

吉林省通化市靖宇中学 2024 届高三第三次测评数学试卷

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 曲线 $x^2 = 4y$ 在点 $(2, t)$ 处的切线方程为 ()

- A. $y = x - 1$ B. $y = 2x - 3$ C. $y = -x + 3$ D. $y = -2x + 5$

2. 设 O 为坐标原点， P 是以 F 为焦点的抛物线 $y^2 = 4x$ 上任意一点， M 是线段 PF 上的点，且 $PM = MF$ ，则直线 OM 的斜率的最大值为 ()

- A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

3. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ ，点 $P(x_0, y_0)$ 是直线 $bx - ay + 4a = 0$ 上任意一点，若圆

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 1$ 与双曲线 C 的右支没有公共点，则双曲线的离心率取值范围是 ()。

- A. $(1, 2]$ B. $(1, 4]$ C. $[2, +\infty)$ D. $[4, +\infty)$

4. 抛物线 $x^2 = 3ay$ 的准线方程是 $y = 1$ ，则实数 $a =$ ()

- A. $-\frac{3}{4}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $-\frac{4}{3}$ D. $\frac{4}{3}$

5. 大衍数列，米源于我国古代文献《乾坤谱》中对易传“大衍之数五十”的推论，主要用于解释我国传统文化中的太极衍生原理，数列中的每一项，都代表太极衍生过程中，曾经经历过的两仪数量总和。已知该数列前 10 项是 0, 2, 4, 8, 12, 18, 24, 32, 40, 50, ...，则大衍数列中奇数项的通项公式为 ()

- A. $\frac{n^2 - n}{2}$ B. $\frac{n^2 - 1}{2}$ C. $\frac{(n-1)^2}{2}$ D. $\frac{n^2}{2}$

6. 已知曲线 $x^2 = 4y$ ，动点 P 在直线 $y = -3$ 上，过点 P 作曲线的两条切线 l_1, l_2 ，切点分别为 A, B ，则直线 AB 截圆 $x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0$ 所得弦长为 ()

- A. $\sqrt{3}$ B. 2 C. 4 D. $2\sqrt{3}$

7. 已知函数 $f(x) = \cos x$ 与 $g(x) = \sin(2x + \varphi)$ ($0, \varphi < \pi$) 的图象有一个横坐标为 $\frac{\pi}{3}$ 的交点, 若函数 $g(x)$ 的图象的纵坐标不变, 横坐标变为原来的 $\frac{1}{\omega}$ 倍后, 得到的函数在 $[0, 2\pi]$ 有且仅有 5 个零点, 则 ω 的取值范围是()

- A. $\left[\frac{29}{24}, \frac{35}{24}\right)$ B. $\left[\frac{29}{24}, \frac{35}{24}\right]$
C. $\left(\frac{29}{24}, \frac{35}{24}\right)$ D. $\left(\frac{29}{24}, \frac{35}{24}\right]$

8. 已知 $f(x)$ 为定义在 R 上的奇函数, 若当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = 2^x + x + m$ (m 为实数), 则关于 x 的不等式 $-2 < f(x-1) < 2$ 的解集是()

- A. $(0, 2)$ B. $(-2, 2)$ C. $(-1, 1)$ D. $(1, 3)$

9. 正项等比数列 $\{a_n\}$ 中的 a_1 、 a_{4039} 是函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 6x - 3$ 的极值点, 则 $\log_{\sqrt{6}} a_{2020} =$ ()

- A. -1 B. 1 C. $\sqrt{2}$ D. 2

10. 如图是甲、乙两位同学在六次数学小测试 (满分 100 分) 中得分情况的茎叶图, 则下列说法错误的是()

甲					乙	
	9	7	2	4		
2	2	8	8	1	9	
1	3	9	6	9		

- A. 甲得分的平均数比乙大 B. 甲得分的极差比乙大
C. 甲得分的方差比乙小 D. 甲得分的中位数和乙相等

11. $\frac{2+i}{1-i} =$ ()

