苏教版2019高一数学（选修一）**第五章 导数及其应用**

5.3.1 单调性

第1课时 单调性

目录/CONTENTS

学习目标

1.结合实例，借助几何直观了解函数的单调性与导数的关系.

2.能利用导数研究函数的单调性.

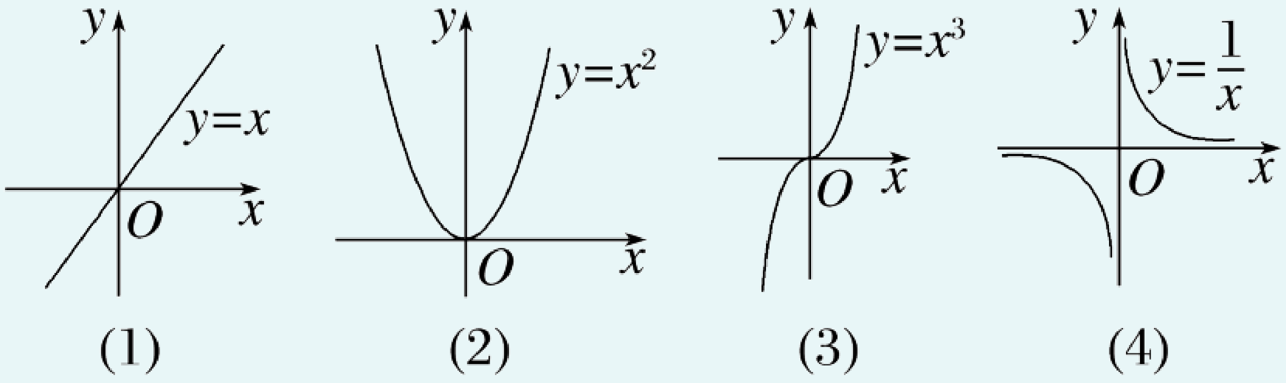
3.对于多项式函数，能求不超过三次的多项式函数的单调区间.

情景导入

我们知道，导数$f'(x)$刻画了函数$f(x)$在每一点处的变化趋势，而函数在每一点处的变化趋势可以反映函数的一些性质，比如函数的单调性，既然导数能刻画函数的变化趋势，我们不禁会想导数与函数的单调性是否有某种联系，这就是本节课要讨论的内容.

新知探究

问题　观察下面几个图象，探究函数的单调性和导数的正负的关系.



提示　(1)函数$y=x$的定义域为**R**，并且是增函数，其导数$y'=1>0$；

(2)函数$y=x^2$的定义域为**R**，在$(-\infty, 0)$上单调递减，在$(0, +\infty)$上单调递增.

而$y'=2x$，当$x<0$时，其导数$y'<0$；当$x>0$时，其导数$y'>0$；当$x=0$时，其导数$y'=0$.

(3)函数$y=x^3$的定义域为**R**，在定义域上是增函数.而$y'=3x^2$，当$x\neq 0$时，其导数$y'=3x^2>0$；当$x=0$时，其导数$y'=3x^2=0$；

(4)函数$y=\frac{1}{x}$的定义域为$(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$，在$(-\infty, 0)$上单调递减，在$(0, +\infty)$上单调递减，而$y'=-\frac{1}{x^2}$，因为$x\neq 0$，所以$y'<0$.

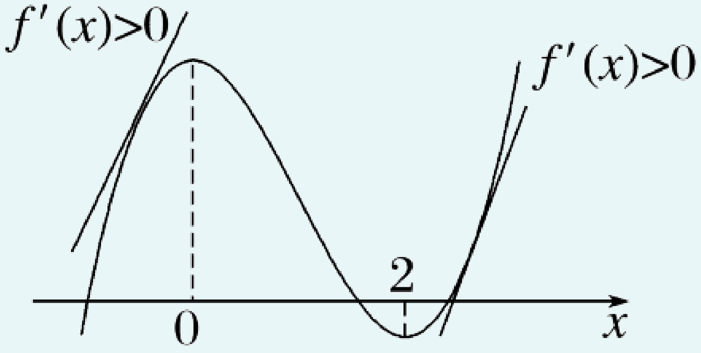
课本例题

例2 讨论函数$f(x)=2x^3-6x^2+7$的单调性.

解：由题设知，$f'(x)=6x^2-12x$.

令$f'(x)=0$，解得$x=0$或$x=2$.

因此，在区间$(-\infty，0)$上，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增；在区间$(0,2)$上，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；在区间$(2，+\infty)$上，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增(如图).



课堂练习

变式1 求下列函数的单调区间.

(1)$f(x)=3x^2-2\ln x$；

解：易知函数的定义域为$(0，+\infty)$，

$$f'(x)=6x-\frac{2}{x}=\frac{6x^2-2}{x}=\frac{6\left(x+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(x-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}{x},$$

令$f'(x)>0$，解得$x>\frac{\sqrt{3}}{3}$，由$f'(x)<0$，解得$0<x<\frac{\sqrt{3}}{3}$，

所以函数$f(x)$的减区间是$\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$，增区间是$\left(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$.

(2)$f(x)=2x^3+3x^2-36x+1$.

解：$f'(x)=6x^2+6x-36=6(x+3)(x-2)$.

令$f'(x)>0$，解得$x<-3$或$x>2$；

令$f'(x)<0$，解得$-3<x<2$.

故$f(x)$的增区间是$(-\infty，-3)$，$(2，+\infty)$；

减区间是$(-3,2)$.

