ + \tan 22^\circ}{1 - \tan 38^\circ \tan 22^\circ} = (\quad)$

- A. $\sqrt{3}$ B. 2 C. 1 D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【答案】A

【解析】 $\frac{\tan 38^\circ + \tan 22^\circ}{1 - \tan 38^\circ \tan 22^\circ} = \tan(38^\circ + 22^\circ) = \tan 60^\circ = \sqrt{3}.$

故选：A

题型三：二倍角公式的简单应用

7. (2024·高三·内蒙古锡林郭勒盟·期中) 若 $\tan \theta = 3$ ，则 $\sin^2 \theta - \sin 2\theta = (\quad)$

- A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{3}{10}$
C. $\frac{4}{5}$ D. $\frac{1}{10}$

【答案】B

【解析】因为 $\sin \theta = 3 \cos \theta$ 且 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ ，将 $\sin \theta = 3 \cos \theta$ 代入 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 得：

$$(3 \cos \theta)^2 + \cos^2 \theta = 1, \quad 9 \cos^2 \theta + \cos^2 \theta = 1, \quad 10 \cos^2 \theta = 1, \quad \text{所以 } \cos^2 \theta = \frac{1}{10}.$$

$$\text{由 } \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1, \quad \cos^2 \theta = \frac{1}{10}, \quad \text{可得 } \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}.$$

因为 $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$ ，又 $\sin \theta = 3 \cos \theta$ ，所以 $\sin 2\theta = 2 \times 3 \cos \theta \times \cos \theta = 6 \cos^2 \theta$ ，

$$\text{由 } \cos^2 \theta = \frac{1}{10}, \quad \text{可得 } \sin 2\theta = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

将 $\sin^2 \theta = \frac{9}{10}$ ， $\sin 2\theta = \frac{3}{5}$ 代入 $\sin^2 \theta - \sin 2\theta$ 可得：

$$\sin^2 \theta - \sin 2\theta = \frac{9}{10} - \frac{3}{5} = \frac{9-6}{10} = \frac{3}{10}.$$

故选：B.

8. (2024·高一·山东淄博·期中) 下列各式中, 值为 $\frac{1}{2}$ 的是 ()

A. $\cos^2 \frac{\pi}{12} - \sin^2 \frac{\pi}{12}$

B. $\frac{\tan 22.5^\circ}{1 - \tan^2 22.5^\circ}$

C. $4 \sin 195^\circ \cos 195^\circ$

D. $\sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{6}}{2}}$

【答案】B

【解析】选项 A, $\cos^2 \frac{\pi}{12} - \sin^2 \frac{\pi}{12} = \cos\left(2 \times \frac{\pi}{12}\right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 错误;

选项 B, $\frac{\tan 22.5^\circ}{1 - \tan^2 22.5^\circ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \tan 22.5^\circ}{1 - \tan^2 22.5^\circ} = \frac{1}{2} \tan 45^\circ = \frac{1}{2}$, 正确;

选项 C, $2 \sin 195^\circ \cos 195^\circ = 2 \sin(180^\circ + 15^\circ) \cos(180^\circ + 15^\circ) = 2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, 原式的值为 1, 错误;

选项 D, $\sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{6}}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$, 错误.

故选：B.

9. (2024·高一·上海·单元测试) 已知 α 是第二象限的角, 且 $\sin(\pi + \alpha) = -\frac{3}{5}$, 则 $\tan 2\alpha$ 的值为 ()

A. $\frac{4}{5}$

B. $-\frac{23}{7}$

C. $-\frac{24}{7}$

D. -3

【答案】C

【解析】因为 $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha = -\frac{3}{5}$, 所以 $\sin \alpha = \frac{3}{5}$,

又 α 是第二象限的角, 所以 $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = -\frac{4}{5}$,

所以 $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$,

所以 $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2 \times \left(-\frac{3}{4}\right)}{1 - \left(-\frac{3}{4}\right)^2} = -\frac{24}{7}$.

