2024北京北师大二附中高三（上）开学考

数　　学

一、选择题

1．已知集合$A=\{-2,-1,0,1,2\}$，$B=\{x|x^2<2\}$，则$A\cap B=$（　）

A．$\{-2,-1,0,1,2\}$　　B．$\{-1,0,1\}$　　C．$\{-2,2\}$　　D．$\{0,1\}$

2．复数$z=(-1+\mathrm{i})(2+\mathrm{i})$对应的点在复平面内的（　）

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

3．已知$f(x)=-\dfrac{x}{x-2}$，则函数在$x=1$处的切线方程是（　）

A．$2x-y+1=0$　　B．$x-2y+2=0$　　C．$2x-y-1=0$　　D．$x+2y-2=0$

4．若$a<b$且$ab\neq 0$，则下列不等式中一定成立的是（　）

A．$\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$　　B．$\dfrac{b}{a}>1$　　C．$a^3<b^3$　　D．$|a|<|b|$

5．$\left(x^2+\dfrac{2}{x}\right)^5$的展开式中$x^4$的系数为（　）

A．10　　B．20　　C．40　　D．80

6．已知$\{a_n\}$是等比数列，S_n为其前n项和，那么“$a_1>0$”是“数列$\{S_n\}$为递增数列”的（　）

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

7．小王同学进行投篮练习，若他第1球投进，则第2球投进的概率为$\dfrac{2}{3}$；若他第1球投不进，则第2球投进的概率为$\dfrac{1}{3}$，若他第1球投进概率为$\dfrac{2}{3}$，他第2球投进的概率为（　）

A．$\dfrac{5}{9}$　　B．$\dfrac{2}{3}$　　C．$\dfrac{7}{9}$　　D．$\dfrac{8}{3}$

8．若函数$y=\sin\left(\tau x-\dfrac{\pi}{6}\right)$在$[0,m]$上单调递增，则$m$的最大值为（　）

A．$\dfrac{1}{3}$　　B．$\dfrac{1}{2}$　　C．$\dfrac{2}{3}$　　D．1

9．已知圆C：$x^2+y^2=4$，直线l：$y=kx+m$，当k变化时，l截得圆C弦长的最小值为2，则常数$m=$（　）

A．± 2　　B．$\pm\sqrt{2}$　　C．$\pm\sqrt{3}$　　D．± 3

10．已知数列$\{a_n\}$中各项均为正数，且$a_{n+1}^2-a_{n+1}=a_n\ (n=1,2,3,\ldots)$，给出下列四个结论：

①对任意的$n\in\mathbf{N}^*$，都有$a_n>1$

②数列$\{a_n\}$可能为常数列

③若$0<a_1<2$，则当$n\geq 2$时，$a_1<a_n<2$

④若$a_1>2$，则数列$\{a_n\}$为递减数列

其中正确结论有（　）个

A．1　　　　B．2　　　　C．3　　　　D．4

二、填空题

11．若双曲线$\frac{x^2}{a^2}-y^2=1(a>0)$的一条渐近线方程为$y=\frac{1}{2}x$，则$a=$______.

12．数列$\{a_n\}$是公差为-2 的等差数列，记$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，且a_1,a_3,a_4成等比数列，则$a_1=$______；$S_n=$______.

13．在矩形$ABCD$中，$AB=2$，$BC=\sqrt{3}$，点 P 在AB边上，则向量$\overrightarrow{CP}$在向量$\overrightarrow{CB}$上的投影向量的长度是______，$\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{PD}$的最大值是______.

14．设函数$f(x)=e^x+ae^{-x}$（a 为常数），若$f(x)$为奇函数，则$a=$______；若$f(x)$是$\mathbf{R}$上的增函数，则 a 的取值范围是______.

