

云南省曲靖市陆良县八中 2023-2024 学年高三第五次模拟考试数学试卷

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知点 $A(2,0)$ 、 $B(0,-2)$ 。若点 P 在函数 $y = \sqrt{x}$ 的图象上，则使得 $\triangle PAB$ 的面积为 2 的点 P 的个数为 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

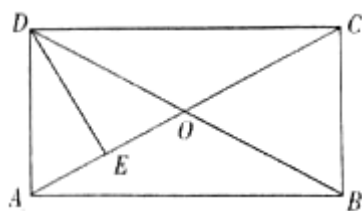
2. 设 F_1, F_2 分别为双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点，过点 F_1 作圆 $x^2 + y^2 = a^2$ 的切线，与双曲线的左、右两支分别交于点 P, Q ，若 $|QF_2| = |PQ|$ ，则双曲线渐近线的斜率为 ()

- A. ± 1 B. $\pm(\sqrt{3}-1)$ C. $\pm(\sqrt{3}+1)$ D. $\pm\sqrt{5}$

3. 设点 A, B, C 不共线，则“ $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \perp \overrightarrow{BC}$ ”是“ $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$ ” ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分又不必要条件

4. 如图所示，矩形 $ABCD$ 的对角线相交于点 O ， E 为 AO 的中点，若 $\overrightarrow{DE} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AD} (\lambda, \mu \in R)$ ，则 $\lambda + \mu$ 等于 ()。



- A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. -1

5. 若函数 $f(x) = x^2 e^x - a$ 恰有 3 个零点，则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $(\frac{4}{e^2}, +\infty)$ B. $(0, \frac{4}{e^2})$ C. $(0, 4e^2)$ D. $(0, +\infty)$

6. 设 $a = \log_7 3$ ， $b = \log_{\frac{1}{3}} 7$ ， $c = 3^{0.7}$ ，则 a, b, c 的大小关系是 ()

- A. $a < b < c$ B. $c < b < a$ C. $b < c < a$ D. $b < a < c$

7. 过椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点 F 的直线过 C 的上顶点 B ，且与椭圆 C 相交于另一点 A ，点 A 在 y

轴上的射影为 A' ，若 $\frac{|FO|}{|AA'|} = \frac{3}{4}$ ， O 是坐标原点，则椭圆 C 的离心率为（ ）

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

8. 设 $k > 1$ ，则关于 x, y 的方程 $(1-k)x^2 + y^2 = k^2 - 1$ 所表示的曲线是（ ）

- A. 长轴在 y 轴上的椭圆 B. 长轴在 x 轴上的椭圆
C. 实轴在 y 轴上的双曲线 D. 实轴在 x 轴上的双曲线

9. 设 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+2y \leq 1 \\ 2x+y \geq -1 \\ x-y \leq 0 \end{cases}$ ，若 $z = -3x + 2y$ 的最大值为 n ，则 $\left(2x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$ 的展开式中 x^2 项的系数为（ ）

- A. 60 B. 80 C. 90 D. 120

10. 已知在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，若函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}bx^2 + \frac{1}{4}(a^2 + c^2 - ac)x$ 存在极值，则角 B 的取值范围是（ ）

- A. $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ B. $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$ C. $\left(\frac{\pi}{3}, \pi\right)$ D. $\left(\frac{\pi}{6}, \pi\right)$

11. 若双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的离心率 $e = \frac{\sqrt{7}}{2}$ ，则该双曲线的焦点到其渐近线的距离为（ ）

- A. $2\sqrt{3}$ B. 2 C. $\sqrt{3}$ D. 1

12. 若 i 为虚数单位，则复数 $z = -\sin \frac{2\pi}{3} + i \cos \frac{2\pi}{3}$ 的共轭复数 $\bar{z}$ 在复平面内对应的点位于（ ）

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 能说明“若 $f(x+1) < f(x)$ 对于任意的 $x \in (0, +\infty)$ 都成立，则 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数”为假命题的一个函数是_____.

14. 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，已知点 P 在直线 AB_1 上运动，则下列四个命题中：①三棱锥 $D - C_1BP$ 的体积不变；② $DP \perp D_1C$ ；③当 P 为 AB_1 中点时，二面角 $P - A_1C_1 - C$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ；④若正方体的棱长为 2，则

$|DP| + |BP|$ 的最小值为 $\sqrt{8+4\sqrt{2}}$ ；其中说法正确的是_____（写出所有说法正确的编号）

15. 在边长为 4 的菱形 $ABCD$ 中， $A = 60^\circ$ ，点 P 在菱形 $ABCD$ 所在的平面内．若 $PA = 3, PC = \sqrt{21}$ ，则

$\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PD} = \underline{\hspace{2cm}}$.

16. 已知三棱锥 $A-BCD$ 中, $AD=AC=BC=BD=3$, $AB=CD=2$, 则该三棱锥的外接球的表面积是 _____.

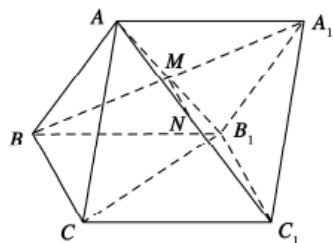
三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (12 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的两个焦点分别为 $F_1(-\sqrt{2}, 0)$ 、 $F_2(\sqrt{2}, 0)$. 点 $M(1, 0)$ 与椭圆短轴的两个端点的连线相互垂直.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 已知点 N 的坐标为 $(3, 2)$, 点 P 的坐标为 (m, n) ($m \neq 3$). 过点 M 任作直线 l 与椭圆 C 相交于 A 、 B 两点, 设直线 AN 、 NP 、 BN 的斜率分别为 k_1 、 k_2 、 k_3 , 若 $k_1 + k_3 = 2k_2$, 试求 m 、 n 满足的关系式.

18. (12 分) 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 四边形 A_1B_1BA 是菱形, $AB=4$, $\angle ABB_1=60^\circ$, $B_1C_1=3$, $BC \perp AB$, 点 M 、 N 分别是 A_1B 、 AC_1 的中点, 且 $MN \perp AB_1$.



(1) 求证: 平面 $BCC_1B_1 \perp$ 平面 A_1B_1BA ;

(2) 求四棱锥 $A-BCC_1B_1$ 的体积.

19. (12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $\frac{a_n}{a_{n+1}} + \frac{a_n}{a_{n-1}} = 2$ ($n \geq 2$), 且 $a_1 \neq a_2$, $a_3 = \frac{1}{5}$, a_1, a_2, a_5 成等比数列.

(1) 求证: 数列 $\{\frac{1}{a_n}\}$ 是等差数列, 并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 记数列 $\{\frac{1}{a_n}\}$ 的前 n 项和为 S_n , $b_n = a_n a_{n+1} S_n - \frac{1}{4}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

20. (12 分) 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$, 过 $Q(-4, 0)$ 的直线 l 与椭圆 E 相交于 A, B 两点, 且与 y 轴相交于 P 点.

(1) 若 $\overrightarrow{PA} = \frac{3}{2} \overrightarrow{AQ}$, 求直线 l 的方程;

(2) 设 A 关于 x 轴的对称点为 C , 证明: 直线 BC 过 x 轴上的定点.

21. (12 分) 某中学的甲、乙、丙三名同学参加高校自主招生考试, 每位同学彼此独立的从 A, B, C, D, E 五所高校中任选 2 所.

(1) 求甲、乙、丙三名同学都选 D 高校的概率；

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/368026120114007032>