故选：C

题型四：给角求值

10. (2024·高一·河南信阳·阶段练习) $(\tan 30^\circ + \tan 70^\circ) \sin 10^\circ =$ _____.

【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\begin{aligned} \text{【解析】 } (\tan 30^\circ + \tan 70^\circ) \sin 10^\circ &= \left(\frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} + \frac{\sin 70^\circ}{\cos 70^\circ} \right) \sin 10^\circ \\ &= \frac{(\sin 30^\circ \cos 70^\circ + \cos 30^\circ \sin 70^\circ) \sin 10^\circ}{\cos 30^\circ \cos 70^\circ} \\ &= \frac{\sin 100^\circ \sin 10^\circ}{\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 20^\circ} = \frac{2 \sin 10^\circ \cos 10^\circ}{\sqrt{3} \sin 20^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

故答案为: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

11. (2024·高一·全国·课后作业) $(1 + \tan 1^\circ)(1 + \tan 2^\circ) \cdots (1 + \tan 44^\circ)(1 + \tan 45^\circ) =$ _____.

【答案】 2^{23}

【解析】由正切的和角公式得若 $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$, 则 $(1 + \tan \alpha)(1 + \tan \beta) = 2$, 再根据此结论求解即可得答案. ∴

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}, \quad \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta} = 1,$$

$$\therefore \tan \alpha + \tan \beta + \tan \alpha \tan \beta = 1,$$

$$\therefore (1 + \tan \alpha)(1 + \tan \beta) = 2.$$

$$\therefore (1 + \tan 1^\circ)(1 + \tan 2^\circ) \cdots (1 + \tan 44^\circ)(1 + \tan 45^\circ)$$

$$= (1 + \tan 1^\circ)(1 + \tan 44^\circ)(1 + \tan 2^\circ)(1 + \tan 43^\circ) \cdots (1 + \tan 22^\circ)(1 + \tan 23^\circ)(1 + \tan 45^\circ) = \underbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{23 \text{ 个}} = 2^{23}$$

故答案为: 2^{23}

12. (2024·高一·全国·单元测试) $\frac{\sin 110^\circ \sin 20^\circ}{\cos^2 155^\circ - \sin^2 155^\circ}$ 的值为 _____.

【答案】 $\frac{1}{2}$

$$\text{【解析】 } \frac{\sin 110^\circ \sin 20^\circ}{\cos^2 155^\circ - \sin^2 155^\circ} = \frac{\sin 70^\circ \sin 20^\circ}{\cos 310^\circ} = \frac{\cos 20^\circ \sin 20^\circ}{\cos 50^\circ} = \frac{\frac{1}{2} \sin 40^\circ}{\sin 40^\circ} = \frac{1}{2}.$$

故答案为 $\frac{1}{2}$

题型五：给值求值

13. (2024·高一·江苏南通·期中) 已知 $\sin \theta + \sin(\theta - \frac{\pi}{3}) = 1$, 则 $\sin(2\theta + \frac{\pi}{6}) =$ ()

A. $\frac{1}{3}$

B. $-\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $-\frac{1}{2}$

【答案】A

【解析】依题意， $\sin \theta + \sin(\theta - \frac{\pi}{3}) = \sin \theta + \frac{1}{2} \sin \theta - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta = \frac{3}{2} \sin \theta - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta = \sqrt{3} \sin(\theta - \frac{\pi}{6})$ ，则 $\sin(\theta - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ，所以 $\sin(2\theta + \frac{\pi}{6}) = \cos(2\theta - \frac{\pi}{3}) = 1 - 2\sin^2(\theta - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{3}$ 。

故选：A

14. (2024·全国·模拟预测) 已知 $\sin(\alpha + \frac{\pi}{6}) = \frac{4}{5}$ ，则 $\sin(2\alpha - \frac{\pi}{6}) =$ ()

