

上饶市 2024 届第二次高考模拟考试

数学试题卷

1. 本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分。答题前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答第 I 卷时，选出每个小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号，写在本试卷上无效。
3. 回答第 II 卷时，将答案写在答题卡上，答在本试卷上无效。
4. 本试卷共 19 题，总分 150 分，考试时间 120 分钟。

第 I 卷（选择题）

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | -1 < x < 3\}$, $B = \{x \in \mathbf{N}^* | x^2 - 3x < 0\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $\{x | 0 < x < 3\}$ B. $\{x | -1 < x < 3\}$ C. $\{1, 2\}$ D. $\{0, 1, 2\}$

【答案】C

【解析】

【分析】先求出集合 B ，然后利用集合的交集运算即可求解。

【详解】由题意知 $A = \{x | -1 < x < 3\}$, $B = \{x \in \mathbf{N}^* | x^2 - 3x < 0\} = \{x \in \mathbf{N}^* | 0 < x < 3\} = \{1, 2\}$,

所以 $A \cap B = \{1, 2\}$, 故 C 正确。

故选：C。

2. 已知复数 z 满足 $z = \frac{2i}{1+i}$, 则复数 $\bar{z}$ 在复平面内对应的点位于 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

【答案】D

【解析】

【分析】利用复数除法求出复数 z ，再求出 $\bar{z}$ 即可得解。

【详解】依题意， $z = \frac{2i \cdot (1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2+2i}{2} = 1+i$,

所以 $\bar{z} = 1-i$ 在复平面内对应的点 $(1, -1)$ 位于第四象限。

故选：D

3. “ $a+c>b+d$ ”是“ $a>b$ 且 $c>d$ ”的 ()

A. 必要不充分条件

B. 充分不必要条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

【答案】 A

【解析】

【分析】 通过特例说明充分性不成立，根据不等式的性质说明必要性是成立的.

【详解】 可令 $a=9$ ， $c=6$ ， $b=d=7$ ，则满足 $a+c>b+d$ ，但“ $a>b$ 且 $c>d$ ”不成立，所以“ $a+c>b+d$ ”不是“ $a>b$ 且 $c>d$ ”的充分条件；

根据不等式的性质：由 $a>b$ 且 $c>d$ ，可得： $a+c>b+d$.所以“ $a+c>b+d$ ”是“ $a>b$ 且 $c>d$ ”的必要条件.

故选： A

4. 已知平面向量 $\vec{a}=(1,m)$ ， $\vec{b}=(-2,2)$ ，且 $(\vec{a}+\vec{b})\perp\vec{b}$ ，则 $m=(\quad)$

A. 1

B. 3

C. -3

D. -1

【答案】 C

【解析】

【分析】 先求出 $\vec{a}+\vec{b}$ 的坐标，再根据垂直的坐标表示求得 m 即可.

【详解】 由题意知： $\vec{a}=(1,m)$ ， $\vec{b}=(-2,2)$ ，所以 $\vec{a}+\vec{b}=(-1,m+2)$ ，
因为 $(\vec{a}+\vec{b})\perp\vec{b}$ ，所以 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{b}=0$ ，即 $(-1)\times(-2)+2(m+2)=0$ ，

解得： $m=-3$ ，所以 A、 B、 D 错误，

故选： C.

5. 记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，若 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是等差数列， $S_6=6$ ，则 $a_3+a_4=(\quad)$

A. $\frac{1}{6}$

B. $\frac{1}{2}$

C. 1

D. 2

【答案】 D

【解析】

【分析】 首先根据因为 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是等差数列，可得 $\{a_n\}$ 为等差数列，再利用等差数列的求和公式及其性质即可得解.