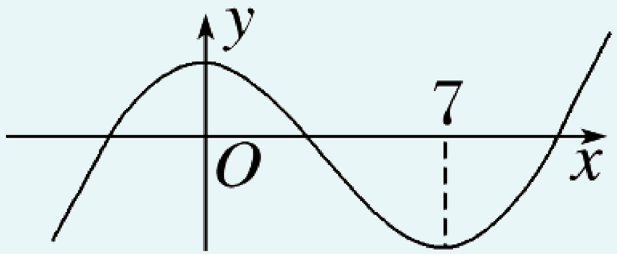
变式2　已知导函数$f'(x)$的下列信息：当$x<0$或$x>7$时，$f'(x)>0$；当$0<x<7$时，$f'(x)<0$；当$x=0$或$x=7$时，$f'(x)=0$，试画出函数$f(x)$的大致图象.

解：当$x<0$或$x>7$时，$f'(x)>0$，可知函数$f(x)$在区间$(-\infty,0)$和$(7,+\infty)$上单调递增；

当$0<x<7$时，$f'(x)<0$，可知函数$f(x)$在区间$(0,7)$上单调递减；

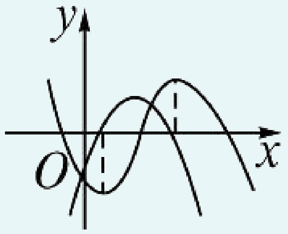
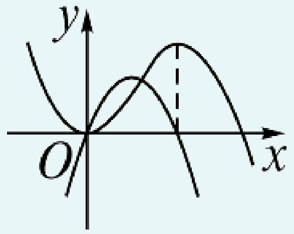
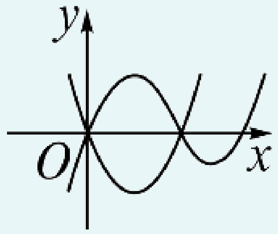
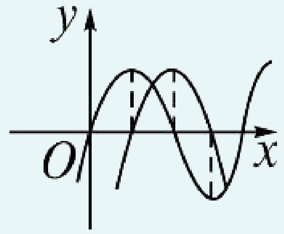
当$x=0$或$x=7$时，$f'(x)=0$，这两个点比较特殊，我们称它们为“临界点”.

故函数$f(x)$的大致图象如图所示.



【题型一】函数图象与导函数图象的关系

例1 （多选题）在同一坐标系中作出三次函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a\neq 0)$ 及其导函数的图象,下列一定不正确的是(　CD　)

A.    

[解析] 易知 $f'(x)=3a$��$^{2}+2bx+c$,它是二次函数,图象为抛物线.

当 $f'(x)>0$ 时,$y=f(x)$ 单调递增；当 $f'(x)<0$ 时,$y=f(x)$ 单调递减. A,B中函数图象的增减趋势与导函数的正负区间是吻合的；C中导函数为负的区间内相应的函数不单调递减,故错误；D中导函数为正的区间内相应的函数不单调递增,故错误.故选 CD.

概念归纳

规律方法

函数图象的升降可以通过导数的正负来分析判断,即符号为正,图象上升；符号为负,图象下降.看导函数图象时,主要是看图象在 x 轴上方还是下方,即关心导数值的正负,而不是其单调性.解决问题时,一定要分清是函数图象还是其导函数图象.

【题型二】判断（证明）函数的单调性

例2（1） 求证:函数 $f(x)=e^x-x-1$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是单调递增的,在区间 $(-\infty,0)$ 上是单调递减的;

证明 因为 $f(x)=e^x-x-1$,所以 $f'(x)=e^x-1$. 当 $x\in(0,+\infty)$ 时, $e^x>1$,即 $f'(x)=e^x-1>0$，故函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是单调递增的;

当 $x\in(-\infty,0)$ 时, $e^x<1$,即 $f'(x)=e^x-1<0$，故函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上是单调递减的.

(2) 判断函数 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ 在区间 $(0,2)$ 上的单调性.

解 因为 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$,

所以 $f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$.

因为 $0<x<2$,所以 $\ln x<\ln 2<1$,

故 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}>0$,

所以函数 $f(x)$ 在区间 $(0,2)$ 上单调递增.

概念归纳

规律方法

（1）利用导数证明函数 $f(x)$ 在给定区间上的单调性,实质上就是证明 $f'(x)>0$ （或 $f'(x)<0$）在给定区间上恒成立.

（2）利用导数判断可导函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上的单调性,步骤是:①求 $f'(x)$；②确定 $f'(x)$ 在区间 (a,b) 上的符号;③得出结论.

【题型三】求函数的单调区间

例3 求下列函数的单调区间:

(1) $f(x)=2x^3+3x^2-36x+1$;

解 $f(x)$的定义域为$\boldsymbol{R}$，$f'(x)=6x^2+6x-36$.由$f'(x)>0$,得$6x^2+6x-36>0$,解得$x<-3$或$x>2$；由$f'(x)<0$,得$-3<x<2$.故$f(x)$的增区间是$(-\infty,-3)$和$(2,+\infty)$，减区间是$(-3,2)$.

(2) $f(x)=\sin x-x(0<x<\pi)$.

$f'(x)=\cos x-1$.因为$0<x<\pi$,所以$\cos x-1<0$恒成立,故所求的减区间为$(0,\pi)$,无增区间.

概念归纳

规律方法 求函数 $y=f(x)$ 的单调区间的步骤