

D. ①②④

6. 已知集合 $M = \{x | x = 3^n, n \in \mathbb{N}^*\}$, $N = \{x | x = 2n, n \in \mathbb{N}^*\}$, 将集合 $M \cup N$ 的所有元素从小到大一次排列构成一个新数列 $\{c_n\}$, 则 $c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_{35} =$ ()

- A. 1194 B. 1695 C. 311 D. 1095

7. 已知 $\triangle ABC$ 中, $|\overrightarrow{BC}| = 2, \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -2$. 点 P 为 BC 边上的动点, 则 $\overrightarrow{PC} \cdot (\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC})$ 的最小值为 ()

- A. 2 B. $-\frac{3}{4}$ C. -2 D. $-\frac{25}{12}$

8. 已知直线 $y = k(x+1) (k > 0)$ 与抛物线 $C: y^2 = 4x$ 相交于 A, B 两点, F 为 C 的焦点, 若 $|FA| = 2|FB|$, 则 $|FA| =$ ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

9. 已知定义在 $\mathbb{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2) = f(-x)$, 且在区间 $[1, 2]$ 上是减函数, 令

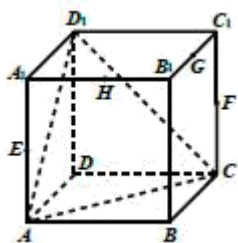
$a = \ln 2, b = \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}, c = \log_{\frac{1}{2}} 2$, 则 $f(a), f(b), f(c)$ 的大小关系为 ()

- A. $f(a) < f(b) < f(c)$ B. $f(a) < f(c) < f(b)$
C. $f(b) < f(a) < f(c)$ D. $f(c) < f(a) < f(b)$

10. 已知函数 $f(x) = e^{x-1} + x - 2$ 的零点为 m , 若存在实数 n 使 $x^2 - ax - a + 3 = 0$ 且 $|m - n| \leq 1$, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $[2, 4]$ B. $\left[2, \frac{7}{3}\right]$ C. $\left[\frac{7}{3}, 3\right]$ D. $[2, 3]$

11. 如图, 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F, G, H 分别为棱 $AA_1, CC_1, B_1C_1, A_1B_1$ 的中点, 则下列各直线中, 不与平面 ACD_1 平行的是 ()



- A. 直线 EF B. 直线 GH C. 直线 EH D. 直线 A_1B

12. 过抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点 F 的直线交该抛物线于 A, B 两点, O 为坐标原点. 若 $|AF| = 3$, 则直线 AB 的斜率为 ()

- A. $\pm\sqrt{2}$ B. $-\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{2}$ D. $\pm 2\sqrt{2}$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 能说明“在数列 $\{a_n\}$ 中, 若对于任意的 $m, n \in \mathbb{N}^+$, $a_{m+n} > a_m + a_n$, 则 $\{a_n\}$ 为递增数列”为假命题的一个等差数列是_____. (写出数列的通项公式)

14. 函数 $f(x) = \sqrt{\log_{0.5}(4x-3)}$ 的定义域是_____.

15. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = 3a_n$, 且 $a_2 + a_4 + a_6 = 9$, 则 $\log_{\frac{1}{3}}(a_5 + a_7 + a_9) =$ _____.

16. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $2S_n = 3(a_n + 1)$, 若 $a_{10} = ka_8$, 则 $k =$ _____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (12 分) 在直角坐标系 xOy 中, 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = 3 + t \cos \alpha \\ y = 2 + t \sin \alpha \end{cases}$ (t 为参数). 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 圆 C 的极坐标方程为 $\rho = 2 \cos \theta$.

(1) 求直线 l 和圆 C 的普通方程;

(2) 已知直线 l 上一点 $M(3, 2)$, 若直线 l 与圆 C 交于不同两点 A, B , 求 $\frac{1}{|MA|} + \frac{1}{|MB|}$ 的取值范围.

18. (12 分) 在极坐标系中, 已知曲线 C 的方程为 $\rho = r$ ($r > 0$), 直线 l 的方程为 $\rho \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$. 设直线 l 与曲线 C 相交于 A, B 两点, 且 $AB = 2\sqrt{7}$, 求 r 的值.

19. (12 分) 已知数列 $\{a_n\}$, 其前 n 项和为 S_n , 满足 $a_1 = 2$, $S_n = \lambda n a_n + \mu a_{n-1}$, 其中 $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(1) 若 $\lambda = 0$, $\mu = 4$, $b_n = a_{n+1} - 2a_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), 求证: 数列 $\{b_n\}$ 是等比数列;

(2) 若数列 $\{a_n\}$ 是等比数列, 求 λ, μ 的值;

(3) 若 $a_2 = 3$, 且 $\lambda + \mu = \frac{3}{2}$, 求证: 数列 $\{a_n\}$ 是等差数列.