【详解】因为 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是等差数列，

所以可设 $\frac{S_n}{n} = an + b$ ，所以 $S_n = an^2 + bn$ ，

所以 $\{a_n\}$ 为等差数列，

$$S_6 = 6 = \frac{(a_1 + a_6)}{2} \times 6 = 3(a_1 + a_6),$$

所以 $a_1 + a_6 = 2$ ，

所以 $a_3 + a_4 = 2$ 。

故选：D

6. 已知角 α ， β 满足 $\tan \alpha \tan \beta = -3$ ， $\cos(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}$ ，则 $\cos(\alpha - \beta) =$ ()

- A. $-\frac{1}{4}$ B. -1 C. $-\frac{3}{8}$ D. $\frac{1}{8}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据商数关系得到 $\sin \alpha \sin \beta = -3 \cos \alpha \cos \beta$ ，再利用两角和与差的余弦公式计算即可。

【详解】 $\tan \alpha \tan \beta = \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta} = -3$ ， $\therefore \sin \alpha \sin \beta = -3 \cos \alpha \cos \beta$ ，

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = 4 \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}, \therefore \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{8},$$

$$\therefore \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = -2 \cos \alpha \cos \beta = -\frac{1}{4},$$

故选：A.

7. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(2-x) = f(x)$ ，且在 $[0,1]$ 上单调递减，若方程 $f(x) = 1$ 在 $(-1,0]$ 上有实数根，则方程 $f(x) = -1$ 在区间 $[3,11]$ 上所有实根之和是 ()

- A. 28 B. 16 C. 20 D. 12

【答案】A

【解析】

【分析】根据条件可得出 $f(x)$ 的图象关于 $x=1$ 对称， $f(x)$ 的周期为 4，从而可考虑 $f(x)$ 的一个周期，利用 $[-1,3]$ ，根据 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上是减函数，可得出 $f(x)$ 在 $(1,2]$ 上是增函数，又 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，所以 $f(x)$ 在 $(-1,0]$ 上是减函数，在 $[2,3)$ 上是增函数，然后根据 $f(x) = 1$ 在 $(-1,0]$

上有实数根，可判断该实数根是唯一的，并可判断 $f(x) = -1$ 在一个周期 $[-1, 3]$ 内有两个实数根，并得这两实数根和为 2，从而得出 $f(x) = -1$ 在区间 $[3, 11]$ 这三个周期内上有 4 个实数根，和为 28.

【详解】由 $f(2-x) = f(x)$ 知函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = 1$ 对称，

$\therefore f(2-x) = f(x)$ ， $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的奇函数，

$\therefore f(-x) = f(x+2) = -f(x)$ ，

$\therefore f(x+4) = f(x)$ ，

$\therefore f(x)$ 的周期为 4，

考虑 $f(x)$ 的一个周期，例如 $[-1, 3]$ ，

由 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上是减函数知 $f(x)$ 在 $(1, 2]$ 上是增函数，

$f(x)$ 在 $(-1, 0]$ 上是减函数， $f(x)$ 在 $[2, 3)$ 上是增函数，

对于奇函数 $f(x)$ 有 $f(0) = 0$ ， $f(2) = f(2-2) = f(0) = 0$ ，

故当 $x \in (0, 1)$ 时， $f(x) < f(0) = 0$ ，当 $x \in (1, 2)$ 时， $f(x) < f(2) = 0$ ，

当 $x \in (-1, 0)$ 时， $f(x) > f(0) = 0$ ，当 $x \in (2, 3)$ 时， $f(x) > f(2) = 0$ ，

因为方程 $f(x) = 1$ 在 $(-1, 0]$ 上有实数根，

函数 $f(x)$ 在 $(-1, 0]$ 上是单调函数，则这实数根是唯一的，

所以方程 $f(x) = -1$ 在 $(0, 1]$ 上有唯一的实数根，

则由于 $f(2-x) = f(x)$ ，函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = 1$ 对称，

故方程 $f(x) = -1$ 在 $(1, 2)$ 上有唯一实数根，

因为在 $(-1, 0)$ 和 $(2, 3)$ 上 $f(x) > 0$ ，

则方程 $f(x) = -1$ 在 $(-1, 0]$ 和 $[2, 3)$ 上没有实数根，

从而方程 $f(x) = -1$ 在一个周期内有且仅有两个实数根，

当 $x \in [-1, 3]$ ，方程 $f(x) = -1$ 的两实数根之和为 $x + 2 - x = 2$ ，

当 $x \in [3, 11]$ ，方程 $f(x) = -1$ 的所有 4 个实数根之和为

$$4+x+4+2-x+x+8+2-x+8=8+2+8+2+8=28.$$

故选：A.