A. $\frac{24}{25}$

B. $-\frac{24}{25}$

C. $\frac{7}{25}$

D. $-\frac{7}{25}$

【答案】C

【解析】设 $\beta = \alpha + \frac{\pi}{6}$ ，则 $\alpha = \beta - \frac{\pi}{6}$ ， $\sin \beta = \frac{4}{5}$ ，所以 $\sin(2\alpha - \frac{\pi}{6}) = \sin[2(\beta - \frac{\pi}{6}) - \frac{\pi}{6}] = \sin(2\beta - \frac{\pi}{2}) = -\cos 2\beta$ ，所以 $-\cos 2\beta = -(1 - 2\sin^2 \beta) = 2\sin^2 \beta - 1 = 2 \times \frac{16}{25} - 1 = \frac{7}{25}$ 。

故选：C。

15. (2024·高一·江苏淮安·阶段练习) 设 α 为锐角，若 $\cos(\alpha + \frac{\pi}{6}) = \frac{3}{5}$ ，则 $\cos(2\alpha - \frac{\pi}{6})$ 的值为 ()

A. $-\frac{7}{25}$

B. $\frac{7}{25}$

C. $-\frac{24}{25}$

D. $\frac{24}{25}$

【答案】D

【解析】因为 α 为锐角，则 $\alpha + \frac{\pi}{6} \in (\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3})$ ，因为 $\cos(\alpha + \frac{\pi}{6}) = \frac{3}{5}$ ，所以 $\sin(\alpha + \frac{\pi}{6}) = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha + \frac{\pi}{6})} = \frac{4}{5}$ ，所以 $\cos(2\alpha - \frac{\pi}{6}) = \cos(\frac{\pi}{6} - 2\alpha) = \cos[\frac{\pi}{2} - (2\alpha + \frac{\pi}{3})] = \sin(2\alpha + \frac{\pi}{3}) = \sin 2(\alpha + \frac{\pi}{6}) = 2\sin(\alpha + \frac{\pi}{6})\cos(\alpha + \frac{\pi}{6})$
 $= 2 \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{24}{25}$ 。

故选：D。

题型六：给值求角

16. (2024·高一·内蒙古鄂尔多斯·开学考试) 已知角 $\alpha, \beta \in (0, \pi)$ ， $\tan(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}$ ， $\cos \beta = \frac{7\sqrt{2}}{10}$ ，则 $2\alpha + \beta =$ ()

A. $\frac{\pi}{4}$

B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{4\pi}{3}$

D. $\frac{9\pi}{4}$

【答案】A

【解析】角 $\alpha, \beta \in (0, \pi)$ ，由 $\cos \beta = \frac{7\sqrt{2}}{10}$ 得 $\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \frac{\sqrt{2}}{10}$ ，则 $\tan \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{1}{7} < 1$ ，又因为 $y = \tan x$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，则 $\beta \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ ，

$$\text{而 } \tan \alpha = \tan[(\alpha + \beta) - \beta] = \frac{\tan(\alpha + \beta) - \tan \beta}{1 + \tan(\alpha + \beta) \cdot \tan \beta} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{7}}{1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{7}} = \frac{1}{3},$$

同理有 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ ，

$$\text{所以 } \tan(2\alpha + \beta) = \tan[(\alpha + \beta) + \alpha] = \frac{\tan(\alpha + \beta) + \tan \alpha}{1 - \tan(\alpha + \beta) \cdot \tan \alpha} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}} = 1,$$

且 $2\alpha + \beta \in \left(0, \frac{3\pi}{4}\right)$ ，得 $2\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ 。

故选：A。

17. (2024·高三·贵州铜仁·阶段练习) 已知 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\sin \beta = \frac{\sqrt{10}}{10}$ ，且 α 和 β 均为钝角，则 $\alpha + \beta$ 的值为

()

A. $\frac{\pi}{4}$

B. $\frac{5\pi}{4}$

C. $\frac{5\pi}{4}$ 或 $\frac{7\pi}{4}$

D. $\frac{7\pi}{4}$

【答案】D

【解析】∵ α 和 β 均为钝角，

$$\therefore \cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}, \quad \cos \beta = -\sqrt{1 - \sin^2 \beta} = -\frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

$$\therefore \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \times \left(-\frac{3\sqrt{10}}{10}\right) - \frac{\sqrt{5}}{5} \times \frac{\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

