

新乡市重点中学 2023-2024 学年数学高三上期末达标检测模拟试题

考生请注意：

1. 答题前请将考场、试室号、座位号、考生号、姓名写在试卷密封线内，不得在试卷上作任何标记。
2. 第一部分选择题每小题选出答案后，需将答案写在试卷指定的括号内，第二部分非选择题答案写在试卷题目指定的位置上。
3. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

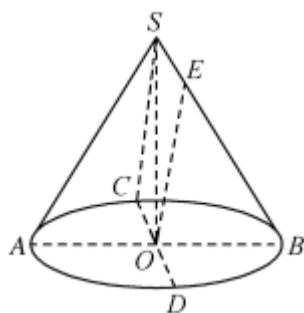
1. 已知向量 $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$, 若 $(\vec{a} + \vec{b}) \perp (\vec{a} - \vec{b})$, 则实数 m 的值为 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\pm \frac{1}{2}$ D. $\pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

2. 设 $A(2, -1)$, $B(4, 1)$, 则以线段 AB 为直径的圆的方程是 ()

- A. $(x-3)^2 + y^2 = 2$ B. $(x-3)^2 + y^2 = 8$
C. $(x+3)^2 + y^2 = 2$ D. $(x+3)^2 + y^2 = 8$

3. 如图，在圆锥 SO 中， AB , CD 为底面圆的两条直径， $AB \cap CD = O$, 且 $AB \perp CD$, $SO = OB = 3$, $SE = \frac{1}{4}SB$, 异面直线 SC 与 OE 所成角的正切值为 ()



- A. $\frac{\sqrt{22}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{3}$ C. $\frac{13}{16}$ D. $\frac{\sqrt{11}}{3}$

4. 已知集合 $A = \{(x, y) | y = x^2\}$, $B = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$, 则 $A \cap B$ 的真子集个数为 ()

- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

5. 已知我市某居民小区户主人数和户主对户型结构的满意率分别如图和如图所示，为了解该小区户主对户型结构的满意程度，用分层抽样的方法抽取 30% 的户主进行调查，则样本容量和抽取的户主对四居室满意的人数分别为

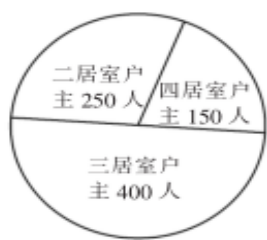


图 1

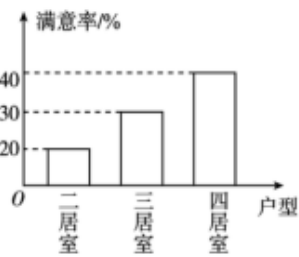


图 2

A. 240, 18

B. 200, 20

C. 240, 20

D. 200, 18

6. 若双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的离心率 $e = \frac{\sqrt{7}}{2}$, 则该双曲线的焦点到其渐近线的距离为 ()

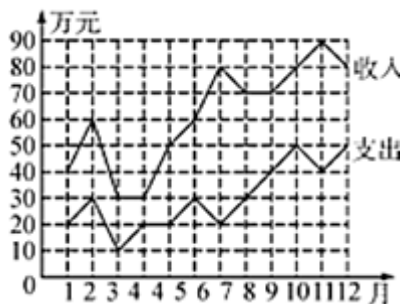
A. $2\sqrt{3}$

B. 2

C. $\sqrt{3}$

D. 1

7. 某网店 2019 年全年的月收支数据如图所示, 则针对 2019 年这一年的收支情况, 下列说法中错误的是 ()



A. 月收入的极差为 60

B. 7 月份的利润最大

C. 这 12 个月利润的中位数与众数均为 30

D. 这一年的总利润超过 400 万元

8. 要得到函数 $f(x) = \sin(3x + \frac{\pi}{3})$ 的导函数 $f'(x)$ 的图像, 只需将 $f(x)$ 的图像 ()

A. 向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 再把各点的纵坐标伸长到原来的 3 倍

B. 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 再把各点的纵坐标缩短到原来的 $\frac{1}{3}$ 倍

C. 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 再把各点的纵坐标缩短到原来的 $\frac{1}{3}$ 倍

D. 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 再把各点的纵坐标伸长到原来的 3 倍

9. 已知 $\sin \alpha - 2 \cos \alpha = 1$, $\alpha \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$, 则 $\frac{1 - \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan \frac{\alpha}{2}} = ()$