8. 设 F_2 为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的右焦点，直线 $l: x - 3y + c = 0$ (其中 c 为双曲线 C 的半焦距) 与双曲线 C 的左、右两支分别交于 M, N 两点，若 $\overrightarrow{MN} \cdot (\overrightarrow{F_2M} + \overrightarrow{F_2N}) = 0$ ，则双曲线 C 的离心率是 ()

- A. $\frac{\sqrt{15}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{3}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

【答案】D

【解析】

【分析】取 MN 的中点，利用向量的中点公式和向量数量积为零的几何意义，得到 F_2H 为线段 MN 的中垂线， $|MF_2| = |NF_2| = m$ ，然后结合双曲线的定义得到 $|MH| = |NH| = 2a$ ，进而利用勾股定理求得 $m^2 = 2a^2 + 2c^2$ ，于是根据直线 l 的斜率，得到 a, c 的关系，从而求得离心率

【详解】设双曲线 C 的左焦点为 F_1 ，如图，取线段 MN 的中点 H ，连接 HF_2 ，则

$\overrightarrow{F_2M} + \overrightarrow{F_2N} = 2\overrightarrow{F_2H}$. 因为 $\overrightarrow{MN} \cdot (\overrightarrow{F_2M} + \overrightarrow{F_2N}) = 0$ ，所以 $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{F_2H} = 0$ ，即 $MN \perp F_2H$ ，则

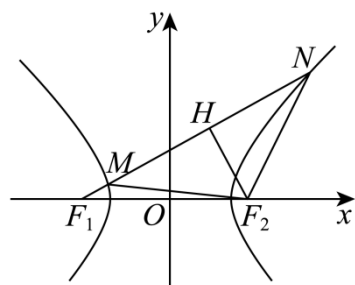
$|MF_2| = |NF_2|$. 设 $|MF_2| = |NF_2| = m$. 因为 $|MF_2| - |MF_1| = |NF_2| - |NF_1| = 2a$ ，所以

$|NF_1| - |NF_2| + |MF_2| - |MF_1| = |NF_1| - |MF_1| = |MN| = 4a$ ，则 $|MH| = |NH| = 2a$ ，从而 $|HF_1| = m$ ，故

$|HF_2| = \sqrt{4c^2 - m^2} = \sqrt{m^2 - 4a^2}$ ，解得 $m^2 = 2a^2 + 2c^2$. 因为直线 l 的斜率为 $\frac{1}{3}$ ，所以

$$\tan \angle HF_1F_2 = \frac{|HF_2|}{|HF_1|} = \frac{\sqrt{2c^2 - 2a^2}}{\sqrt{2a^2 + 2c^2}} = \frac{1}{3}, \text{ 整理得 } \frac{c^2 - a^2}{a^2 + c^2} = \frac{1}{9}, \text{ 即 } 5a^2 = 4c^2 \Rightarrow e = \frac{\sqrt{5}}{2},$$

故选：D.



【点睛】本题考查双曲线的几何性质——离心率的求法，涉及向量的运算

和数量积，关键是取 MN 的中点，利用向量的中点公式和向量数量积为零的几何意义，得到 F_2H 为线段

MN 的中垂线, 结合双曲线的定义得到 $|MH| = |NH| = 2a$ 是关键, 根据直线 l 的斜率, 得到 a, c 的关系是求得离心率的方向.

二、选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分, 部分选对得部分分, 有错选得 0 分.

9. 若 $\left(x - \frac{2}{x^2}\right)^n$ (n 为正整数) 的展开式中存在常数项, 则下列选项中 n 的取值可能是 ()

- A. 3 B. 5 C. 6 D. 7

【答案】AC

【解析】

【分析】根据二项式定理的通项公式求解.

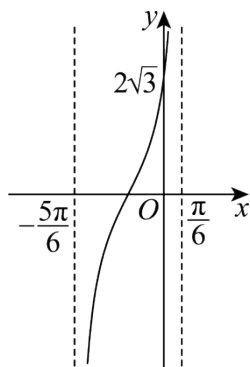
【详解】 $\left(x - \frac{2}{x^2}\right)^n$ 展开式的通项为: $T_{k+1} = C_n^k x^{n-k} \left(-\frac{2}{x^2}\right)^k = (-2)^k C_n^k x^{n-3k}, k=0, 1, \dots, n$,

因为存在常数项, 所以 $n = 3k$.

