

广东省潮州市 2023-2024 学年高二上学期期末教学质量检测

数学试题

一、选择题（本题共 12 道小题，其中 1 至 8 小题为单项选择题，9 至 12 小题为多项选择题）

（一）单项选择题（本题共 8 道小题，每小题只有一个选项正确，每小题 5 分，共 40 分）

1. 已知椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ ，则该椭圆的（ ）

- A. 长轴长为 2
B. 短轴长为 $\sqrt{3}$
C. 焦距为 1
D. 离心率为 $\frac{1}{2}$

【答案】D

【解析】由椭圆的方程 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 可知：焦点在 x 轴上，即

$$a^2 = 4, b^2 = 3, c^2 = a^2 - b^2 = 1, \text{ 则 } a = 2, b = \sqrt{3}, c = 1.$$

所以长轴长为 $2a = 4$ ，短轴长为 $2b = 2\sqrt{3}$ ，焦距为 $2c = 2$ ，离心率为 $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$.

故选：D

2. 已知斜率为 $\sqrt{2}$ 的直线经过点 $M(2, m), N(1, 2)$ ，则 $m =$ （ ）

- A. $\sqrt{2} - 2$
B. $\sqrt{2} + 2$
C. 1
D. 0

【答案】B

【解析】因为斜率为 $\sqrt{2}$ 的直线经过点 $M(2, m), N(1, 2)$ ，

$$\text{所以 } k_{MN} = \frac{m-2}{2-1} = \sqrt{2}, \text{ 解得 } m = \sqrt{2} + 2.$$

故选：B.

3. 两平行直线 $l_1: ax + y - 2 = 0$ ， $l_2: 2x - y + 3 = 0$ 之间的距离是（ ）

- A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$
B. $\sqrt{5}$
C. 1
D. 5

【答案】A

【解析】因为 $l_1 \parallel l_2$ ，所以 $\frac{a}{2} = \frac{1}{-1} \neq \frac{-2}{3}$ ，解得 $a = -2$ ，

$$\text{所以两平行直线 } l_1: 2x - y + 2 = 0, l_2: 2x - y + 3 = 0 \text{ 之间的距离 } d = \frac{|2-3|}{\sqrt{4+1}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

故选：A

4. 抛物线 $y^2 = 6x$ 上一点 M 到其焦点的距离为 $\frac{9}{2}$ ，则点 M 到坐标原点的距离为（ ）

高级中学名校试卷

A. $\sqrt{3}$

B. $2\sqrt{3}$

C. $3\sqrt{3}$

D. $4\sqrt{3}$

【答案】C

【解析】设点 $M(x_M, y_M)$.

由抛物线 $y^2 = 6x$ 可得：焦点坐标为 $(\frac{3}{2}, 0)$ ，准线方程为 $x = -\frac{3}{2}$.

因为抛物线 $y^2 = 6x$ 上一点 M 到其焦点的距离为 $\frac{9}{2}$,

所以根据抛物线的定义可得： $x_M + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$ ，解得： $x_M = 3$ ，则 $y_M^2 = 6x_M = 18$.

所以点 M 到坐标原点的距离为 $\sqrt{x_M^2 + y_M^2} = \sqrt{3^2 + 18} = 3\sqrt{3}$.

故选：C.

5. 正项等比数列 $\{a_n\}$ 与正项等差数列 $\{b_n\}$ ，若 $a_1 a_5 = b_5 b_7$ ，则 a_3 与 b_6 的关系是（ ）

A. $a_3 = b_6$

B. $a_3 \geq b_6$

C. $a_3 \leq b_6$

D. 以上都不正确

【答案】C

【解析】设等差数列 $\{b_n\}$ 公差为 d ，则 $b_5 b_7 = (b_6 - d)(b_6 + d) = b_6^2 - d^2$ ，

又 $a_1 a_5 = a_3^2$ ， $\therefore a_3^2 = b_6^2 - d^2 \leq b_6^2$ ， $\{a_n\}, \{b_n\}$ 均为正项数列， $\therefore a_3 \leq b_6$.