15．设函数$f(x)=\begin{cases}(x-a+1)(x+1),x<1\\ \lg x-a,x\geq 1\end{cases}$

①当$a=0$时，$f(f(1))=$______；

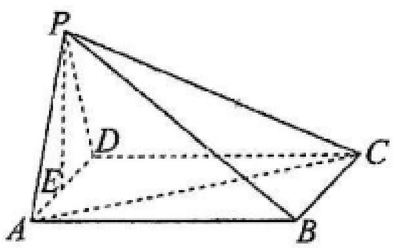
②若$f(x)$恰有 2 个零点，则a 的取值范围是______.

三、解答题

16．如图，在四棱锥$P-ABCD$中，四边形 $ABCD$ 为矩形，$AB=3$，$BC=2$．$\triangle PAD$为等边三角形，平面$PAD\perp$平面$ABCD$，E 为AD 的中点.

（1）求证：$PE\perp AB$；

（2）求平面 PAC 与平面 $ABCD$ 夹角的余弦值.



17．在$\triangle ABC$中，$b\sin A=a\cos B$.

（1）求$\angle B$的大小；

（2）再从下列三个条件中，选择两个作为已知，使得$\triangle ABC$存在且唯一，求$\triangle ABC$的面积.

条件① $\cos A=-\dfrac{1}{2}$；

条件② $b=\sqrt{2}$；

条件③AB边上的高为$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

注：如果选择的条件不符合要求，第（2）问得 0 分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，接第一个解答计分.

18．为研究某地区 2021 届大学毕业生毕业三个月后的毕业去向，某调查公司从该地区 2021 届大学刚刚毕业的学生中随机选取了 1000 人作为样本进行调查，结果如下：

毕业去向	继续学习深造	单位就业	自主创业	自由职业	慢就业
人数	200	560	14	128	98

假设该地区 2021 届大学毕业生选择的毕业去向相互独立.

（1）若该地区一所高校 2021 届大学毕业生的人数为 2500，试根据样本估计该校 2021 届大学毕业生选择“单位就业”的人数；

（2）从该地区 2021 届大学毕业生中随机选取 3 人，记随机变量X为这 3 人中选择“继续学习深造”的人数，以样本的频率估计概率，求X的分布列和数学期望$E\left(X\right)$；

（3）该公司在半年后对样本中的毕业生进行再调查，发现仅有选择“慢就业”的毕业生中的$a\left(0<a<98\right)$人选择了上表中其他的毕业去向．记半年后表中五种毕业去向对应人数的方差为s^2．当a为何值时，s^2最小.（结论不要求证明）

19．已知函数$f\left(x\right)=\left(\ln x-a\right)e^x$.

（1）当$a=0$时，求曲线$y=f\left(x\right)$在$x=1$处的切线方程；

（2）若$f\left(x\right)$在区间$\left(0,e\right]$存在极小值，求a的取值范围.

20．已知椭圆C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$经过$A\left(1,0\right)$、$B\left(0,b\right)$两点．点$O$为坐标原点，且$\triangle AOB$的面积为$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$．过点$P\left(0,1\right)$且斜率为$k\left(k>0\right)$的直线$l$与椭圆$C$有两个不同的交点$M$、$N$，且直线$AM$、$AN$分别与$y$轴交于点$S$、$T$.

（1）求椭圆C的方程；

（2）求直线l的斜率k的取值范围；

（3）设$\overrightarrow{PS}=\lambda\overrightarrow{PO}$，$\overrightarrow{PT}=\mu\overrightarrow{PO}$，求$\lambda+\mu$的取值范围.

21．已知集合$A=\left\{1,2,3,\ldots,2n\right\}\left(n\in \mathbf{N}^*\right)$．对于$A$的一个子集$S$，若存在不大于$n$的正整数$m$，使得对于

S 中的任意一对元素 s_1, s_2，都有 $|s_1 - s_2| \neq m$，则称 S 具有性质 P.