20. (12 分) $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{a^2}{4 \sin A}$.

(1) 求 $\sin B \sin C$;

(2) 若 $10 \cos B \cos C = -1$, $a = \sqrt{2}$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

21. (12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 3n^2 + 8n$, $\{b_n\}$ 是等差数列, 且 $a_n = b_n + b_{n+1}$.

(I) 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(II) 令 $c_n = \frac{(a_n + 1)^{n+1}}{(b_n + 2)^n}$. 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

22. (10 分) 已知函数 $f(x) = |x - m| - |x + 2m|$ 的最大值为 3, 其中 $m > 0$.

(1) 求实数 m 的值;

(2) 若 $a, b \in \mathbb{R}, ab > 0, a^2 + b^2 = m$ 求证: $\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{a} \geq 1$.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1、C

【解析】

根据直线和平面平行的性质, 结合充分条件和必要条件的定义进行判断即可。

【详解】

Q 点 P 不在直线 l 、 m 上,

$\therefore$ 若直线 l 、 m 互相平行, 则过点 P 可以作无数个平面, 使得直线 l 、 m 都与这些平面平行, 即必要性成立,

若过点 P 可以作无数个平面, 使得直线 l 、 m 都与这些平面平行, 则直线 l 、 m 互相平行成立, 反证法证明如下:

若直线 l 、 m 互相不平行, 则 l 、 m 异面或相交, 则过点 P 只能作一个平面同时和两条直线平行, 则与条件矛盾, 即充分性成立

则“过点 P 可以作无数个平面, 使得直线 l 、 m 都与这些平面平行”是“直线 l 、 m 互相平行”的充要条件,

故选: C.

【点睛】

本题主要考查充分条件和必要条件的判断, 结合空间直线和平面平行的性质是解决本题的关键。

2、C

【解析】

求出 $A \cap B$ 的元素, 再确定其真子集个数。

【详解】

$$\text{由 } \begin{cases} y = x^2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2\sqrt{5}-2}}{2} \\ y = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = -\frac{\sqrt{2\sqrt{5}-2}}{2} \\ y = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \end{cases}, \therefore A \cap B \text{ 中有两个元素, 因此它的真子集有 3 个.}$$

故选: C.

【点睛】

本题考查集合的子集个数问题, 解题时可先确定交集中集合的元素个数, 解题关键是对集合元素的认识, 本题中集合 A, B 都是曲线上的点集.

3、B

【解析】

由已知可求得函数的周期, 根据周期及偶函数的对称性可求 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上的单调性, 结合三角函数的性质即可比较.

【详解】

$$\text{由 } f(x+1) = -\frac{1}{f(x)} \text{ 可得 } f(x+2) = f[(x+1)+1] = -\frac{1}{f(x+1)} = f(x), \text{ 即函数的周期 } T = 2,$$

因为在区间 $(2017, 2018)$ 上单调递减, 故函数在区间 $(-1, 0)$ 上单调递减,

根据偶函数的对称性可知, $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增,

因为 α, β 是锐角三角形的两个内角,

$$\text{所以 } \alpha, \beta \in (0, \frac{1}{2}\pi) \text{ 且 } \alpha + \beta > \frac{1}{2}\pi \text{ 即 } \alpha > \frac{1}{2}\pi - \beta,$$

$$\text{所以 } \cos \alpha < \cos(\frac{1}{2}\pi - \beta) \text{ 即 } 0 < \cos \alpha < \sin \beta < 1,$$

$$f(\cos \alpha) < f(\sin \beta).$$

故选: B.

【点睛】

本题主要考查函数值的大小比较, 根据函数奇偶性和单调性之间的关系是解决本题的关键.

4、A

【解析】

首先根据等比数列分别求出满足 $a_1 + a_3 < 2a_2$, $S_{2n-1} < 0$ 的基本量, 根据基本量的范围即可确定答案.

【详解】

$\{a_n\}$ 为等比数列,

若 $a_1 + a_3 < 2a_2$ 成立, 有 $a_1(q^2 - 2q + 1) < 0$,

因为 $q^2 - 2q + 1 \geq 0$ 恒成立,

故可以推出 $a_1 < 0$ 且 $q \neq 1$,

若 $S_{2n-1} < 0$ 成立,

当 $q = 1$ 时, 有 $a_1 < 0$,

当 $q \neq 1$ 时, 有 $\frac{a_1(1-q^{2n-1})}{1-q} < 0$, 因为 $\frac{1-q^{2n-1}}{1-q} > 0$ 恒成立, 所以有 $a_1 < 0$,

故可以推出 $a_1 < 0$, $q \in \mathbf{R}$,

所以“ $a_1 + a_3 < 2a_2$ ”是“ $S_{2n-1} < 0$ ”的充分不必要条件.