故选：C

6. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的渐近线与直线 $y = -1$ 所围成的三角形面积为 2，则该双曲线的离心率为（ ）

A. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

B. $\frac{3}{2}$

C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

D. $\sqrt{5}$

【答案】C

【解析】双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x$ ，

将 $y = -1$ 代入 $y = \pm \frac{b}{a}x$ 中，解得 $x = \pm \frac{a}{b}$ ，

故 $\frac{1}{2} \times \frac{2a}{b} \times 1 = 2$ ，故 $\frac{a}{b} = 2$ ，

故双曲线的离心率 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

故选：C.

高级中学名校试卷

7. 已知点 P 在圆 $C: (x-5)^2 + (y-5)^2 = 16$ 上, 点 $A(4,0), B(0,2)$, 则当 $\angle PBA$ 最小时,

$|PB| = (\quad)$

A. $\sqrt{34}$

B. $3\sqrt{2}$

C. $\sqrt{34} - 4$

D. 4

【答案】B

【解析】 $Q A(4,0), B(0,2)$,

$\therefore$ 过 A, B 的直线方程为 $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1$, 即 $x + 2y - 4 = 0$,

圆 $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 16$ 的圆心坐标为 $(5,5)$,

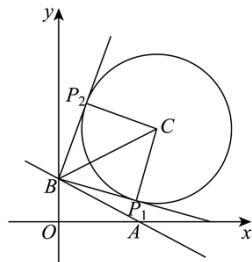
圆心到直线 $x + 2y - 4 = 0$ 的距离 $d = \frac{|1 \times 5 + 2 \times 5 - 4|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{11}{\sqrt{5}} = \frac{11\sqrt{5}}{5} > 4$,

如图, 当过 B 的直线与圆相切时, 满足 $\angle PBA$ 最小或最大 (P 点位于 P_1 时 $\angle PBA$ 最小, 位于 P_2 时 $\angle PBA$ 最大),

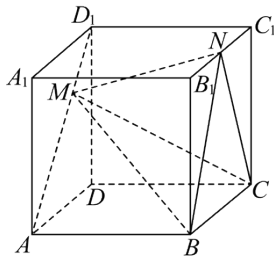
此时 $|BC| = \sqrt{(5-0)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$,

$\therefore |PB| = \sqrt{|BC|^2 - 4^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$,

故选: B



8. 如图, 在棱长为 2 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 M, N 分别在线段 AD_1 和 B_1C_1 上, 则下列结论中错误的结论 ()



A. MN 的最小值为 2

B. 四面体 $NMBC$ 的体积为 $\frac{4}{3}$

C. 有且仅有一条直线 MN 与 AD_1 垂直

D. 存在点 M, N , 使 $\triangle MBN$ 为等边三角形

高级中学名校试卷

【答案】C

【解析】根据正方体的特征可知 $C_1D_1 \perp B_1C_1, C_1D_1 \perp \text{面 } AD_1$,

又 $AD_1 \subset \text{面 } AD_1$, 所以 $C_1D_1 \perp AD_1$,

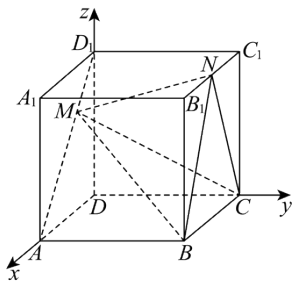
即 C_1D_1 是异面直线 AD_1 和 B_1C_1 的公垂线,

当 $M、N$ 分别与 $D_1、C_1$ 重合时, MN 最小值, 最小值为 2, 故 A 正确;

易知 $S_{\triangle NBC} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$, 所以 $V_{M-NBC} = \frac{1}{3} \times 2 \times 2 = \frac{4}{3}$, 故 B 正确;