经验证, $k=1$ 时, $n=3$; $k=2$ 时, $n=6$ 符合条件.

故选: AC

10. 已知函数 $f(x) = A \tan(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, 0 < \varphi < \pi$) 的部分图象如图所示, 则 ()



A. $\omega \cdot \varphi \cdot A = \frac{\pi}{6}$

B. $f(x)$ 的图象过点 $\left(\frac{11\pi}{6}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$

C. 函数 $y = |f(x)|$ 的图象关于直线 $x = \frac{5\pi}{3}$ 对称

D. 若函数 $y = |f(x)| + \lambda f(x)$ 在区间 $\left(-\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$ 上不单调, 则实数 λ 的取值范围是 $[-1, 1]$

【答案】BCD

【解析】

【分析】根据函数图象所经过的点，结合正切型函数的对称性、单调性逐一判断即可.

【详解】对于 A: 设该函数的最小正周期为 T ，则有 $T = \frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi}{6} - \left(-\frac{5\pi}{6}\right) \Rightarrow \omega = 1$ ，

即 $f(x) = A \tan(x + \varphi)$ ，由函数的图象可知： $\frac{\pi}{6} + \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3} + k\pi$ ，又 $0 < \varphi < \pi$ ，所以 $\varphi = \frac{\pi}{3}$ ，

即 $f(x) = A \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ ，由图象可知： $f(0) = A \tan \frac{\pi}{3} = 2\sqrt{3} \Rightarrow A = 2$ ，所以 $\omega \cdot \varphi \cdot A = \frac{2\pi}{3}$ ，因此 A 不正确；

对于 B: $f\left(\frac{11\pi}{6}\right) = 2 \tan\left(\frac{11\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = 2 \tan \frac{13\pi}{6} = 2 \tan \frac{\pi}{6} = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ，所以 B 正确；

对于 C: 因为 $\left|f\left(\frac{5\pi}{3} - x\right)\right| = \left|2 \tan\left(\frac{5\pi}{3} - x + \frac{\pi}{3}\right)\right| = |2 \tan x|$ ，

$\left|f\left(\frac{5\pi}{3} + x\right)\right| = \left|2 \tan\left(\frac{5\pi}{3} + x + \frac{\pi}{3}\right)\right| = |2 \tan x|$ ，所以 $\left|f\left(\frac{5\pi}{3} - x\right)\right| = \left|f\left(\frac{5\pi}{3} + x\right)\right|$ ，

所以函数 $y = |f(x)|$ 的图象关于直线 $x = \frac{5\pi}{3}$ 对称，因此 C 正确；

对于 D: $y = |f(x)| + \lambda f(x) = \left|2 \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right| + 2\lambda \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

当 $x \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right)$ 时，

$$\begin{aligned} y &= |f(x)| + \lambda f(x) = \left|2 \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right| + 2\lambda \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 2 \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 2\lambda \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \\ &= (2 + 2\lambda) \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right), \end{aligned}$$

当 $x \in \left(-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{3}\right]$ ，

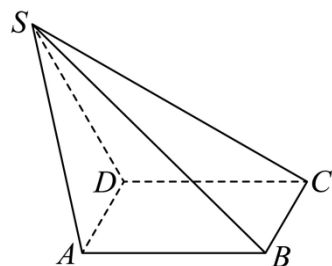
$$\begin{aligned} y &= |f(x)| + \lambda f(x) = \left|2 \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right| + 2\lambda \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -2 \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 2\lambda \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \\ &= (-2 + 2\lambda) \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right), \end{aligned}$$

当函数 $y = |f(x)| + \lambda f(x)$ 在区间 $\left(-\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$ 上不单调时，则有 $(2+2\lambda)(-2+2\lambda) \leq 0 \Rightarrow -1 \leq \lambda \leq 1$ ，D 正确.

故选：BCD

【点睛】关键点睛：运用函数对称性、函数单调性的性质是解题的关键.