由 α 和 β 均为钝角，得 $\pi < \alpha + \beta < 2\pi$ ， $\therefore \alpha + \beta = \frac{7\pi}{4}$ 。

故选：D

18. (2024·高一·全国·课堂例题) 已知 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ， $\sin \beta = \frac{\sqrt{10}}{10}$ ，且 α 和 β 均为钝角，则 $\alpha + \beta$ 的值为

()

A. $\frac{3\pi}{2}$

B. $\frac{5\pi}{4}$

C. $\frac{5\pi}{4}$ 或 $\frac{7\pi}{4}$

D. $\frac{7\pi}{4}$

【答案】D

【解析】∵ α 和 β 均为钝角，

$$\therefore \cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}, \quad \cos \beta = -\sqrt{1 - \sin^2 \beta} = -\frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

$$\therefore \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \times \left(-\frac{3\sqrt{10}}{10}\right) - \frac{\sqrt{5}}{5} \times \frac{\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

由 α 和 β 均为钝角，得 $\pi < \alpha + \beta < 2\pi$ ， $\therefore \alpha + \beta = \frac{7\pi}{4}$.

故选：D

题型七：利用半角公式化简求值问题

19. (2024·高一·上海·课后作业) 已知 $\sin \alpha = \frac{12}{13}$ ， $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ ，则 $\sin \frac{\alpha}{2} = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $\cos \frac{\alpha}{2} = \underline{\hspace{2cm}}$ ，

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】 $\frac{3\sqrt{13}}{13}$ $\frac{2\sqrt{13}}{13}$ $\frac{3}{2}$

【解析】因为 $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ ，所以 $\frac{\alpha}{2} \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ ， $\sin \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2} > 0$ ， $\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} > 0$ ，

$$\text{所以 } \sin \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\left(\sin \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \sin \alpha} = \frac{\sqrt{13}}{13}, \quad \text{同理 } \sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 + \sin \alpha} = \frac{5\sqrt{13}}{13},$$

$$\text{所以 } \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{3\sqrt{13}}{13}, \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{2\sqrt{13}}{13}, \quad \text{从而 } \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{3\sqrt{13}}{13}}{\frac{2\sqrt{13}}{13}} = \frac{3}{2}.$$

故答案为： $\frac{3\sqrt{13}}{13}$ ， $\frac{2\sqrt{13}}{13}$ ， $\frac{3}{2}$.

20. (2024·高一·上海徐汇·阶段练习) 已知 $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ ， $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ ，则 $\sin \frac{\alpha}{2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $-\frac{\sqrt{5}}{5}$

【解析】依题意，

$$\sin \frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} = -\sqrt{\frac{1 - \frac{3}{5}}{2}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

故答案为： $-\frac{\sqrt{5}}{5}$.

21. (2024·高三·河北石家庄·期末) 已知 $\frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，则 $\tan \frac{\theta}{2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\sqrt{3}$

【解析】因为 $\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{2\cos^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}$ ，且 $\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，

所以 $\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{3}$ ，

故答案为： $\sqrt{3}$ 。

题型八：三角恒等式的证明

22. (2024·高一·全国·课后作业) 已知 $\tan(\alpha+\beta) = 2\tan\alpha$ ，求证： $3\sin\beta = \sin(2\alpha+\beta)$ 。

【解析】证明：由已知，得 $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha}$ ，

$$\therefore \sin(\alpha+\beta)\cos\alpha = 2\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha,$$

$$\therefore \sin(2\alpha+\beta) = \sin[(\alpha+\beta)+\alpha] = \sin(\alpha+\beta)\cos\alpha + \cos(\alpha+\beta)\sin\alpha = 3\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha,$$

$$3\sin\beta = 3\sin[(\alpha+\beta)-\alpha] = 3\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha - 3\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha = 3\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha,$$

$$\therefore 3\sin\beta = \sin(2\alpha+\beta).$$

23. (2024·高一·广东湛江·期末) 证明下列等式：

$$(1) \sin\theta(1+\cos 2\theta) = \sin 2\theta \cos \theta$$

$$(2) \cos\alpha(\cos\alpha - \cos\beta) + \sin\alpha(\sin\alpha - \sin\beta) = 2\sin^2 \frac{\alpha-\beta}{2}.$$