易知 $\triangle AB_1D_1$ 是等边三角形, 所以当 M 是 AD_1 中点, 而 N 与 B_1 重合时, $MN \perp AD_1$,

又由 A 项可知当 $M、N$ 分别与 $D_1、C_1$ 重合时, $MN \perp AD_1$, 故 C 错误;



如图所示, 建立空间直角坐标系, 则 $B(2,2,0)$, 可设 $M(x,0,2-x), N(y,2,2)$,

$x, y \in [0, 2]$,

若存在点 M, N , 使 $\triangle MBN$ 为等边三角形, 则有
$$\begin{cases} MN^2 = (x-y)^2 + 4 + x^2 \\ MB^2 = (x-2)^2 + 4 + (2-x)^2 \\ NB^2 = (y-2)^2 + 4 \end{cases}$$

由 $MB^2 = NB^2 \Rightarrow \sqrt{2}(2-x) = 2-y$, 由 $MB^2 = NM^2 \Rightarrow 2x = \frac{8-y^2}{4-y}$,

解方程得 $y = \frac{3\sqrt{2}-2 \pm \sqrt{4\sqrt{2}-2}}{\sqrt{2}-1}$,

当 $y = \frac{3\sqrt{2}-2 + \sqrt{4\sqrt{2}-2}}{\sqrt{2}-1} = \frac{3\sqrt{2}-3+1+\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{\sqrt{2}-1} = 3 + \frac{1+\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{\sqrt{2}-1} > 3$ 舍去,

又因为 $11 < 8\sqrt{2} \Rightarrow (2\sqrt{2}-1)^2 < 4\sqrt{2}-2 \Rightarrow 2\sqrt{2}-1 < \sqrt{4\sqrt{2}-2} \Rightarrow y = \frac{3\sqrt{2}-2-\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{\sqrt{2}-1} \in (0,1)$

所以 $y = \frac{3\sqrt{2}-2-\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{\sqrt{2}-1}$ 符合题意, 即 D 正确.

故选: C

(二) 多项选择题 (本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20

高级中学名校试卷

分，每小题有多个选项正确，每小题全部选对得 5 分，部分选对得 2 分，有选错得 0 分)

9. 已知直线 $l: x + my + 2 = 0$ ，下列结论正确的是 ()

A. 直线 l 在 x 轴上的截距为 -2

B. 当 $m = \sqrt{3}$ 时，直线 l 的倾斜角为 $\frac{2\pi}{3}$

C. 当 $m = 0$ 时，直线 l 的斜率不存在

D. 直线 l 的斜率为 $-\frac{1}{m}$

【答案】AC

【解析】直线 $l: x + my + 2 = 0$ ，当 $y = 0$ 时， $x = -2$ ，则直线 l 在 x 轴上的截距为 -2 ，A 正确；

当 $m = \sqrt{3}$ 时，直线 l 的斜率为 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ，倾斜角为 $\frac{5\pi}{6}$ ，B 错误；

当 $m = 0$ 时，直线 $l: x + 2 = 0$ 垂直于 x 轴，其斜率不存在，C 正确，D 错误.

故选：AC

10. 在空间直角坐标系中，向量 $\vec{a} = (m, 2, 2)$ ， $\vec{b} = (-2, 1, 1)$ ，则下列结论正确的是 ()

A. $|\vec{b}| = \sqrt{6}$

B. 若 $m = -4$ ，则 $\vec{a} \parallel \vec{b}$

C. 若 $m = 1$ ，则 $\vec{a} - \vec{b} = (-3, -1, -1)$

D. 若 $m = 2$ ，则 $\vec{a} \perp \vec{b}$

【答案】ABD

【解析】由 $\vec{b} = (-2, 1, 1)$ 可知 $|\vec{b}| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6}$ ，即 A 正确；

当 $m = -4$ 时，则 $\vec{a} = (-4, 2, 2)$ ， $\vec{b} = (-2, 1, 1)$ ，满足 $\vec{a} = 2\vec{b}$ ，因此 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ，即 B 正确；