11. 在四棱锥 $S-ABCD$ 中， $ABCD$ 是正方形， $AD \perp SD$ ， $\angle SDC = 120^\circ$ ， $SD = CD = 2$ ， P 为棱 SB 上一点，则下列结论正确的是（ ）



A. 点 A 到平面 SBC 的距离为 1

B. 若 $SP = PB$ ，则过点 A，D，P 的平面 α 截此四棱锥所得截面的面积为 $\frac{3}{2}$

C. 四棱锥 $S-ABCD$ 外接球的表面积为 18π

D. 直线 AP 与平面 SCD 所成角的正弦值的最大值为 $\frac{2\sqrt{7}}{7}$

【答案】ABD

【解析】

【分析】设点 A 到平面 SBC 的距离为 d ，结合 $V_{S-ABC} = V_{A-SBC}$ ，求得 $d = 1$ ，可判定 A 正确；取 SC 中点为 Q ，连接 PQ ， DQ ，可得截面为直角梯形 $APQD$ ，进而可判定 B 正确；结合球的截面的性质，可求得四棱锥 $S-ABCD$ 外接球的半径为 $R = \sqrt{5}$ ，结合球的表面积公式，可判定 C 不正确；作 $PE \perp SC$ 和 $EF \perp CD$ ，证得平面 $PEF \perp$ 平面 SCD ，将 AP 与平面 SCD 所成的角转化为 $\angle APF$ ，设

$PB = x (0 \leq x \leq 4)$ ，求得 $\sin \angle APF = \frac{AF}{AP} = \frac{x}{2\sqrt{x^2 - 3x + 4}}$ ，结合二次函数的性质，可判定 D 正确.

【详解】对于 A 选项，因为 $AD \perp SD$ ， $AD \perp DC$ ，又 $SD \cap DC = D$ ，且 $SD, DC \subset$ 面 SDC ，所以 $AD \perp$ 面 SDC ，又因为 $AD \parallel BC$ ，所以 $BC \perp$ 平面 SDC ，因为 $\angle SDC = 120^\circ$ ，且 $SD = CD = 2$ ，

可得 S 到平面 $ABCD$ 的距离为 $SD \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3}$ ，即三棱锥 $S-ABC$ 的高为 $h = \sqrt{3}$ ，

设点 A 到平面 SBC 的距离为 d ，且 $SC = \sqrt{SD^2 + CD^2 - 2SD \cdot CD \cos 120^\circ} = 2\sqrt{3}$ ，

由 $V_{S-ABC} = V_{A-SBC}$ ，可得 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times h = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{3} \times d$ ，得 $d = \frac{h}{\sqrt{3}} = 1$ 。

所以点 A 到平面 SBC 的距离为 1，所以 A 正确；

对于 B 选项，因为 $SP = PB$ ，所以点 P 为棱 SB 的中点，

取 SC 中点为 Q ，连接 PQ ， DQ ，则平面 $APQD$ 即为平面 α 截此四棱锥所得的截面。

且点 Q 是 SC 的中点，点 P 为棱 SB 的中点，

所以在 $\triangle SBC$ 中， PQ 是 $\triangle SBC$ 的中位线，则 $PQ = \frac{1}{2}BC = 1$ ，且 $PQ \parallel BC$ ，

又因为四边形 $ABCD$ 是正方形，则 $BC \parallel AD$ ，所以 $PQ \parallel AD$ ，

因为 $AD \perp$ 面 SDC ，且 $AD \not\subset$ 面 SDC ， $QC \subset$ 面 SDC ，所以 $AD \perp QC$ 。

所以四边形 $APQD$ 是以 AD 为下底、 PQ 为上底， DQ 为高的直角梯形，

因为 $SD = CD = 2$ ，在等腰 $\triangle SDC$ 中， $QD \perp SC$ ，且 QD 平分 $\angle SDC$ ，

可得 $QD = CD \cdot \cos \frac{1}{2} \angle SDC = 2 \times \frac{1}{2} = 1$ ，

则平面 α 截此四棱锥所得截面的面积为 $S = \frac{1}{2}(1+2) \cdot 1 = \frac{3}{2}$ ，所以 B 正确；

对于 C 选项，又因为 $\angle SDC = 120^\circ$ ， $SD = CD = 2$ ，且 $SC = 2\sqrt{3}$ ，

所以 $2r = \frac{SC}{\sin \angle SDC} = \frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 4$ ，即 $r = 2$ ，其中 r 为 $\triangle SDC$ 外接圆半径，