故选: A.

【点睛】

本题主要考查了等比数列基本量的求解, 充分必要条件的集合关系, 属于基础题.

5、D

【解析】

①通过证明 $AC \perp$ 平面 OBD , 证得 $AC \perp BD$; ②通过证明 $MN \parallel BD$, 证得 $MN \parallel$ 平面 ABD ; ③求得三棱锥 $A-CMN$ 体积的最大值, 由此判断③的正确性; ④利用反证法证得 AD 与 BC 一定不垂直.

【详解】

设 AC 的中点为 O , 连接 OB, OD , 则 $AC \perp OB$, $AC \perp OD$, 又 $OB \cap OD = O$, 所以 $AC \perp$ 平面 OBD , 所以

$AC \perp BD$, 故①正确 因为 $MN \parallel BD$, 所以 $MN \parallel$ 平面 ABD , 故②正确 当平面 DAC 与平面 ABC 垂直时, V_{A-CMN}

最大, 最大值为 $V_{A-CMN} = V_{N-ACM} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{48}$, 故③错误 若 AD 与 BC 垂直, 又因为 $AB \perp BC$, 所以 $BC \perp$

平面 ABD , 所以 $BC \perp BD$, 又 $BD \perp AC$, 所以 $BD \perp$ 平面 ABC , 所以 $BD \perp OB$, 因为 $OB = OD$, 所以显然 BD 与 OB 不可能垂直, 故④正确.

故选: D



6、D

【解析】

【详解】

故选：D.

【点睛】

7、D

【解析】

【详解】

以 BC 的中点为坐标原点，建立如图的直角坐标系，

可得 $B(-1,0), C(1,0)$, 设 $P(a,0), A(x,y)$,

$$\text{由 } \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -2,$$

$$\text{可得 } (x+1, y) \cdot (2, 0) = 2x+2 = -2, \text{ 即 } x = -2, y \neq 0,$$

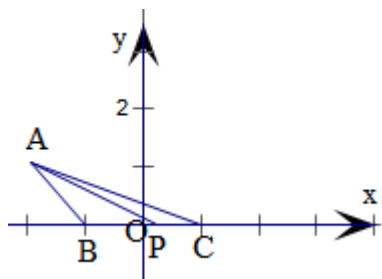
$$\text{则 } \overrightarrow{PC} \cdot (\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}) = (1-a, 0) \cdot (x-a-1-a+1-a, y+0+0)$$

$$= (1-a)(x-3a) = (1-a)(-2-3a) = 3a^2 - a - 2$$

$$= 3\left(a - \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{25}{12},$$

$$\text{当 } a = \frac{1}{6} \text{ 时, } \overrightarrow{PC} \cdot (\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}) \text{ 的最小值为 } -\frac{25}{12}.$$

故选 D.



【点睛】

本题考查向量数量积的坐标表示，考查转化思想和二次函数的值域解法，考查运算能力，属于中档题.

8、C

【解析】

方法一：设 $P(-1,0)$ ，利用抛物线的定义判断出 B 是 AP 的中点，结合等腰三角形的性质求得 B 点的横坐标，根据抛物线的定义求得 $|FB|$ ，进而求得 $|FA|$ 。

方法二：设出 A, B 两点的横坐标 x_A, x_B ，由抛物线的定义，结合 $|FA| = 2|FB|$ 求得 x_A, x_B 的关系式，联立直线 $y = k(x+1)$ 的方程和抛物线方程，写出韦达定理，由此求得 x_A ，进而求得 $|FA|$ 。

【详解】

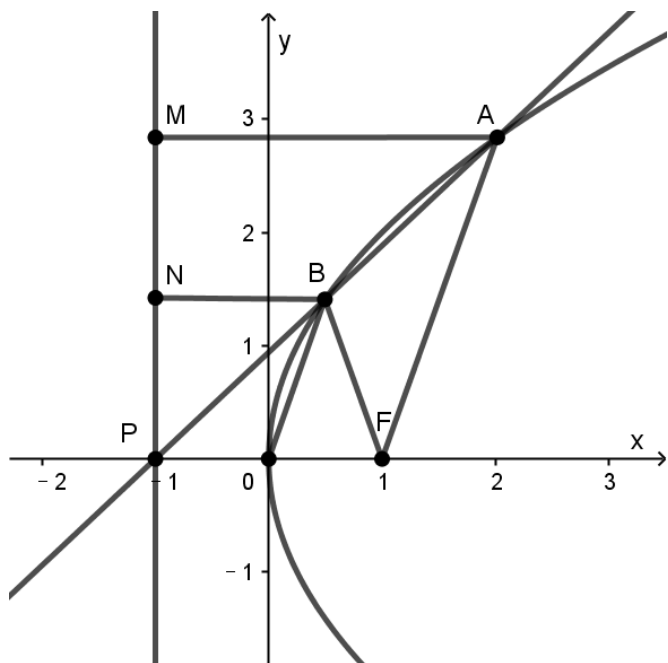
方法一：由题意得抛物线 $y^2 = 4x$ 的准线方程为 $l: x = -1$ ，直线 $y = k(x+1)$ 恒过定点 $P(-1,0)$ ，过 A, B 分别作