当 $m = 1$ 时，易知 $\vec{a} = (1, 2, 2)$ ， $\vec{b} = (-2, 1, 1)$ ，所以 $\vec{a} - \vec{b} = (3, 1, 1)$ ，可知 C 错误；

当 $m = 2$ 时，可得 $\vec{a} = (2, 2, 2)$ ， $\vec{b} = (-2, 1, 1)$ ，满足 $\vec{a} \cdot \vec{b} = -2 \times 2 + 1 \times 2 + 1 \times 2 = 0$ ，可知 $\vec{a} \perp \vec{b}$ ，即 D 正确 故选：ABD

11. 如果方程 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a+6} = 1$ 表示焦点在 x 轴上的椭圆，则实数 a 的取值范围可以是 ()

A. $(-\infty, -2)$

B. $(3, +\infty)$

C. $(-6, -2)$

D. $(-3, +\infty)$

高级中学名校试卷

【答案】BC

【解析】焦点在 x 轴上，则标准方程中 $a^2 > a+6$ ，解得 $a > 3$ 或 $a < -2$ 。

又 $a^2 > 0$ ， $a+6 > 0$ ，得 $a > -6$ ，所以 $a > 3$ 或 $-6 < a < -2$ 。

故选：BC。

12. 在公比 q 为整数的等比数列 $\{a_n\}$ 中， S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $a_1 \cdot a_4 = 32$ ，

$a_2 + a_3 = 12$ ，则下列说法正确的是（ ）

A. 数列 $S_2, S_4, S_6, \dots$ 是等比数列

B. $q = 2$

C. $S_6 = 126$

D. 数列 $\{\lg(S_n + 2)\}$ 是等差数列

【答案】BCD

【解析】因为数列 $\{a_n\}$ 为等比数列，则 $a_2 a_3 = a_1 a_4 = 32$ ，

$$\text{由 } \begin{cases} a_2 a_3 = 32 \\ a_2 + a_3 = 12 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} a_2 = 4 \\ a_3 = 8 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a_2 = 8 \\ a_3 = 4 \end{cases},$$

则 $q = \frac{a_3}{a_2} = 2$ 或 $\frac{1}{2}$ ，又 q 为整数，所以 $q = 2$ ，且 $a_2 = 4$ ， $a_3 = 8$ ，所以 B 选项正确；

$$\text{又 } a_1 = \frac{a_2}{q} = 2, \text{ 所以 } S_n = \frac{2(1-2^n)}{1-2} = 2^{n+1} - 2,$$

则 $S_2 = 2^3 - 2 = 6$ ， $S_4 = 2^5 - 2 = 30$ ， $S_6 = 2^7 - 2 = 126$ ，所以 C 选项正确；

因为 $\frac{S_4}{S_2} \neq \frac{S_6}{S_4}$ ，所以 $S_2, S_4, S_6, \dots$ 不是等比数列，所以 A 选项错误；

$$\text{又有 } \lg(S_{n+1} + 2) - \lg(S_n + 2) = \lg 2^{n+2} - \lg 2^{n+1} = n+2 - n-1 = 1,$$

所以数列 $\{\lg(S_n + 2)\}$ 是公差为 1 的等差数列，所以 D 选项正确；

故选：BCD。

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 圆心为 $C(1,0)$ 且经过点 $M(2,1)$ 的圆的标准方程是_____。

$$\text{【答案】 } (x-1)^2 + y^2 = 2$$

【解析】因为圆心为 $C(1,0)$ 且经过点 $M(2,1)$ ，所以半径

$$r = |CM| = \sqrt{(2-1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}, \text{ 于是该圆的标准方程为: } (x-1)^2 + y^2 = 2.$$

故【答案】为： $(x-1)^2 + y^2 = 2$ 。

高级中学名校试卷

14. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $S_n = 2^{n+1} + \lambda$, 则实数 $\lambda =$ _____.