（Ⅰ）当 $n = 10$ 时，试判断集合 $B = \{x \in A | x > 9\}$ 和 $C = \{x \in A | x = 3k - 1, k \in \mathbf{N}^*\}$ 是否具有性质 P?并说明理由.

（Ⅱ）当 $n = 100$ 时，若集合 S 具有性质 P，那么集合 $T = \{2001 - x | x \in S\}$ 是否一定具有性质 P?并说明理由;

（Ⅲ）当 $n = 1000$ 时，若集合 S 具有性质P，求集合 S 中元素个数的最大值.

参考答案

一、选择题

1.【答案】B

【分析】求出集合 A，B，由此能求出 $A\cap B$.

【详解】因为集合 $A=\{-2,-1,0,1,2\}$， $B=\left\{x\middle|x^2<2\right\}=\left\{x\middle|-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}\right\}$，所以

$A\cap B=\left\{-1,0,1\right\}$.

故选：B.

2.【答案】B

【分析】利用复数的乘法化简复数z，利用复数的几何意义可得出结论.

【详解】因为$z=\left(-1+\mathrm{i}\right)\left(2+\mathrm{i}\right)=-3+\mathrm{i}$，因此，复数 z 对应的点在复平面内的第二象限.

故选：B.

3.【答案】C

【分析】求导，即得斜率，然后表示出直线方程即可.

【详解】因为$f\left(x\right)=-\dfrac{x}{x-2}$，

所以$f'\left(x\right)=\dfrac{-\left(x-2\right)+x}{\left(x-2\right)^2}=\dfrac{2}{\left(x-2\right)^2}$，

所以$f,\left(1\right)=2$，又$f\left(1\right)=1$，

所以函数在$x=1$处的切线方程为$y-1=2\left(x-1\right)$，

即$2x-y-1=0$.

故选：C

4.【答案】C

【分析】根据作差法判断 C；结合不等式的基本性质举例说明即可判断 ABD.

【详解】A：当$a<0<b$时，$\dfrac{1}{a}<0<\dfrac{1}{b}$，故 A 错误；

B：当$a=-2,b=-1$时，满足$a<b$，$\dfrac{b}{a}=\dfrac{1}{2}<1$，$\dfrac{b}{a}>1$不成立，故 B 错误；

C：$a^3-b^3=\left(a-b\right)\left(a^2+ab+b^2\right)=\left(a-b\right)\left[\left(a+\dfrac{b}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}b^2\right]$，

因为$a<b$，所以$a-b<0$，得$a^3-b^3<0$，即$a^3<b^3$，故 C 正确；

D：当$a=-2,b=-1$时，满足$a<b$，$|a|>|b|$，$|a|<|b|$不成立，故 D 错误.

故选：C

5.【答案】C

【详解】分析：写出$T_{r+1}=C_5^r.2^r.x^{10-3r}$，然后可得结果

详解：由题可得$T_{r+1}=C_5^r\cdot\left(x^2\right)^{5-r}.\left(\frac{2}{x}\right)^r=C_5^r.2^r.x^{10-3r}$

令$10-3r=4$,则$r=2$

所以$C_5^r.2^r=C_5^2.2^2=40$

故选C.

点睛：本题主要考查二项式定理，属于基础题.

6.【答案】B

【分析】

分别从充分性和必要性入手进行分析即可得解.

【详解】设等比数列$\{a_n\}$的公比为q，

充分性：当$a_1>0$，$q<0$时，$S_{n+1}-S_n=a_{n+1}=a_1q^n$,无法判断其正负，显然数列$\{S_n\}$为不一定是递增数列，充分性不成立;

必要性：当数列$\{S_n\}$为递增数列时，$S_n-S_{n-1}=a_n>0$，可得$a_1>0$，必要性成立.

故“$a_1>0$”是“数列$\{S_n\}$为递增数列”的必要而不充分条件.

故选：B.

【点睛】方法点睛：证明或判断充分性和必要性的常用方法：①定义法，②等价法，③集合包含关系法.