A. $-\frac{1}{2}$

B. -2

C. $\frac{1}{2}$

D. 2

10. 点 $P(x, y)$ 为不等式组 $\begin{cases} x+y \leq 4 \\ y \leq x \\ y \geq 0 \end{cases}$ 所表示的平面区域上的动点, 则 $\frac{y+2}{x-2}$ 的取值范围是 ()

A. $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$ B. $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ C. $(-2, 1)$ D. $[-2, 1]$

11. 已知三棱锥 $P-ABC$, $AC = \sqrt{2}$, $BC = 1$, $AC \perp BC$ 且 $PA = 2PB$, $PB \perp$ 平面 ABC , 其外接球体积为 ()

A. $\frac{4\pi}{3}$ B. 4π C. $\frac{32\pi}{3}$ D. $4\sqrt{3}\pi$

12. 盒中有 6 个小球, 其中 4 个白球, 2 个黑球, 从中任取 $i (i=1, 2)$ 个球, 在取出的球中, 黑球放回, 白球则涂黑后放回, 此时盒中黑球的个数 $X_i (i=1, 2)$, 则 ()

A. $P(X_1=3) > P(X_2=3)$, $EX_1 > EX_2$ B. $P(X_1=3) < P(X_2=3)$, $EX_1 > EX_2$

C. $P(X_1=3) > P(X_2=3)$, $EX_1 < EX_2$ D. $P(X_1=3) < P(X_2=3)$, $EX_1 < EX_2$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 函数 $f(x) = \sqrt{x}(\sqrt{x}-4) + x - 1$ 的值域为_____.

14. 已知二面角 $\alpha-l-\beta$ 为 60° , 在其内部取点 A , 在半平面 α, β 内分别取点 B, C . 若点 A 到棱 l 的距离为 1, 则 $\triangle ABC$ 的周长的最小值为_____.

15. 点 P 在双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右支上, 其左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 直线 PF_1 与以坐标原点 O 为圆心、 a 为半径的圆相切于点 A , 线段 PF_1 的垂直平分线恰好过点 F_2 , 则该双曲线的渐近线的斜率为_____.

16. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足公比 $q \neq 1$, S_n 为其前 n 项和, S_2, S_4, S_6 构成等差数列, 则 $S_{2020} =$ _____.

三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知 F 是抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点, 点 P 在 x 轴上, O 为坐标原点, 且满足 $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OF}$, 经过点 P 且垂直于 x 轴的直线与抛物线 C 交于 A, B 两点, 且 $|AB| = 8$.

(1) 求抛物线 C 的方程;

(2) 直线 l 与抛物线 C 交于 M, N 两点, 若 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = -64$, 求点 F 到直线 l 的最大距离.

18. (12 分) 已知函数 $f(x) = \ln x - xe^x + ax (a \in \mathbb{R})$.

(1) 若函数 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递减, 求实数 a 的取值范围;

(2) 若 $a = 1$, 求 $f(x)$ 的最大值.

19. (12 分) 在最新公布的湖南新高考方案中, “3+1+2

”模式要求学生在语数外 3 门全国统考科目之外，在历史和物理 2 门科目中必选且只选 1 门，再从化学、生物、地理、政治 4 门科目中任选 2 门，后三科的高考成绩按新的规则转换后计入高考总分.相应地，高校在招生时可对特定专业设置具体的选修科目要求.双超中学高一年级有学生 1200 人，现从中随机抽取 40 人进行选科情况调查，用数字 1~6 分别依次代表历史、物理、化学、生物、地理、政治 6 科，得到如下的统计表：

序号	选科情况	序号	选科情况	序号	选科情况	序号	选科情况
1	134	11	236	21	156	31	235
2	235	12	234	22	235	32	236
3	235	13	145	23	245	33	235
4	145	14	135	24	235	34	135
5	156	15	236	25	256	35	156
6	245	16	236	26	156	36	236
7	256	17	156	27	134	37	156
8	235	18	236	28	235	38	134
9	235	19	145	29	246	39	235
10	236	20	235	30	156	40	245

- （1）双超中学规定：每个选修班最多编排 50 人且尽量满额编班，每位老师执教 2 个选修班（当且仅当一门科目的选课班级总数为奇数时，允许这门科目的 1 位老师只教 1 个班）.已知双超中学高一年级现有化学、生物科目教师每科各 8 人，用样本估计总体，则化学、生物两科的教师人数是否需要调整？如果需要调整，各需增加或减少多少人？
- （2）请创建列联表，运用独立性检验的知识进行分析，探究是否有 99% 的把握判断学生“选择化学科目”与“选择物理科目”有关.