【答案】 -2

【解析】 根据题意, 等比数列 $\{a_n\}$ 中, 有 $S_n = 2^{n+1} + \lambda$,

$$\text{则 } a_1 = S_1 = 4 + \lambda, \quad a_2 = S_2 - S_1 = (2^3 + \lambda) - (2^2 + \lambda) = 4,$$

$$a_3 = S_3 - S_2 = (2^4 + \lambda) - (2^3 + \lambda) = 8,$$

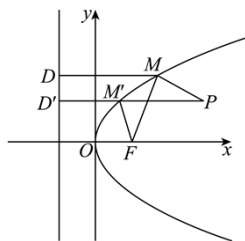
因为 $\{a_n\}$ 是等比数列, 则有 $a_1 a_3 = a_2^2$, 即 $(4 + \lambda) \times 8 = 4^2$, 解可得 $\lambda = -2$.

故【答案】为: -2 .

15. 已知 M 为抛物线 $y^2 = 4x$ 上的动点, F 为抛物线的焦点, $P(4, 2)$, 则 $|MP| + |MF|$ 的最小值为_____.

【答案】 5

【解析】 抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点 $F(1, 0)$, 准线方程为 $x = -1$, 如图所示:



设点 M 在准线上的射影为 D ,

由抛物线的定义知 $|MF| = |MD|$,

所以使得 $|MP| + |MF|$ 的最小值, 则求 $|MP| + |MD|$ 的最小值,

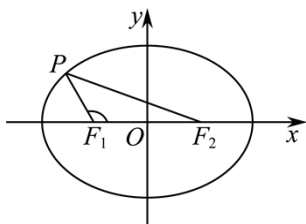
当 D, M, P 三点共线时, $|MP| + |MD|$ 最小, 即点 P 到准线 $x = -1$ 的距离,

则最小值为 $4 - (-1) = 5$.

故【答案】为: 5 .

16. 如图所示, 已知椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 若点 P 为椭圆上的点, 且 $\angle PF_1 F_2 = 120^\circ$,

则 $\triangle PF_1 F_2$ 的面积是_____.



【答案】 $\frac{3\sqrt{3}}{5}$

高级中学名校试卷

【解 析】由已知 $a=2, b=\sqrt{3}$, 得 $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{4-3}=1$,

则 $|F_1F_2|=2c=2$, $|PF_1|+|PF_2|=2a=4$,

在 $\triangle PF_1F_2$ 中, 由余弦定理, 得 $|PF_2|^2=|PF_1|^2+|F_1F_2|^2-2|PF_1||F_1F_2|\cos 120^\circ$,

所以 $|PF_2|^2=|PF_1|^2+4+2|PF_1|$,

由 $|PF_1|+|PF_2|=2a=4$, 得 $|PF_2|=4-|PF_1|$,

所以 $(4-|PF_1|)^2=|PF_1|^2+4+2|PF_1|$, 化简解得 $|PF_1|=\frac{6}{5}$,

所以 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 $\frac{1}{2}|PF_1|\cdot|F_1F_2|\sin 120^\circ=\frac{1}{2}\times\frac{6}{5}\times 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{5}$.

故【答 案】为: $\frac{3\sqrt{3}}{5}$.

三、解答题: 本题共 6 小题, 第 17 题 10 分, 其余各题每题 12 分, 共 70 分; 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 已知圆 C 方程为 $x^2+y^2-2x+4y+1=0$.

(1) 求圆 C 的圆心坐标及半径;

(2) 求直线 $l: x+y-1=0$ 被圆 C 截得的弦长.

解: (1) 由题得圆的方程为 $(x-1)^2+(y+2)^2=4$,

所以圆的圆心坐标为 $(1, -2)$, 半径为 2.

(2) 由题得圆心到直线的距离为 $d=\frac{|1-2-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}$,

所以直线 $l: x+y-1=0$ 被圆 C 截得的弦长为 $2\sqrt{2^2-\sqrt{2}^2}=2\sqrt{2}$.

18. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 公比为 $q>0$ 的等比数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为

$T_n, a_1=2, b_1=1, a_2+b_2=3$.

(1) 若 $a_3+b_3=4$, 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $T_3=13$, 求 S_n .

解: (1) 由题知, 令 $\{a_n\}$ 公差为 d ,

又 $a_1=2, b_1=1$, 且 $a_2+b_2=a_1+d+b_1\cdot q=3$,

所以 $d+q=1$,

又 $a_3+b_3=a_1+2d+b_1\cdot q^2=4$,

高级中学名校试卷

$$\text{所以 } 2d + q^2 = 2,$$

$$\text{所以 } q = 2 \text{ 或 } q = 0,$$

$$\text{又 } q > 0, \text{ 所以 } q = 2,$$

$$\text{则 } b_n = b_1 \cdot q^{n-1} = 2^{n-1}.$$

$$(2) \text{ 若 } T_3 = 13,$$

$$\text{即 } b_1 + b_2 + b_3 = 1 + q + q^2 = 13,$$

$$\text{所以 } q = 3 \text{ 或 } q = -4,$$

$$\text{因为 } q > 0, \text{ 所以 } q = 3,$$

$$\text{又 } a_2 + b_2 = a_1 + d + b_1 \cdot q = 3,$$

$$\text{所以 } d = -2,$$

$$\text{所以 } S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = -n^2 + 3n.$$

19. 在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中, $\triangle ABC$ 是直角三角形, 三个顶点的坐标分别为 $A(t, -t, 3)$, $B(2t, t, 4)$, $C(3t, t+1, 1)$, 求实数 t 的值.

解: 由于三个顶点的坐标分别为 $A(t, -t, 3)$, $B(2t, t, 4)$, $C(3t, t+1, 1)$,

$$\overrightarrow{AB} = (t, 2t, 1), \overrightarrow{BA} = (-t, -2t, -1), \overrightarrow{AC} = (2t, 2t+1, -2), \overrightarrow{CA} = (-2t, -2t-1, 2),$$

$$\overrightarrow{CB} = (-t, -1, 3), \overrightarrow{BC} = (t, 1, -3),$$

$$\text{当 } \angle A = \frac{\pi}{2} \text{ 时, } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0, \text{ 即 } 3t^2 + t - 1 = 0, \text{ 解得 } t = \frac{-1 - \sqrt{13}}{6} \text{ 或 } t = \frac{-1 + \sqrt{13}}{6};$$

$$\text{当 } \angle B = \frac{\pi}{2} \text{ 时, } \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0, \text{ 即 } t^2 + 2t - 3 = 0, \text{ 解得 } t = -3 \text{ 或 } t = 1;$$

$$\text{当 } \angle C = \frac{\pi}{2} \text{ 时, } \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0, \text{ 即 } 2t^2 + 2t + 7 = 0, \text{ 无解;}$$

$$\text{综上所述: } t \text{ 的值为: } \frac{-1 - \sqrt{13}}{6} \text{ 或 } \frac{-1 + \sqrt{13}}{6} \text{ 或 } -3 \text{ 或 } 1.$$

20. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $3a_n - 2S_n = 1$, 在等差数列 $\{b_n\}$ 中, $b_4 = 7, b_3 + 2b_8 = 35$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $c_n = \frac{b_n}{a_n}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

高级中学名校试卷

解：(1) 当 $n=1$ 时， $3a_1 - 2S_1 = 3a_1 - 2a_1 = 1$ ，即 $a_1 = 1$ ；

当 $n \geq 2$ 时，由 $3a_n - 2S_n = 1$ 得 $3a_{n-1} - 2S_{n-1} = 1$ ，

则两式相减得 $3a_n - 3a_{n-1} - 2(S_n - S_{n-1}) = 0$ ，即 $a_n = 3a_{n-1}$ ， $\frac{a_n}{a_{n-1}} = 3$ ，