- A. $\frac{1+3i}{2}$ B. $\frac{3+i}{2}$ C. $\frac{3-i}{2}$ D. $\frac{-1+3i}{2}$

12. 在我国传统文化“五行”中, 有“金、木、水、火、土”五个物质类别, 在五者之间, 有一种“相生”的关系, 具体是金生水、水生木、木生火、火生土、土生金. 从五行中任取两个, 这二者具有相生关系的概率是()

- A. 0.2 B. 0.5 C. 0.4 D. 0.8

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 函数 $f(x) = x \cos x + \sin x$ 在 $x = \pi$ 处的切线方程是_____.

14. 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, 复数 $z = a - i$ 且 $\frac{z}{1+i} = 1 + bi$ (i 为虚数单位), 则 $ab =$ _____, $|z| =$ _____.

15. 设 $x \in \mathbf{R}$, 则“ $x^3 > 8$ ”是“ $x > 2$ ”的_____条件.

16. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=2$, $B=\frac{\pi}{4}$, $C=\frac{\pi}{6}$, 点 P 是边 BC 的中点, 则 $AC=$ _____, $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BC}=$ _____.

三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知 $a > 0$, 函数 $f(x) = x \ln x + \frac{x^2}{2} - a(x-1)$.

(I) 若 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{a}{2}, +\infty\right)$ 上单调递增, 求 a 的值;

(II) 若 $a \in \mathbb{Z}$, $f(x) > 0$ 恒成立, 求 a 的最大值. (参考数据: $e^{\frac{1}{2}} \approx 1.6$)

18. (12 分) 已知函数 $f(x) = e^x - x$, $g(x) = (x+k) \ln(x+k) - x$.

(1) 若 $k=1$, $f'(t) = g'(t)$, 求实数 t 的值.

(2) 若 $a, b \in \mathbb{R}^+$, $f(a) + g(b) \geq f(0) + g(0) + ab$, 求正实数 k 的取值范围.

19. (12 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的右顶点为 D , E 为上顶点, 点 A 为椭圆 C 上一动点.

(1) 若 $DE \perp AE$, 求直线 AD 与 y 轴的交点坐标;

(2) 设 F 为椭圆 C 的右焦点, 过点 $M(4, 0)$ 与 x 轴垂直的直线为 l_0 , FM 的中点为 N , 过点 A 作直线 l_0 的垂线, 垂足为 B , 求证: 直线 AF 与直线 BN 的交点在椭圆 C 上.

20. (12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 5$, $a_{n+1} + 2 = 2a_n$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $b_n = n(2a_n - 4)$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

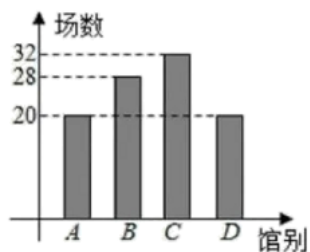
21. (12 分) 已知函数 $f(x) = |x - a|$ ($a \in \mathbb{R}$).

(1) 当 $a=2$ 时, 若 $f(x) + |3x - 2| \geq M$ 恒成立, 求 M 的最大值;

(2) 记 $f(x) \leq |2x + 1| - |2x - 1|$ 的解集为集合 A , 若 $\left[\frac{1}{2}, 1\right] \subseteq A$, 求实数 a 的取值范围.