【解析】(1) 左边 $= \sin\theta(1+\cos 2\theta) = \sin\theta(1+2\cos^2\theta-1) = 2\sin\theta\cos^2\theta = \sin 2\theta \cos \theta =$ 右边，得证；

$$(2) \text{ 左边} = \cos\alpha(\cos\alpha - \cos\beta) + \sin\alpha(\sin\alpha - \sin\beta)$$

$$= \cos^2\alpha - \cos\alpha\cos\beta + \sin^2\alpha - \sin\alpha\sin\beta$$

$$= 1 - (\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)$$

$$= 1 - \cos(\alpha - \beta)$$

$$= 2\sin^2 \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$=$ 右边，得证。

24. (2024·高二·四川成都·开学考试) (1) 已知 $\sin(30^\circ + \alpha) = \frac{3}{5}$ ， $60^\circ < \alpha < 150^\circ$ ，求 $\cos\alpha$ 的值；

$$(2) \text{ 证明： } \frac{1+\sin 2\theta - \cos 2\theta}{1+\sin 2\theta + \cos 2\theta} = \tan \theta.$$

【解析】(1) 因为 $\sin(30^\circ + \alpha) = \frac{3}{5}$ ， $60^\circ < \alpha < 150^\circ$ ，

所以 $90^\circ < 30^\circ + \alpha < 180^\circ$ ，可知 $\cos(30^\circ + \alpha) = -\frac{4}{5}$ ，

$$\text{则 } \cos\alpha = \cos[(30^\circ + \alpha) - 30^\circ]$$

$$= \cos(30^\circ + a)\cos 30^\circ + \sin(30^\circ + a)\sin 30^\circ,$$

$$= -\frac{4}{5} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3-4\sqrt{3}}{10}.$$

$$\begin{aligned} \text{(2) 证明: } \frac{1 + \sin 2q - \cos 2q}{1 + \sin 2q + \cos 2q} &= \frac{\cos^2 q + \sin^2 q + 2\cos q \sin q - \cos^2 q + \sin^2 q}{\cos^2 q + \sin^2 q + 2\cos q \sin q + \cos^2 q - \sin^2 q} \\ &= \frac{\sin q(\cos q + \sin q)}{\cos q(\cos q + \sin q)} = \frac{\sin q}{\cos q} = \tan q, \end{aligned}$$

$$\text{即 } \frac{1 + \sin 2\theta - \cos 2\theta}{1 + \sin 2\theta + \cos 2\theta} = \tan \theta.$$

题型九：辅助角公式的应用

25. (2024·高三·福建南平·阶段练习) 函数 $f(x) = 2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - 2\sqrt{3} \cos^2 \frac{x}{2} + \sqrt{3}$ 在 $[0, \pi]$ 上的最大值是_____.

【答案】2

$$\text{【解析】 } f(x) = 2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - 2\sqrt{3} \cos^2 \frac{x}{2} + \sqrt{3} = \sin x - 2\sqrt{3} \times \frac{1 + \cos x}{2} + \sqrt{3} = \sin x - \sqrt{3} \cos x = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right),$$

$$\text{因为 } x \in [0, \pi], \text{ 所以 } x - \frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right],$$

$$\text{所以 } \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right],$$

$$\text{所以 } f(x) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \in [-\sqrt{3}, 2],$$

所以 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上的最大值为 2.

故答案为: 2.

26. (2024·高一·上海松江·期末) 设函数 $f(x) = \sqrt{3}\sin(x + \varphi) + \cos(x + \varphi)$ 对任意的实数 x 均满足 $f(-x) = f(x)$, 则 $\tan \varphi =$ _____.