7.【答案】A

【分析】把第2球投进的事件分拆成两个互斥事件的和，分别算出这两个互斥事件的概率即可得解.

【详解】第2球投进的事件M是第一球投进，第2球投进的事件M_1与第一球没投进，第2球投进的事件M_2的和，M_1与M_2互斥，

$P(M_1)=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$，$P(M_2)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$，则$P(M_1+M_2)=P(M_1)+P(M_2)=\frac{5}{9}$，

所以第2球投进的概率为$\frac{5}{9}$.

故选：A

8.【答案】C

【分析】由函数直接可得单调递增区间，进而可得参数取值范围.

【详解】由$y=\sin\left(\pi x-\frac{\pi}{6}\right)$，可得当$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\le\pi x-\frac{\pi}{6}\le\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in Z$时函数单调递增，

即$x\in\left[-\frac{1}{3}+2k,\frac{2}{3}+2k\right],k\in Z$，

当$k=0$时，$x\in\left[-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$，

又函数在$[0,m]$，

所以$0<m\le\frac{2}{3}$，

即m的最大值为$\frac{2}{3}$，

故选：C.

9.【答案】C

【分析】由直线L过定点$M(0,m)$，结合圆的对称性以及勾股定理得出m的取值.

【详解】直线L：$y=kx+m$恒过点$M(0,m)$，由于直线被圆C所截的弦长的最小值为2，即当直线L与直线OM垂直时（O为原点），弦长取得最小值，于是$2^2=\left(\frac{1}{2}\times2\right)^2+|OM|^2=1+m^2$，解得$m=\pm\sqrt{3}$.

故选：C

10.【答案】C

【分析】结合数列递推式研究数列的单调性，逐项判断即可.

【详解】解：对于①, 在数列$\{a_n\}$中，$a_{n+1}^2-a_{n+1}=a_n$，则$a_{n+1}(a_{n+1}-1)=a_n$，

又对于任意的$n\in N^*$都有$a_n>0$，则$a_{n+1}-1>0$，即$a_{n+1}>1$，

即对于任意的$n\ge2$，都有$a_n>1$，

所以a_1的值不确定大小，故①项错误；

对于②, 不妨设数列$\{a_n\}$可能为常数列，则$a_n=a_{n+1}$，

又$a_{n+1}^2-a_{n+1}=a_n$，则$a_n^2-a_n=a_n$，则$a_n=2$，

即$a_1=2$时，数列$\{a_n\}$为常数列，故②项正确；

对于③，$0<a_1<2$，则$0<a_2^2-a_2<2$，因为数列$\{a_n\}$中各项均为正数，即$0<a_2<2$，同理，当$n\ge2$，都有$0<a_n<2$，

又$a_{n+1}-a_n=2a_{n+1}-a_{n+1}^2=a_{n+1}(2-a_{n+1})>0$，即数列$\{a_n\}$为递增数列，即当$n\ge2$时，$a_1<a_n<2$，故③项正确.

对于④，$a_{n+1}-a_n=2a_{n+1}-a_{n+1}^2=a_{n+1}(2-a_{n+1})$

又$a_1>2$，则$0<a_2^2-a_2<2$，即$1<a_2<2$，

同理，当$n\ge2$，都有$a_2^2-a_2>2$，即$a_2>2$，同理，当$n\ge2$，都有$a_n>2$，

即 $a_{n+1}-a_n=2a_{n+1}-a_{n+1}^2=a_{n+1}(2-a_{n+1})<0$，

即 $a_{n+1}>a_n$，即数列$\{a_n\}$为递减数列，故④项正确；

故选：C.

【点睛】关键点睛：数列与不等式以及数列与单调性等问题，常利用作差法，需要熟练应用不等式知识解决数列中的相关问题.

