

2024 届云南省宾川县四校高三综合测试五（5 月）数学试题

注意事项：

- 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号、考场号和座位号填写在试题卷和答题卡上。用 2B 铅笔将试卷类型（B）填涂在答题卡相应位置上。将条形码粘贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”。
- 作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案不能答在试题卷上。
- 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。
- 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 盒中装有形状、大小完全相同的 5 张“刮刮卡”，其中只有 2 张“刮刮卡”有奖，现甲从盒中随机取出 2 张，则至少有一张有奖的概率为（ ）

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $\frac{7}{10}$ D. $\frac{4}{5}$

2. 已知点 F_2 为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{4} = 1 (a > 0)$ 的右焦点，直线 $y = kx$ 与双曲线交于 A, B 两点，若 $\angle AF_2B = \frac{2\pi}{3}$ ，则

$\triangle AF_2B$ 的面积为（ ）

A. $2\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{3}$ C. $4\sqrt{2}$ D. $4\sqrt{3}$

3. 已知抛物线 $C: y^2 = 4x$ 和点 $D(2, 0)$ ，直线 $x = ty - 2$ 与抛物线 C 交于不同两点 A, B ，直线 BD 与抛物线 C 交于另一点 E 。给出以下判断：

①直线 OB 与直线 OE 的斜率乘积为 -2 ；

② $AE \parallel y$ 轴；

③以 BE 为直径的圆与抛物线准线相切。

其中，所有正确判断的序号是（ ）

A. ①②③ B. ①② C. ①③ D. ②③

4. 已知命题 $p: x < 2m + 1, q: x^2 - 5x + 6 < 0$ ，且 p 是 q 的必要不充分条件，则实数 m 的取值范围为（ ）

A. $m > \frac{1}{2}$ B. $m \geq \frac{1}{2}$ C. $m > 1$ D. $m \geq 1$

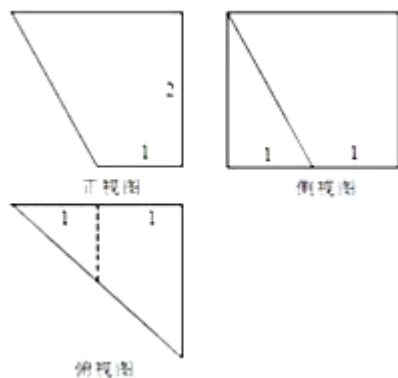
5. 已知条件 $p: a = -1$ ，条件 $q: \text{直线 } x - ay + 1 = 0 \text{ 与直线 } x + a^2y - 1 = 0 \text{ 平行}$ ，则 p 是 q 的（ ）

A. 充要条件 B. 必要不充分条件 C. 充分不必要条件 D. 既不充分也不必要条件

6. 已知复数 $z = \frac{(2 + ai)i}{1 - i}$ 是纯虚数，其中 a 是实数，则 z 等于（ ）

A. $2i$ B. $-2i$ C. i D. $-i$

7. 某几何体的三视图如图所示，则该几何体的体积为（ ）



- A. $\frac{8}{3}$ B. 3 C. $\frac{11}{3}$ D. 4

8. 已知函数 $f(x) = \ln x + 1$, $g(x) = 2e^{x-\frac{1}{2}}$, 若 $f(m) = g(n)$ 成立, 则 $m-n$ 的最小值是（ ）

- A. $\frac{1}{2} + \ln 2$ B. $e - 2$ C. $\ln 2 - \frac{1}{2}$ D. $\sqrt{e} - \frac{1}{2}$

9. 定义在 R 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(-3-x) + f(x-3) = 0$, 若 $f(1) = 1$, $f(2) = -2$, 则

$f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2020) =$ ()

- A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

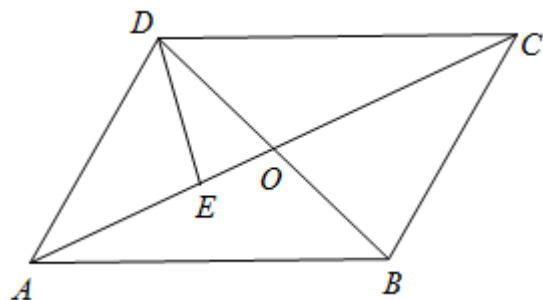
10. 已知 $a > 0$, $b > 0$, $a + b = 1$, 若 $\alpha = a + \frac{1}{a}$, $\beta = b + \frac{1}{b}$, 则 $\alpha + \beta$ 的最小值是（ ）