附： $K^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a + b)(c + d)(a + c)(b + d)}$

$P(K^2 \geq k)$	0.100	0.050	0.010	0.001
k	2.706	3.841	6.635	10.828

- （3）某高校 A 在其热门人文专业 B 的招生简章中明确要求，仅允许选修了历史科目，且在政治和地理 2 门中至少选修了 1 门的考生报名.现从双超中学高一新生中随机抽取 3 人，设具备 A 高校 B 专业报名资格的人数为 X

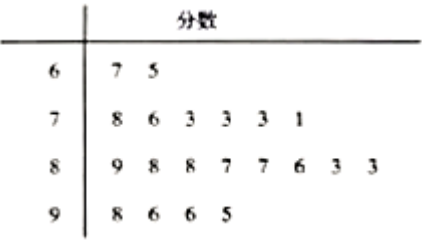
，用样本的频率估计概率，求 X 的分布列与期望.

20. (12 分) 已知 $\{a_n\}$ 是递增的等比数列, $a_1=1$, 且 $2a_2$ 、 $\frac{3}{2}a_3$ 、 a_4 成等差数列.

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 设 $b_n=\frac{1}{\log_2 a_{n+1} \cdot \log_2 a_{n+3}}$, $n \in \mathbf{N}^*$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

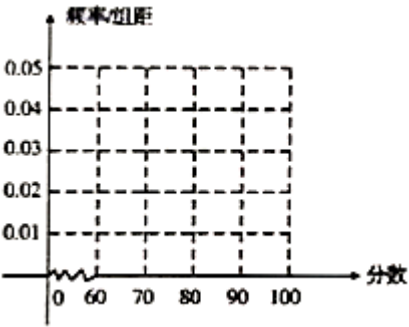
21. (12 分) 某大型单位举行了一次全体员工都参加的考试, 从中随机抽取了 20 人的分数. 以下茎叶图记录了他们的考试分数 (以十位数字为茎, 个位数字为叶):



若分数不低于 95 分, 则称该员工的成绩为“优秀”.

- (1) 从这 20 人中任取 3 人, 求恰有 1 人成绩“优秀”的概率;
- (2) 根据这 20 人的分数补全下方的频率分布表和频率分布直方图, 并根据频率分布直方图解决下面的问题.

组别	分组	频数	频率	$\frac{\text{频率}}{\text{组距}}$
1	$[60,70)$			
2	$[70,80)$			
3	$[80,90)$			
4	$[90,100]$			



- ①估计所有员工的平均分数 (同一组中的数据用该组区间的中点值作代表);
- ②若从所有员工中任选 3 人, 记 X 表示抽到的员工成绩为“优秀”的人数, 求 X 的分布列和数学期望.

22. (10 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: 对任意 $u, v \in \mathbf{N}^*$, 都有 $a_{uv} = a_u + a_v + 2$.

(1) 若 $a_2 + a_3 + a_6 + a_9 = 2$, 求 a_{18} 的值;

(2) 若 $\{a_n\}$ 是等比数列, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(3) 设 $k \in \mathbf{N}^*$, $k \geq 3$, 求证: 若 $a_{k+1}, a_{k+2}, a_{k+3}, \dots$ 成等差数列, 则 $a_1, a_2, \dots, a_k$ 也成等差数列.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、D

【解析】

由两向量垂直可得 $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0$, 整理后可知 $|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 0$, 将已知条件代入后即可求出实数 m 的值.

【详解】

解: $\because (\vec{a} + \vec{b}) \perp (\vec{a} - \vec{b}), \therefore (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0$, 即 $|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 0$,

将 $|\vec{a}| = 1$ 和 $|\vec{b}|^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + m^2$ 代入, 得出 $m^2 = \frac{3}{4}$, 所以 $m = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$.