二、填空题

11.【答案】2

【分析】根据题意可得$\frac{1}{a}=\frac{1}{2}$，从而可求出a的值.

【详解】因为双曲线$\frac{x^2}{a^2}-y^2=1(a>0)$的一条渐近线方程为$y=\frac{1}{2}x$，

所以$\frac{1}{a}=\frac{1}{2}$，解得$a=2$，

故答案为：2.

12.【答案】 ①. 8 ②. $-n^2+9n$

【分析】

由等比数列的性质得$a_3^2=a_1 . a_4$，解出a_1的值，再结合等差数列的前n项和公式可得结果.

【详解】因为数列$\{a_n\}$是公差为-2的等差数列，a_1,a_3,a_4成等比数列，

所以$a_3^2=a_1 . a_4$，即$(a_1-4)^2=a_1(a_1-6)$，解得$a_1=8$；

所以$S_n=8n+\frac{n(n-1)}{2}\times(-2)=-n^2+9n$，

故答案为：8，$-n^2+9n$.

13.【答案】 ①. $\sqrt{3}$ ②. -2

【分析】根据投影向量的概念，可求得向量CP在向量CB上的投影向量的长度；

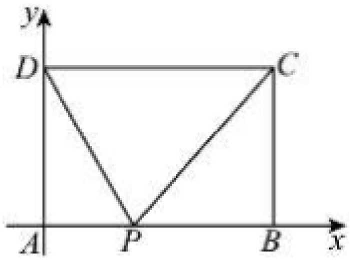
建立平面直角坐标系，利用数量积的坐标运算，表示出$\overrightarrow{CP}.\overrightarrow{PD}$，利用二次函数的性质求得答案.

【详解】由题意可得$|\overrightarrow{CP}|.\cos\angle PCB=|\overrightarrow{CB}|=\sqrt{3}$，

即向量$\overrightarrow{CP}$在向量$\overrightarrow{CB}$上的投影向量的长度是$\sqrt{3}$；

如图，以A为坐标原点，AB为x轴，AD为y轴，建立平面直角坐标系，

设$P(x,0),(0\le x\le 2)$，则$A(0,0),B(2,0),C(2,\sqrt{3}),D(0,\sqrt{3})$



故 $\overrightarrow{CP}=(x-2,-\sqrt{3}),\overrightarrow{PD}=(-x,\sqrt{3})$ ，

则 $\overrightarrow{CP}.\overrightarrow{PD}=-x^2+2x-3=-(x-1)^2-2$，

当$x=1\in[0,2]$时，$\overrightarrow{CP}.\overrightarrow{PD}$取最大值为$-2$ ，

故答案为：$\sqrt{3}$；-2

14.【答案】 ①. -1； ②. $(-\infty,0]$.

【分析】首先由奇函数的定义得到关于a 的恒等式，据此可得a 的值，然后利用导函数的解析式可得 a 的取值范围.

【详解】若函数$f(x)=e^x+ae^{-x}$为奇函数, 则$f(-x)=-f(x),e^{-x}+ae^x=-(e^x+ae^{-x})$,

$(a+1)(e^x+e^{-x})=0$对任意的x恒成立.

若函数$f(x)=e^x+ae^{-x}$是R上的增函数, 则$f'(x)=e^x-ae^{-x}\geq 0$恒成立, $a\leq e^{2x}, a\leq 0$.

即实数a 的取值范围是$(-\infty,0]$

【点睛】本题考查函数 奇偶性、单调性、利用单调性确定参数的范围. 解答过程中, 需利用转化与化归思想, 转化成恒成立问题. 注重重点知识、基础知识、基本运算能力的考查.

15.【答案】 ①. 1 ②. $(-\infty,0]\cup[2,+\infty)$

【分析】由分段函数解析式先求$f(1)$，再求$f(f(1))$的值，结合零点的定义分段求零点，由条件求 a 的取值范围.