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

11. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1, a_2 = 2$, 且当 n 为奇数时, $a_{n+2} - a_n = 2$; 当 n 为偶数时, $a_{n+2} + 1 = 3(a_n + 1)$. 则此数列的前 20 项的和为（ ）

- A. $\frac{3^{11}-3}{2} + 90$ B. $\frac{3^{11}-3}{2} + 100$ C. $\frac{3^{12}-3}{2} + 90$ D. $\frac{3^{12}-3}{2} + 100$

12. 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, 对角线 AC 与 BD 交于点 O , 且 $\vec{AE} = 2\vec{EO}$, 则 $\vec{ED} =$ ()



- A. $\frac{1}{3}\vec{AD} - \frac{2}{3}\vec{AB}$ B. $\frac{2}{3}\vec{AD} + \frac{1}{3}\vec{AB}$

C. $\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ D. $\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 在平行四边形 $ABCD$ 中，已知 $AB=1$ ， $AD=2$ ， $\angle BAD=60^\circ$ ，若 $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{ED}$ ， $\overrightarrow{DF}=2\overrightarrow{FB}$ ，则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=\underline{\hspace{2cm}}$.

14. 已知圆柱的上下底面的中心分别为 O_1, O_2 ，过直线 O_1O_2 的平面截该圆柱所得的截面是面积为 36 的正方形，则该圆柱的体积为_____

15. $(3x^2-2x-1)^5$ 的展开式中， x^2 的系数是_____. (用数字填写答案)

16. 若 $\left(\sqrt{x}-\frac{2}{x^2}\right)^n$ 的展开式中只有第六项的二项式系数最大，则展开式中各项的系数和是_____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 0，公差为 a ， $a \in \mathbb{N}^*$ ；等差数列 $\{b_n\}$ 的首项为 0，公差为 b ， $b \in \mathbb{N}^*$. 由数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 构造数表 M ，与数表 M^* ；

记数表 M 中位于第 i 行第 j 列的元素为 c_{ij} ，其中 $c_{ij}=a_i+b_j$ ， $(i, j=1, 2, 3, \dots)$.

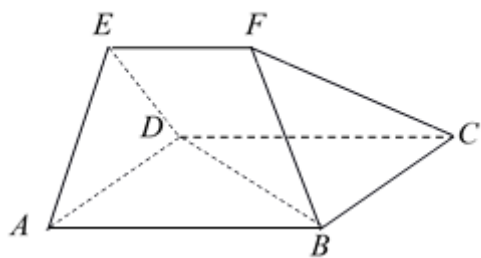
记数表 M^* 中位于第 i 行第 j 列的元素为 d_{ij} ，其中 $d_{ij}=a_i-b_{j+1}$ ($1 \leq i \leq b$ ， $i \in \mathbb{N}^*$ ， $j \in \mathbb{N}^*$). 如： $c_{1,2}=a_1+b_2$ ， $d_{1,2}=a_1-b_3$.

(1) 设 $a=5$ ， $b=9$ ，请计算 $c_{2,6}$ ， $c_{396,6}$ ， $d_{2,6}$ ；

(2) 设 $a=6$ ， $b=7$ ，试求 c_{ij} ， d_{ij} 的表达式 (用 i, j 表示)，并证明：对于整数 t ，若 t 不属于数表 M ，则 t 属于数表 M^* ；

(3) 设 $a=6$ ， $b=7$ ，对于整数 t ， t 不属于数表 M ，求 t 的最大值.

18. (12 分) 在以 $ABCDEF$ 为顶点的五面体中，底面 $ABCD$ 为菱形， $\angle ABC=120^\circ$ ， $AB=AE=ED=2EF$ ， $EF \parallel AB$ ，二面角 $E-AD-B$ 为直二面角.

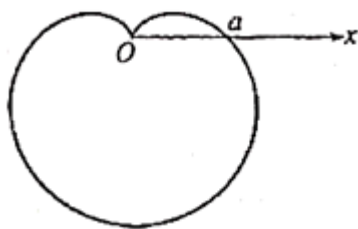


(I) 证明： $BD \perp FC$ ；

(II) 求二面角 $A-CF-B$ 的余弦值.