【答案】 $\sqrt{3}$

$$\text{【解析】 因为 } f(x) = \sqrt{3}\sin(x + \varphi) + \cos(x + \varphi) = 2\sin\left(x + \varphi + \frac{\pi}{6}\right),$$

又因为 $f(-x) = f(x)$, 所以函数 $f(x)$ 为偶函数,

$$\text{即 } \varphi + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\therefore \varphi = \frac{\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbb{Z}),$$

$$\text{所以 } \tan \varphi = \tan\left(\frac{\pi}{3} + k\pi\right) = \sqrt{3}, \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

故答案为: $\sqrt{3}$.

27. (2024·高三·上海杨浦·期中) 已知函数 $f(x) = 3\sin x + 2\cos x$, 当 $f(x)$ 取得最大值时, $\tan x = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{3}{2}/1.5$

【解析】由函数 $f(x) = \sqrt{13} \sin(x + \varphi)$, 其中 $\tan \varphi = \frac{2}{3}$,

当 $f(x)$ 取得最大值, 则 $x + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$, 解得 $x = -\varphi + \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$,

此时 $\tan x = \tan\left(-\varphi + \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = \tan\left(-\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\tan \varphi} = \frac{3}{2}$.

故答案为: $\frac{3}{2}$.

题型十: 三角恒等变换与三角函数图象性质的综合

28. (2024·高一·山东青岛·期中) 设函数 $f(x) = \cos x \cdot \cos(x - \frac{\pi}{6}) + \sqrt{3} \sin^2 x - \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调递增区间;

(2) 当 $x \in [\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{2}]$ 时, 求函数 $f(x)$ 的最大值和最小值.

【解析】(1) 依题意, $f(x) = \cos x (\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x) + \sqrt{3} \sin^2 x - \frac{3\sqrt{3}}{4}$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cos^2 x + \frac{1}{2} \sin x \cos x + \sqrt{3} \sin^2 x - \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} + \frac{1}{2} \sin x \cos x + \sqrt{3} \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$= \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{4} \cos 2x = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x \right) = \frac{1}{2} \sin(2x - \frac{\pi}{3}),$$

$$\text{由 } -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \text{ 得 } -\frac{\pi}{12} + k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[-\frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{5\pi}{12} + k\pi] (k \in \mathbb{Z})$.

(2) 由 (1) 知, $f(x) = \frac{1}{2} \sin(2x - \frac{\pi}{3})$, 由 $x \in [\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{2}]$, 得 $2x - \frac{\pi}{3} \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}]$,

当 $2x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6}$, 即 $x = \frac{\pi}{12}$ 时, 函数 $f(x)$ 取最小值, 最小值为 $-\frac{1}{4}$;

当 $2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$, 即 $x = \frac{5\pi}{12}$ 时, 函数 $f(x)$ 取最大值, 最大值为 $\frac{1}{2}$.

所以函数 $f(x)$ 的最大值和最小值分别为 $\frac{1}{2}$ 和 $-\frac{1}{4}$.

29. (2024·高一·广西崇左·期末) 已知函数 $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 2\sin x \cos x$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调递减区间;

(2) 求 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{7\pi}{12}, 0\right]$ 上的值域.

【解析】(1) 由题意可得 $f(x) = \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x + \sin 2x$

$$= \frac{3}{2}\sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x = \sqrt{3}\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right),$$

$$\text{令 } 2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq 2x - \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \quad (k \in \mathbf{Z}),$$

$$\text{解得 } k\pi + \frac{\pi}{3} \leq x \leq k\pi + \frac{5\pi}{6} \quad (k \in \mathbf{Z}),$$

故 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left[k\pi + \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{5\pi}{6}\right] \quad (k \in \mathbf{Z})$.

$$(2) \text{ 因为 } x \in \left[-\frac{7\pi}{12}, 0\right], \text{ 所以 } 2x - \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{4\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}\right].$$