22. (10 分) 为提供市民的健身素质, 某市把 A, B, C, D 四个篮球馆全部转为免费民用

(1) 在一次全民健身活动中, 四个篮球馆的使用场数如图, 用分层抽样的方法从 A, B, C, D 四场馆的使用场数中依次抽取 a_1, a_2, a_3, a_4 共 25 场, 在 a_1, a_2, a_3, a_4 中随机取两数, 求这两数和 ξ 的分布列和数学期望;



(2) 设四个篮球馆一个月内各馆使用次数之和为 x ，其相应维修费用为 y 元，根据统计，得到如下表的数据：

x	10	15	20	25	30	35	40
y	10000	11761	13010	13980	14771	15440	16020
$z = 0.1e^{\frac{y}{4343}} + 2$	2.99	3.49	4.05	4.50	4.99	5.49	5.99

①用最小二乘法求 z 与 x 的回归直线方程；

② $\frac{y}{x+40}$ 叫做篮球馆月惠值，根据①的结论，试估计这四个篮球馆月惠值最大时 x 的值

参考数据和公式： $\bar{z} = 4.5, \sum_{i=1}^7 (x_i - \bar{x})^2 = 700, \sum_{i=1}^7 (x_i - \bar{x})(z_i - \bar{z}) = 70, e^3 = 20$ $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^7 (x_i - \bar{x})(z_i - \bar{z})}{\sum_{i=1}^7 (x_i - \bar{x})^2}$ ， $\hat{a} = \bar{z} - b\bar{x}$

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、A

【解析】

将点代入解析式确定参数值，结合导数的几何意义求得切线斜率，即可由点斜式求的切线方程。

【详解】

曲线 $x^2 = 4y$ ，即 $y = \frac{1}{4}x^2$ ，

当 $x = 2$ 时，代入可得 $t = \frac{1}{4} \times 2^2 = 1$ ，所以切点坐标为 $(2, 1)$ ，

求得导函数可得 $y' = \frac{1}{2}x$ ，

由导数几何意义可知 $k = y' = \frac{1}{2} \times 2 = 1$,

由点斜式可得切线方程为 $y - 1 = x - 2$, 即 $y = x - 1$,

故选: A.

【点睛】

本题考查了导数的几何意义, 在曲线上一点的切线方程求法, 属于基础题.

2、A

【解析】

设 $P(\frac{y_0^2}{2p}, y_0), M(x, y)$, 因为 $PM = MF$, 得到 $x = \frac{p}{4} + \frac{y_0^2}{4p}, y = \frac{y_0}{2}$, 利用直线的斜率公式, 得到

$$k_{OM} = \frac{\frac{y_0}{2}}{\frac{\frac{p}{4} + \frac{y_0^2}{4p}}{\frac{p}{y_0} + \frac{y_0}{p}}} = \frac{2}{\frac{p}{y_0} + \frac{y_0}{p}}, \text{ 结合基本不等式, 即可求解.}$$

【详解】

由题意, 抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点坐标为 $F(\frac{p}{2}, 0)$,

设 $P(\frac{y_0^2}{2p}, y_0), M(x, y)$,

因为 $PM = MF$, 即 M 线段 PF 的中点, 所以 $x = \frac{1}{2}(\frac{p}{2} + \frac{y_0^2}{2p}) = \frac{p}{4} + \frac{y_0^2}{4p}, y = \frac{y_0}{2}$,

$$\text{所以直线 } OM \text{ 的斜率 } k_{OM} = \frac{\frac{y_0}{2}}{\frac{\frac{p}{4} + \frac{y_0^2}{4p}}{\frac{p}{y_0} + \frac{y_0}{p}}} = \frac{2}{\frac{p}{y_0} + \frac{y_0}{p}} \leq \frac{2}{2\sqrt{\frac{p}{y_0} \cdot \frac{y_0}{p}}} = 1,$$

当且仅当 $\frac{p}{y_0} = \frac{y_0}{p}$, 即 $y_0 = p$ 时等号成立,

所以直线 OM 的斜率的最大值为 1.

故选: A.

【点睛】

本题主要考查了抛物线的方程及其应用, 直线的斜率公式, 以及利用基本不等式求最值的应用, 着重考查了推理与运算能力, 属于中档试题.

3、B

【解析】

先求出双曲线的渐近线方程,可得则直线 $bx - ay + 2a = 0$ 与直线 $bx - ay = 0$ 的距离 d , 根据圆

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 1$ 与双曲线 C 的右支没有公共点, 可得 $d \geq 1$, 解得即可.