19. (12 分) 心形线是由一个圆上的一个定点, 当该圆在绕着与其相切且半径相同的另外一个圆周上滚动时, 这个定点的轨迹, 因其形状像心形而得名, 在极坐标系 Ox 中, 方程 $\rho = a(1 - \sin \theta)$ ($a > 0$) 表示的曲线 C_1 就是一条心形线, 如图, 以极轴 Ox 所在的直线为 x 轴, 极点 O 为坐标原点的直角坐标系 xOy 中. 已知曲线 C_2 的参数方程为

$$\begin{cases} x = 1 + \sqrt{3}t \\ y = \frac{\sqrt{3}}{3} + t \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}).$$



(1) 求曲线 C_2 的极坐标方程;

(2) 若曲线 C_1 与 C_2 相交于 A 、 O 、 B 三点, 求线段 AB 的长.

20. (12 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 过点 $(0, \sqrt{2})$, 且满足 $a+b=3\sqrt{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 若斜率为 $\frac{1}{2}$ 的直线与椭圆 C 交于两个不同点 A , B , 点 M 坐标为 $(2, 1)$, 设直线 MA 与 MB 的斜率分别为 k_1 , k_2 , 试问 k_1+k_2 是否为定值? 并说明理由.

21. (12 分) 为了整顿道路交通秩序, 某地考虑将对行人闯红灯进行处罚. 为了更好地了解市民的态度, 在普通行人中随机选取了 200 人进行调查, 当不处罚时, 有 80 人会闯红灯, 处罚时, 得到如表数据:

处罚金额 x (单位: 元)	5	10	15	20
会闯红灯的人数 y	50	40	20	10

若用表中数据所得频率代替概率.

(1) 当罚金定为 10 元时, 行人闯红灯的概率会比不进行处罚降低多少?

(2) 将选取的 200 人中会闯红灯的市民分为两类: A 类市民在罚金不超过 10 元时就会改正行为; B 类是其他市民. 现对 A 类与 B 类市民按分层抽样的方法抽取 4 人依次进行深度问卷, 则前两位均为 B 类市民的概率是多少?

22. (10 分) 已知 q , n 均为给定的大于 1 的自然数, 设集合 $M = \{1, 2, 3, \dots, q\}$, $T = \{x \mid x = x_1 + x_2q + \dots + x_nq^{n-1}, x_i \in M, i = 1, 2, \dots, n\}$.

(I) 当 $q = 2$, $n = 2$ 时, 用列举法表示集合 T ;

(II) 当 $q = 200$ 时, $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{100}\} \cup M$, 且集合 A 满足下列条件:

① 对任意 $1 \leq i < j \leq 100$, $a_i + a_j \neq 201$;

② $\sum_{i=1}^{100} a_i = 12020$.

证明: (i) 若 $\forall a_i \in A$, 则 $201 - a_i \in \bar{A}$ (集合 $\bar{A}$ 为集合 A 在集合 M 中的补集);

(ii) $\sum_{i=1}^{100} a_i^2$ 为一个定值 (不必求出此定值);

(III) 设 $s, t \in T$, $s = b_1 + b_2q + b_3q^2 + \dots + b_nq^{n-1}$, $t = c_1 + c_2q + \dots + c_nq^{n-1}$, 其中 $b_i, c_i \in M$, $i = 1, 2, \dots, n$, 若 $b_n < c_n$, 则 $s < t$.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1、C

【解析】

先计算出总的基本事件的个数, 再计算出两张都没获奖的个数, 根据古典概型的概率, 求出两张都没有奖的概率, 由对立事件的概率关系, 即可求解.

【详解】

从 5 张“刮刮卡”中随机取出 2 张, 共有 $C_5^2 = 10$ 种情况,

2 张均没有奖的情况有 $C_3^2 = 3$ (种), 故所求概率为 $1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$.

故选:C.

【点睛】

本题考查古典概型的概率、对立事件的概率关系, 意在考查数学建模、数学计算能力, 属于基础题.