故选:D.

【点睛】

本题考查了向量的数量积, 考查了向量的坐标运算. 对于向量问题, 若已知垂直, 通常可得到两个向量的数量积为 0, 继而结合条件进行化简、整理.

2、A

【解析】

计算 AB 的中点坐标为 $(3, 0)$, 圆半径为 $r = \sqrt{2}$, 得到圆方程.

【详解】

AB 的中点坐标为: $(3, 0)$, 圆半径为 $r = \frac{|AB|}{2} = \frac{\sqrt{2^2 + 2^2}}{2} = \sqrt{2}$,

圆方程为 $(x-3)^2 + y^2 = 2$.

【解析】

求出 $A \cap B$ 的元素，再确定其真子集个数.

【详解】

$$\text{由 } \begin{cases} y = x^2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2\sqrt{5}-2}}{2} \\ y = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = -\frac{\sqrt{2\sqrt{5}-2}}{2} \\ y = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \end{cases}, \therefore A \cap B \text{ 中有两个元素, 因此它的真子集有 3 个.}$$

故选: C.

【点睛】

本题考查集合的子集个数问题, 解题时可先确定交集中集合的元素个数, 解题关键是对集合元素的认识, 本题中集合 A, B 都是曲线上的点集.

5、A

【解析】

利用统计图结合分层抽样性质能求出样本容量, 利用条形图能求出抽取的户主对四居室满意的人数.

【详解】

样本容量为: $(150+250+400) \times 30\% = 240$,

$\therefore$ 抽取的户主对四居室满意的人数为: $240 \times \frac{150}{150+250+400} \times 40\% = 18$.

故选 A.

【点睛】

本题考查样本容量和抽取的户主对四居室满意的人数的求法, 是基础题, 解题时要认真审题, 注意统计图的性质的合理运用.

6、C

【解析】

根据双曲线的解析式及离心率, 可求得 a, b, c 的值; 得渐近线方程后, 由点到直线距离公式即可求解.

【详解】

双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的离心率 $e = \frac{\sqrt{7}}{2}$,

则 $a = 2$, $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{2}$, 解得 $c = \sqrt{7}$, 所以焦点坐标为 $(\pm\sqrt{7}, 0)$,

所以 $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{7 - 4} = \sqrt{3}$,

则双曲线渐近线方程为 $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}x$ ，即 $\sqrt{3}x \pm 2y = 0$ ，

不妨取右焦点，则由点到直线距离公式可得 $d = \frac{|\sqrt{3} \times \sqrt{7}|}{\sqrt{3+4}} = \sqrt{3}$ ，

故选：C.

【点睛】

本题考查了双曲线的几何性质及简单应用，渐近线方程的求法，点到直线距离公式的简单应用，属于基础题.

7、D

【解析】

直接根据折线图依次判断每个选项得到答案.

【详解】

由图可知月收入的极差为 $90 - 30 = 60$ ，故选项 A 正确；

1 至 12 月份的利润分别为 20，30，20，10，30，30，60，40，30，30，50，30，7 月份的利润最高，故选项 B 正确；

易求得总利润为 380 万元，众数为 30，中位数为 30，故选项 C 正确，选项 D 错误.

故选：D.

【点睛】

本题考查了折线图，意在考查学生的理解能力和应用能力.

8、D

【解析】

先求得 $f'(x)$ ，再根据三角函数图像变换的知识，选出正确选项.

【详解】

依题意 $f'(x) = 3 \cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = 3 \cos\left[\left(3x + \frac{5\pi}{6}\right) - \frac{\pi}{2}\right] = 3 \sin\left(3x + \frac{5\pi}{6}\right) = 3 \sin\left[3\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{3}\right]$ ，所以由

$f(x) = \sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$ 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，再把各点的纵坐标伸长到原来的 3 倍得到 $f'(x)$ 的图像.

故选：D

【点睛】

本小题主要考查复合函数导数的计算，考查诱导公式，考查三角函数图像变换，属于基础题.

9、B

【解析】

结合 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ 求得 $\sin \alpha, \cos \alpha$ 的值，由此化简所求表达式，求得表达式的值.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/368073045007006051>