【详解】

由题意, 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的一条渐近线方程为 $y = \frac{b}{a}x$, 即 $bx - ay = 0$,

$\because P(x_0, y_0)$ 是直线 $bx - ay + 4a = 0$ 上任意一点,

则直线 $bx - ay + 4a = 0$ 与直线 $bx - ay = 0$ 的距离 $d = \frac{4a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{4a}{c}$,

$\because$ 圆 $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 1$ 与双曲线 C 的右支没有公共点, 则 $d \geq 1$,

$\therefore \frac{4a}{c} \geq 1$, 即 $e = \frac{c}{a} \leq 4$, 又 $e > 1$

故 e 的取值范围为 $(1, 4]$,

故选: B.

【点睛】

本题主要考查了直线和双曲线的位置关系, 以及两平行线间的距离公式, 其中解答中根据圆与双曲线 C 的右支没有公共点得出 $d \geq 1$ 是解答的关键, 着重考查了推理与运算能力, 属于基础题.

4、C

【解析】

根据准线的方程写出抛物线的标准方程,再对照系数求解即可.

【详解】

因为准线方程为 $y = 1$, 所以抛物线方程为 $x^2 = -4y$, 所以 $3a = -4$, 即 $a = -\frac{4}{3}$.

故选: C

【点睛】

本题考查抛物线与准线的方程.属于基础题.

5、B

【解析】

直接代入检验, 排除其中三个即可.

【详解】

由题意 $a_1 = 0$ ，排除 D， $a_3 = 4$ ，排除 A，C。同时 B 也满足 $a_5 = 12$ ， $a_7 = 24$ ， $a_9 = 40$ ，

故选：B。

【点睛】

本题考查由数列的项选择通项公式，解题时可代入检验，利用排除法求解。

6、C

【解析】

设 $A\left(x_1, \frac{x_1^2}{4}\right), B\left(x_2, \frac{x_2^2}{4}\right), P(t, -3)$ ，根据导数的几何意义，求出切线斜率，进而得到切线方程，将 P 点坐标代入切线

方程，抽象出直线 AB 方程，且过定点为已知圆的圆心，即可求解。

【详解】

圆 $x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0$ 可化为 $x^2 + (y - 3)^2 = 4$ 。

设 $A\left(x_1, \frac{x_1^2}{4}\right), B\left(x_2, \frac{x_2^2}{4}\right), P(t, -3)$ ，

则 l_1, l_2 的斜率分别为 $k_1 = \frac{x_1}{2}, k_2 = \frac{x_2}{2}$ ，

所以 l_1, l_2 的方程为 $l_1: y = \frac{x_1}{2}(x - x_1) + \frac{x_1^2}{4}$ ，即 $y = \frac{x_1}{2}x - y_1$ ，

$l_2: y = \frac{x_2}{2}(x - x_2) + \frac{x_2^2}{4}$ ，即 $y = \frac{x_2}{2}x - y_2$ ，

由于 l_1, l_2 都过点 $P(t, -3)$ ，所以 $\begin{cases} -3 = \frac{x_1}{2}t - y_1 \\ -3 = \frac{x_2}{2}t - y_2 \end{cases}$ ，

即 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 都在直线 $-3 = \frac{x}{2}t - y$ 上，

所以直线 AB 的方程为 $-3 = \frac{x}{2}t - y$ ，恒过定点 $(0, 3)$ ，

即直线 AB 过圆心 $(0, 3)$ ，

则直线 AB 截圆 $x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0$ 所得弦长为 4。

故选：C。

【点睛】

本题考查直线与圆位置关系、直线与抛物线位置关系，抛物线两切点所在直线求解是解题的关键，属于中档题.

7、A

【解析】

根据题意， $\cos \frac{\pi}{3} = \sin \left(\frac{2\pi}{3} + \varphi \right)$ ，求出 $\varphi = \frac{\pi}{6}$ ，所以 $g(x) = \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right)$ ，根据三角函数图像平移伸缩，即可求出 ω 的取值范围.