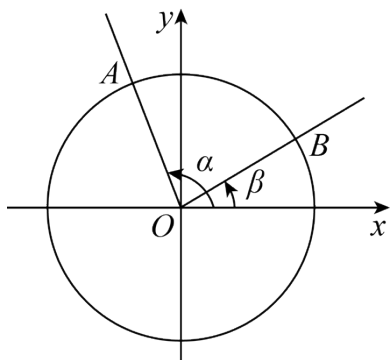
当 $2x - \frac{\pi}{6} = -\frac{4\pi}{3}$, 即 $x = -\frac{7\pi}{12}$ 时, $f(x)$ 取得最大值, 最大值为 $f\left(-\frac{7\pi}{12}\right) = \sqrt{3}\sin\left(-\frac{7\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}$;

当 $2x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{2}$, 即 $x = -\frac{\pi}{6}$ 时, $f(x)$ 取得最小值, 最小值为 $f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}\sin\left(-\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}$.

故 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{7\pi}{12}, 0\right]$ 上的值域为 $\left[-\sqrt{3}, \frac{3}{2}\right]$.

题型十一: 利用两角和与差的余弦进行证明

30. 如图, 在直角坐标系 xOy 中, 角 α 、 β 以 Ox 为始边, 其终边分别交单位圆于点 A 、 B .



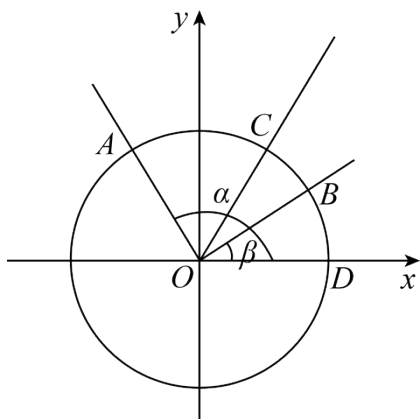
(1) 已知角 $\alpha - \beta$ 以 Ox 为始边, 终边交单位圆于点 C , 试在图中作出点 C (写明作法), 并写出点 C 的坐标;

(2) 根据图示, 推导两角差的余弦公式: $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$;

(3) 由两角差的余弦公式推导两角和的正弦公式: $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$.

【解析】(1) 以 OA 为始边顺时针作角 β , 其终边交单位圆于点 C , 如图所示,

则 $\angle COx = \alpha - \beta$, 由三角函数的定义, 可得 $C(\cos(\alpha - \beta), \sin(\alpha - \beta))$.



(2) 设单位圆与 x 轴正半轴交于点 D ,

因为 $\angle AOB = \angle COx$, 所以 $|AB| = |CD|$,

又因为 $A(\cos \alpha, \sin \alpha)$, $B(\cos \beta, \sin \beta)$, $D(1, 0)$,

所以 $|AB| = \sqrt{(\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2} = \sqrt{2 - 2(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta)}$,

$|CD| = \sqrt{(\cos(\alpha - \beta) - 1)^2 + (\sin(\alpha - \beta) - 0)^2} = \sqrt{2 - 2\cos(\alpha - \beta)}$,

则 $\sqrt{2 - 2(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta)} = \sqrt{2 - 2\cos(\alpha - \beta)}$

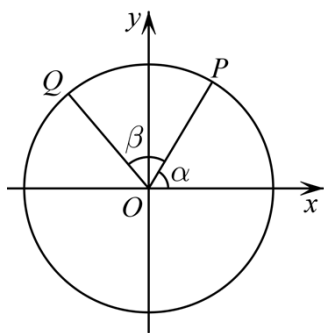
整理得 $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$.

(3) 因为 $\sin(\alpha + \beta) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right] = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right]$,

又因为 $\cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right] = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos \beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin \beta = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$,

所以 $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$.

31. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 角 α 的始边为 Ox , 终边与单位圆交于点 P , 角 β 的始边为 OP , 终边与单位圆交于点 Q . 试利用勾股定理推导出角 α 与角 β 的和与差的四个正弦与余弦公式.



【解析】①如图, 将 $\triangle OPQ$ 旋转到 OAB 位置, 即绕着 O 点, 将 $\triangle OPQ$ 旋转到 OP 边在 x 轴上, 则 $PQ = AB$.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/368023005124007026>