2、D

【解析】

设双曲线 C 的左焦点为 F_1 ，连接 AF_1, BF_1 ，由对称性可知四边形 AF_1BF_2 是平行四边形，

设 $|AF_1| = r_1, |AF_2| = r_2$ ，得 $4c^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \frac{\pi}{3}$ ，求出 r_1r_2 的值，即得解。

【详解】

设双曲线 C 的左焦点为 F_1 ，连接 AF_1, BF_1 ，

由对称性可知四边形 AF_1BF_2 是平行四边形，

所以 $S_{\triangle AF_1F_2} = S_{\triangle AF_2B}$ ， $\angle F_1AF_2 = \frac{\pi}{3}$ 。

设 $|AF_1| = r_1, |AF_2| = r_2$ ，则 $4c^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \frac{\pi}{3} = r_1^2 + r_2^2 - r_1r_2$ ，

又 $|r_1 - r_2| = 2a$ ，故 $r_1r_2 = 4b^2 = 16$ ，

所以 $S_{\triangle AF_1F_2} = \frac{1}{2}r_1r_2 \sin \frac{\pi}{3} = 4\sqrt{3}$ 。

故选：D

【点睛】

本题主要考查双曲线的简单几何性质，考查余弦定理解三角形和三角形面积的计算，意在考查学生对这些知识的理解掌握水平。

3、B

【解析】

由题意，可设直线 DE 的方程为 $x = my + 2$ ，利用韦达定理判断第一个结论；将 $x = ty - 2$ 代入抛物线 C 的方程可得，

$y_A y_1 = 8$ ，从而， $y_A = -y_2$ ，进而判断第二个结论 设 F 为抛物线 C 的焦点，以线段 BE 为直径的圆为 M ，则圆心 M

为线段 BE 的中点。设 B, E 到准线的距离分别为 d_1, d_2 ， $e M$ 的半径为 R ，点 M 到准线的距离为 d ，显然 B ，

E, F 三点不共线，进而判断第三个结论。

【详解】

解：由题意，可设直线 DE 的方程为 $x = my + 2$ ，

代入抛物线 C 的方程，有 $y^2 - 4my - 8 = 0$ 。

设点 B, E 的坐标分别为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ ，

则 $y_1 + y_2 = 4m, y_1 y_2 = -8$ 。

所 $x_1 x_2 = (my_1 + 2)(my_2 + 2) = m^2 y_1 y_2 + 2m(y_1 + y_2) + 4 = 4$ 。

则直线 OB 与直线 OE 的斜率乘积为 $\frac{y_1 y_2}{x_1 x_2} = -2$. 所以①正确.

将 $x = ty - 2$ 代入抛物线 C 的方程可得, $y_A y_1 = 8$, 从而, $y_A = -y_2$,

根据抛物线的对称性可知, A, E 两点关于 x 轴对称,

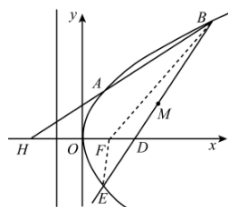
所以直线 $AE \parallel y$ 轴. 所以②正确.

如图, 设 F 为抛物线 C 的焦点, 以线段 BE 为直径的圆为 M ,

则圆心 M 为线段 BE 的中点. 设 B, E 到准线的距离分别为 d_1, d_2 , 圆 M 的半径为 R , 点 M 到准线的距离为 d ,

显然 B, E, F 三点不共线,

则 $d = \frac{d_1 + d_2}{2} = \frac{|BF| + |EF|}{2} > \frac{|BE|}{2} = R$. 所以③不正确.



故选: B.

【点睛】

本题主要考查抛物线的定义与几何性质、直线与抛物线的位置关系等基础知识, 考查运算求解能力、推理论证能力和创新意识, 考查数形结合思想、化归与转化思想, 属于难题.

4、D

【解析】

求出命题 q 不等式的解为 $2 < x < 3$, P 是 q 的必要不充分条件, 得 q 是 P 的子集, 建立不等式求解.

【详解】

解: Q 命题 $p: x < 2m + 1, q: x^2 - 5x + 6 < 0$, 即: $2 < x < 3$,

P 是 q 的必要不充分条件,

$\therefore (2, 3) \subseteq (-\infty, 2m + 1)$,

$\therefore 2m + 1 \geq 3$, 解得 $m \geq 1$. 实数 m 的取值范围为 $m \geq 1$.

故选: D.

【点睛】

本题考查根据充分、必要条件求参数范围, 其思路方法:

(1)解决此类问题一般是把充分条件、必要条件或充要条件转化为集合之间的关系，然后根据集合之间关系列出关于参数的不等式(组)求解.