【详解】

已知 $f(x) = \cos x$ 与 $g(x) = \sin(2x + \varphi)$ ($0, \varphi < \pi$) 的图象有一个横坐标为 $\frac{\pi}{3}$ 的交点，

$$\text{则 } \cos \frac{\pi}{3} = \sin \left(\frac{2\pi}{3} + \varphi \right),$$

$$\text{Q } \frac{2\pi}{3} + \varphi \in \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right],$$

$$\therefore \frac{2\pi}{3} + \varphi = \frac{5\pi}{6}, \therefore \varphi = \frac{\pi}{6},$$

$$\therefore g(x) = \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right),$$

若函数 $g(x)$ 图象的纵坐标不变，横坐标变为原来的 $\frac{1}{\omega}$ 倍，则 $y = \sin \left(2\omega x + \frac{\pi}{6} \right)$,

$$\text{所以当 } x \in [0, 2\pi] \text{ 时, } 2\omega x + \frac{\pi}{6} \in \left[\frac{\pi}{6}, 4\pi\omega + \frac{\pi}{6} \right],$$

Q $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 有且仅有 5 个零点，

$$\therefore 5\pi, 4\pi\omega + \frac{\pi}{6} < 6\pi,$$

$$\therefore \frac{29}{24} \leq \omega < \frac{35}{24}.$$

故选：A.

【点睛】

本题考查三角函数图象的性质、三角函数的平移伸缩以及零点个数问题，考查转化思想和计算能力.

8、A

【解析】

先根据奇函数求出 m 的值，然后结合单调性求解不等式.

【详解】

据题意，得 $f(0)=1+m=0$ ，得 $m=-1$ ，所以当 $x \geq 0$ 时， $f(x)=2^x+x-1$. 分析知，函数 $f(x)$ 在 R 上为增函数.

又 $f(1)=2$ ，所以 $f(-1)=-2$. 又 $-2 < f(x-1) < 2$ ，所以 $-1 < x-1 < 1$ ，所以 $0 < x < 2$ ，故选 A.

【点睛】

本题主要考查函数的性质应用，侧重考查数学抽象和数学运算的核心素养.

9、B

【解析】

根据可导函数在极值点处的导数值为 0，得出 $a_1 a_{4039} = 6$ ，再由等比数列的性质可得.

【详解】

解：依题意 a_1 、 a_{4039} 是函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 6x - 3$ 的极值点，也就是 $f'(x) = x^2 - 8x + 6 = 0$ 的两个根

$$\therefore a_1 a_{4039} = 6$$

又 $\{a_n\}$ 是正项等比数列，所以 $a_{2020} = \sqrt{a_1 \cdot a_{4039}} = \sqrt{6}$

$$\therefore \log_{\sqrt{6}} a_{2020} = \log_{\sqrt{6}} \sqrt{6} = 1.$$

故选：B

【点睛】

本题主要考查了等比数列下标和性质以应用，属于中档题.

10、B

【解析】

由平均数、方差公式和极差、中位数概念，可得所求结论.

【详解】

$$\text{对于甲，} \bar{x}_1 = \frac{79+88+82+82+93+91}{6} \approx 85.8;$$

$$\text{对于乙，} \bar{x}_2 = \frac{72+74+81+89+96+99}{6} \approx 85.2,$$

故 A 正确;

甲的极差为 $93-79=14$ ，乙的极差为 $99-72=27$ ，故 B 错误;

对于甲，方差 $S_1^2 \approx 26.5$,

对于乙，方差 $S_2^2 \approx 106.5$ ，故 C 正确;

甲得分的中位数为 $\frac{82+88}{2}=85$ ，乙得分的中位数为 $\frac{81+89}{2}=85$ ，故 D 正确.

故选：B.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/368102071124007032>