因为正方形 $ABCD$ 的中心到面 SDC 的距离等于其边长的一半，即 1，故四棱锥 $S-ABCD$ 外接球的半径为

$$R = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}.$$

所以四棱锥 $S-ABCD$ 外接球的表面积为 20π ，所以 C 不正确；

对于 D 选项，过点 P 作 $PE \parallel SC$ ，再过点 E 作 $EF \parallel CD$ ，使得 E, F 分别在线段 BC, AD 上，连接 PF 。

根据线面平行的判定定理，可得 $PE \parallel$ 平面 SCD ， $EF \parallel$ 平面 SCD ，

因为 $EF \cap PE = E$ ，且 $EF, PE \subset$ 平面 PEF ，所以平面 $PEF \parallel$ 平面 SCD ，

又因为 $AD \perp$ 平面 SCD ，所以 $AD \perp$ 平面 PEF ，即 $AF \perp$ 平面 PEF 。

所以 $\angle APF$ 即为 AP 与平面 PEF 所成的角，即为 AP 与平面 SCD 所成的角。

由于 $BC \perp$ 平面 SDC ， SC 在平面 SDC 内，故 $BC \perp SC$ 。

从而在直角 $\triangle SBC$ 中，可得 $SB = \sqrt{SC^2 + CB^2} = \sqrt{12 + 4} = 4$ 。

设 $PB = x (0 \leq x \leq 4)$ ，由 $VPBE \sim VSBC$ ，可得 $\frac{BE}{BC} = \frac{BP}{SB} = \frac{x}{4}$ ，

所以 $BE = \frac{x}{4} BC = \frac{x}{4} \cdot 2 = \frac{x}{2}$ ，所以 $AF = \frac{x}{2}$ 。

由于 $SA = \sqrt{SD^2 + DA^2} = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2}$ ，故在 $\triangle SAB$ 中，由余弦定理可得

$$\cos \angle SBA = \frac{SB^2 + AB^2 - SA^2}{2SB \cdot AB} = \frac{3}{4},$$

在 $\triangle PAB$ 中，由余弦定理可得 $AP = \sqrt{AB^2 + PB^2 - 2AB \cdot PB \times \cos \angle PBA} = \sqrt{x^2 - 3x + 4}$ ，

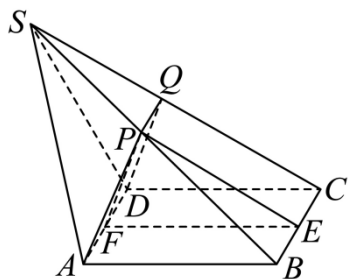
在直角 $\triangle PAF$ 中，可得

$$\sin \angle APF = \frac{AF}{AP} = \frac{x}{2\sqrt{x^2 - 3x + 4}} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{4}{x^2} - \frac{3}{x} + 1}} = \frac{1}{2\sqrt{4\left(\frac{1}{x} - \frac{3}{8}\right)^2 + \frac{7}{16}}} \leq \frac{1}{2\sqrt{\frac{7}{16}}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}, \text{ 且当 } x = \frac{8}{3}$$

时，不等号取等。

所以 $\sin \angle APF$ 的最大值是 $\frac{2\sqrt{7}}{7}$ ，所以 D 正确。

故选：ABD。



【点睛】解题方法点拨：

- 1、立体几何中的动态问题主要包括：空间动点轨迹的判断，求解轨迹的长度及动角的范围等问题；
- 2、解答方法：一般时根据线面平行，线面垂直的判定定理和性质定理，结合圆或圆锥曲线的定义推断出动点的轨迹，有时也可以利用空间向量的坐标运算求出动点的轨迹方程；
- 3、对于线面位置关系的存在性问题，首先假设存在，然后再该假设条件下，利用线面位置关系的相关定理、性质进行推理论证，寻找假设满足的条件，若满足则肯定假设，若得出矛盾的结论，则否定假设；
- 4、对于探索性问题用向量法比较容易入手，一般先假设存在，设出空间点的坐标，转化为代数方程是否有解的问题，若由解且满足题意则存在，若有解但不满足题意或无解则不存在。

第 II 卷（非选择题）

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/368111003026006063>