$AM \perp l$ 于 M ， $BN \perp l$ 于 N ，连接 OB ，由 $|FA| = 2|FB|$ ，则 $|AM| = 2|BN|$ ，所以点 B 为 AP 的中点，又点 O 是 PF 的中点，

则 $|OB| = \frac{1}{2}|AF|$ ，所以 $|OB| = |BF|$ ，又 $|OF| = 1$

所以由等腰三角形三线合一得点 B 的横坐标为 $\frac{1}{2}$ ，

所以 $|FB| = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ ，所以 $|FA| = 2|FB| = 3$ 。



方法二：抛物线 $y^2 = 4x$ 的准线方程为 $l: x = -1$ ，直线 $y = k(x+1)$

由题意设 A, B 两点横坐标分别为 x_A, x_B ($x_A, x_B > 0$)，

则由抛物线定义得 $|FA| = x_A + 1, |FB| = x_B + 1$

$$\text{又 } |FA| = 2|FB|, \therefore x_A + 1 = 2(x_B + 1) \Rightarrow x_A = 2x_B + 1 \quad \text{①}$$

$$\begin{cases} y^2 = 4x \\ y = k(x+1) \end{cases} \Rightarrow k^2 x^2 + (2k^2 - 4)x + k^2 = 0 \Rightarrow x_A \cdot x_B = 1 \quad \text{②}$$

由①②得 $x_A^2 - x_A - 2 = 0$ ， $\therefore x_A = 2, |FA| = x_A + 1 = 3$ 。

故选：C

【点睛】

本小题主要考查抛物线的定义，考查直线和抛物线的位置关系，属于中档题。

9、C

【解析】

可设 $x \in [0, 1]$ ，根据 $f(x)$ 在 R 上为偶函数及 $f(x+2) = f(-x)$ 便可得到： $f(x) = f(-x) = f(-x+2)$ ，可设 x_1 ，

$x_2 \in [0, 1]$, 且 $x_1 < x_2$, 根据 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上是减函数便可得出 $f(x_1) < f(x_2)$, 从而得出 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递增, 再根据对数的运算得到 a 、 b 、 c 的大小关系, 从而得到 $f(a)$ 、 $f(b)$ 、 $f(c)$ 的大小关系.

【详解】

解: 因为 $\ln 1 < \ln 2 < \ln e$, 即 $0 < a < 1$, 又 $b = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = 2$, $c = \log_{\frac{1}{2}} 2 = -1$

设 $x \in [0, 1]$, 根据条件, $f(x) = f(-x) = f(-x+2)$, $-x+2 \in [1, 2]$;

若 $x_1, x_2 \in [0, 1]$, 且 $x_1 < x_2$, 则: $-x_1+2 > -x_2+2$;

∵ $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上是减函数;

∴ $f(-x_1+2) < f(-x_2+2)$;

∴ $f(x_1) < f(x_2)$;

∴ $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上是增函数;

所以 $f(b) = f(2) = f(0)$, $f(c) = f(-1) = f(1)$

∴ $f(b) < f(a) < f(c)$

故选: C

【点睛】

考查偶函数的定义, 减函数及增函数的定义, 根据单调性定义判断一个函数单调性的方法和过程: 设 $x_1 < x_2$, 通过条件比较 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$, 函数的单调性的应用, 属于中档题.

10、D

【解析】

易知 $f(x)$ 单调递增, 由 $f(1) = 0$ 可得唯一零点 $m = 1$, 通过已知可求得 $0 \leq n \leq 2$, 则问题转化为使方程

$x^2 - ax - a + 3 = 0$ 在区间 $[0, 2]$ 上有解, 化简可得 $a = x + 1 + \frac{4}{x+1} - 2$, 借助对号函数即可解得实数 a 的取值范围.

【详解】

易知函数 $f(x) = e^{x-1} + x - 2$ 单调递增且有惟一的零点为 $m = 1$, 所以 $|1-n| \leq 1$, $\therefore 0 \leq n \leq 2$, 问题转化为: 使方程

$x^2 - ax - a + 3 = 0$ 在区间 $[0, 2]$ 上有解, 即 $a = \frac{x^2+3}{x+1} = \frac{(x+1)^2 - 2(x+1) + 4}{x+1} = x + 1 + \frac{4}{x+1} - 2$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/368040141111006113>