(2)求解参数的取值范围时，一定要注意区间端点值的检验.

5、C

【解析】

先根据直线 $x - ay + 1 = 0$ 与直线 $x + a^2y - 1 = 0$ 平行确定 a 的值，进而即可确定结果.

【详解】

因为直线 $x - ay + 1 = 0$ 与直线 $x + a^2y - 1 = 0$ 平行，

所以 $a^2 + a = 0$ ，解得 $a = 0$ 或 $a = -1$ ；即 q ： $a = 0$ 或 $a = -1$ ；

所以由 p 能推出 q ； q 不能推出 p ；

即 p 是 q 的充分不必要条件.

故选 C

【点睛】

本题主要考查充分条件和必要条件的判定，熟记概念即可，属于基础题型.

6、A

【解析】

对复数 z 进行化简，由于 z 为纯虚数，则化简后的复数形式中，实部为 0，得到 a 的值，从而得到复数 z .

【详解】

$$z = \frac{(2+ai)i}{1-i} = \frac{-a+2i}{1+i} = \frac{(-a+2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2-a}{2} + \frac{a+2}{2}i$$

因为 z 为纯虚数，所以 $\frac{2-a}{2} = 0$ ，得 $a = 2$

所以 $z = 2i$.

故选 A 项

【点睛】

本题考查复数的四则运算，纯虚数的概念，属于简单题.

7、C

【解析】

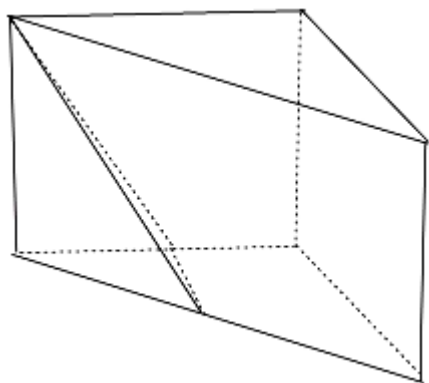
首先把三视图转换为几何体，该几何体为由一个三棱柱体，切去一个三棱锥体，由柱体、椎体的体积公式进一步求出几何体的体积.

【详解】

解：根据几何体的三视图转换为几何体为：

该几何体为由一个三棱柱体，切去一个三棱锥体，

如图所示：



$$\text{故：} V = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times 2 - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times 2 = \frac{11}{3}.$$

故选：C.

【点睛】

本题考查了由三视图求几何体的体积、需熟记柱体、锥体的体积公式，考查了空间想象能力，属于基础题.

8、A

【解析】

分析：设 $f(m) = g(n) = t$ ，则 $t > 0$ ，把 m, n 用 t 表示，然后令 $h(t) = m - n$ ，由导数求得 $h(t)$ 的最小值.

详解：设 $f(m) = g(n) = t$ ，则 $t > 0$ ， $m = e^{t-1}$ ， $n = \ln \frac{t}{2} + \frac{1}{2} = \ln t - \ln 2 + \frac{1}{2}$ ，

$$\therefore m - n = e^{t-1} - \ln t + \ln 2 - \frac{1}{2}, \text{ 令 } h(t) = e^{t-1} - \ln t + \ln 2 - \frac{1}{2},$$

则 $h'(t) = e^{t-1} - \frac{1}{t}$ ， $h''(t) = e^{t-1} + \frac{1}{t^2} > 0$ ， $\therefore h'(t)$ 是 $(0, +\infty)$ 上的增函数，

又 $h'(1) = 0$ ， $\therefore$ 当 $t \in (0, 1)$ 时， $h'(t) < 0$ ，当 $t \in (1, +\infty)$ 时， $h'(t) > 0$ ，

即 $h(t)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减，在 $(1, +\infty)$ 上单调递增， $h(1)$ 是极小值也是最小值，

$$h(1) = \frac{1}{2} + \ln 2, \therefore m - n \text{ 的最小值是 } \frac{1}{2} + \ln 2.$$

故选 A.

点睛：本题易错选 B，利用导数法求函数的最值，解题时学生可能不会将其中求 $b - a$ 的最小值问题，通过构造新函数，转化为求函数 $h(t)$ 的最小值问题，另外通过二次求导，确定函数的单调区间也很容易出错.

9、C

【解析】

首先判断出 $f(x)$ 是周期为 6 的周期函数，由此求得所求表达式的值.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/368034051040006117>