【详解】当$a=0$时，$f(x)=\begin{cases}(x+1)^2,x<1\\ \lg x,x\geq 1\end{cases}$，

所以$f(1)=\lg 1=0$，

所以$f(f(1))=f(0)=1$，

令$f(x)=0$，可得

当$x<1$时，$(x-a+1)(x+1)=0$，

所以$x=-1$或$x=a-1$，

当$a=0$或$a\geq 2$时，方程$(x-a+1)(x+1)=0$在$(-\infty,1)$上有唯一解$x=-1$，

当$a<0$或$0<a<2$时，方程$(x-a+1)(x+1)=0$在$(-\infty,1)$上的解为$x=-1$或$x=a-1$，

当$x \geq 1$时，$\lg x - a = 0$，

所以当$a \geq 0$时，$x = 10^a$，

当$a < 0$时，方程$\lg x - a = 0$在$[1,+\infty)$上无解，

综上，当$a < 0$时，函数$f(x)$有两个零点$-1, a-1$，

当$a = 0$时，函数$f(x)$有两个零点$-1,1$，

当$0 < a < 2$时，函数$f(x)$有三个零点$-1, a-1, 10^a$，

当$a \geq 2$时，函数$f(x)$有两个零点$-1, 10^a$，

因为$f(x)$恰有2个零点，所以$a \geq 2$或$a \leq 0$，

所以a的取值范围是$(-\infty,0] \cup [2,+\infty)$.

故答案为：1；$(-\infty,0] \cup [2,+\infty)$.

三、解答题

16.【答案】（1）证明见解析

（2）$\frac{\sqrt{3}}{4}$

【分析】（1）根据面面垂直的性质定理可证明$PE \perp$平面$ABCD$，结合线面垂直的性质定理，即可证明结论；

（2）建立空间直角坐标系，求出相关点的坐标，可求得相关向量的坐标，从而求得平面PAC的法向量，利用向量的夹角公式，即可求得答案.

【小问1详解】

证明：因为$\triangle PAD$为正三角形，E为AD中点，

所以$PE \perp AD$，

因为平面$PAD \perp$平面$ABCD$，

平面$PAD \cap$平面$ABCD = AD$，

$PE \subset$平面PAD，

所以$PE \perp$平面$ABCD$.

因为$AB \subset$平面$ABCD$，

所以$PE \perp AB$.

【小问2详解】

由（1）知，$PE \perp$平面$ABCD$.

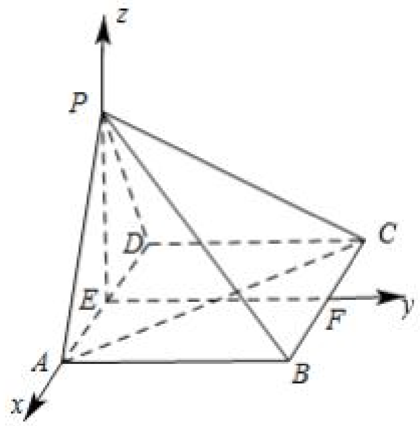
取BC中点F，连结EF，

因为底面$ABCD$为矩形，E为AD中点，

所以$EF \perp AD$，

所以 EA，EF，EP 两两垂直.

分别以 E 为坐标原点，EA，EF，EP 为 x 轴，y 轴，z 轴，建立空间直角坐标系E-xyz，



则$E\left(0,0,0\right)$，$A\left(1,0,0\right)$，$P\left(0,0,\sqrt{3}\right)$，$C\left(-1,3,0\right)$，

所以$\overrightarrow{PA}=\left(1,0,-\sqrt{3}\right)$，$AC=\left(-2,3,0\right)$.

设平面 PAC 的法向量$\vec{n}=\left(x,y,z\right)$，

由$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{PA}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$，得$\begin{cases}x-\sqrt{3}z=0\\ -2x+3y=0\end{cases}$，

令 $z=\sqrt{3}$，得 $x=3$，$y=2$，

所以$\vec{n}=\left(3,2,\sqrt{3}\right)$，

平面 $ABCD$ 的法向量可取$\overrightarrow{EP}=\left(0,0,\sqrt{3}\right)$.

设平面 PAC 与平面 $ABCD$ 夹角大小为θ，可知θ为锐角，

则 $\cos\theta=\left|\cos\langle\vec{n},\overrightarrow{EP}\rangle\right|=\left|\dfrac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{EP}}{|\vec{n}|\cdot\left|\overrightarrow{EP}\right|}\right|=\left|\dfrac{\left(3,2,\sqrt{3}\right)\cdot\left(0,0,\sqrt{3}\right)}{4\times\sqrt{3}}\right|=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，

所以平面 PAC 与平面 $ABCD$ 夹角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

17.【答案】（1）$B=\dfrac{\pi}{4}$

（2）答案见解析

【分析】（1）利用正弦定理边化角，结合同角三角函数关系求出 $\tan B$，即可得答案；

（2）若选①②，根据$\cos A=-\dfrac{1}{2}$求出 A，由正弦定理求出 a，再利用两角和的正弦公式求出$\sin C$，由三角形面积公式，即可求得答案；若选①③，根据$\cos A=-\dfrac{1}{2}$求出A，再根据AB边上的高 h 求出 b，下面解法同选①②；若选②③，根据条件可求出 A 的值不唯一，即可判断不合题意.

【小问 1 详解】

在$\triangle ABC$中，$b\sin A = a\cos B$，由正弦定理得$\sin B\sin A = \sin A\cos B$，

由于$A\in(0,\tau)$，$\therefore \sin A \neq 0$，则$\sin B = \cos B$，$\therefore \tan B = 1$，

由于$B\in(0,\pi)$，故$B = \dfrac{\pi}{4}$；

【小问 2 详解】

若选①②，$\triangle ABC$存在且唯一，解答如下：

由于$\cos A = -\dfrac{1}{2}$，$A\in(0,\pi)$，$\therefore A = \dfrac{2\pi}{3}$，

又$b = \sqrt{2}$，故$\dfrac{a}{\sin\frac{2\pi}{3}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sin\frac{\pi}{4}}$，则$a = \sqrt{3}$；

又$C = \tau - A - B = \tau - \dfrac{2\tau}{3} - \dfrac{\tau}{4}$，故$\sin C = \sin\left(\dfrac{2\tau}{3} + \dfrac{\tau}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，

故$S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}ab\sin C = \dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \dfrac{3-\sqrt{3}}{4}$；

若选①③，$\triangle ABC$存在且唯一，解答如下：

由于$\cos A = -\dfrac{1}{2}$，$A\in(0,\pi)$，$\therefore A = \dfrac{2\pi}{3}$，

AB边上的高h为$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，故$b = \dfrac{h}{\sin A} = \dfrac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{2}$

则$\dfrac{a}{\sin\frac{2\pi}{3}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sin\frac{\pi}{4}}$，则$a = \sqrt{3}$；

又$C = \tau - A - B = \tau - \dfrac{2\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}$，故$\sin C = \sin\left(\dfrac{2\pi}{3} + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，

故$S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}ab\sin C = \dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \dfrac{3-\sqrt{3}}{4}$；

若选②③，$\triangle ABC$不唯一，解答如下：

$b = \sqrt{2}$，AB边上的高h为$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，故$\sin A = \dfrac{h}{b} = \dfrac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

$A\in(0,\pi)$，$\therefore A = \dfrac{2\pi}{3}$或$\dfrac{\pi}{3}$，此时$\triangle ABC$有两解，不唯一，不合题意.

18. 为研究某地区 2021 届大学毕业生毕业三个月后的毕业去向，某调查公司从该地区 2021 届大学毕业生中随机选取了 1000 人作为样本进行调查，结果如下：