综上所述， $\{a_n\}$ 是首项 $a_1 = 1$ ，公比 $q = 3$ 的等比数列，

则 $a_n = a_1 q^{n-1} = 1 \times 3^{n-1} = 3^{n-1}$ ，即 $a_n = 3^{n-1}$ 。

设等差数列 $\{b_n\}$ 的公差为 d ，则 $\begin{cases} b_4 = b_1 + 3d = 7 \\ b_3 + 2b_8 = b_1 + 2d + 2(b_1 + 7d) = 35 \end{cases}$ ，

即 $\begin{cases} b_1 + 3d = 7 \\ 3b_1 + 16d = 35 \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} b_1 = 1 \\ d = 2 \end{cases}$ ，

所以 $b_n = b_1 + (n-1)d = 2n-1$ ，即 $b_n = 2n-1$ 。

故 $a_n = 3^{n-1}$ ， $b_n = 2n-1$ 。

(2) 由 (1) 知， $c_n = \frac{b_n}{a_n} = \frac{2n-1}{3^{n-1}}$ ，

则 $T_n = \frac{1}{3^0} + \frac{3}{3^1} + \frac{5}{3^2} + \dots + \frac{2n-1}{3^{n-1}}$ ①，

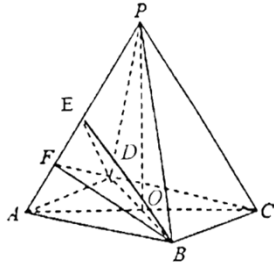
$\frac{1}{3}T_n = \frac{1}{3^1} + \frac{3}{3^2} + \frac{5}{3^3} + \dots + \frac{2n-1}{3^n}$ ②，

①-②得 $\frac{2}{3}T_n = \frac{1}{3^0} + \frac{3-1}{3^1} + \frac{5-3}{3^2} + \dots + \frac{2n-1-(2n-3)}{3^{n-1}} - \frac{2n-1}{3^n}$ ，

整理得 $\frac{2}{3}T_n = 1 + 2\left(\frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{n-1}}\right) - \frac{2n-1}{3^n}$
 $= 1 + 2 \times \frac{\frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{1}{3^{n-1}}\right)}{1 - \frac{1}{3}} - \frac{2n-1}{3^n} = 1 + \left(1 - \frac{1}{3^{n-1}}\right) - \frac{2n-1}{3^n} = 2 - \frac{2(n+1)}{3^n}$ ，

即 $\frac{2}{3}T_n = 2 - \frac{2(n+1)}{3^n}$ ，所以 $T_n = 3 - \frac{n+1}{3^{n-1}}$ 。

21. 如图所示，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面四边形 $ABCD$ 是菱形， $AC \perp BD = O$ ， $\triangle PAC$ 是边长为 2 的等边三角形， E 为 AP 的中点， $PB = PD = \sqrt{6}$ ， $AP = 4AF$ 。



(1) 求证: $PC \parallel$ 平面 BDE ;

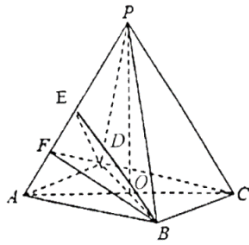
(2) 求直线 CP 与平面 BDF 所成角的大小.

解: (1) 因为底面四边形 $ABCD$ 是菱形, $AC \cap BD = O$,

所以 O 是 AC 的中点, 又 E 是 AP 的中点,

$\therefore PC \parallel EO$, $PC \not\subset$ 平面 BDE , $EO \subset$ 平面 BDE ,

$\therefore PC \parallel$ 平面 BDE .



(2) 底面四边形 $ABCD$ 是菱形, $AC \cap BD = O$, 所以 O 是 AC , BD 的中点,

又 $\triangle PAC$ 是等边三角形,

$\therefore OP \perp AC$, 又 $PB = PD$, $\therefore OP \perp BD$,

又 $AC \cap BD = O$, $AC, BD \subset$ 平面 $ABCD$,

$\therefore OP \perp$ 平面 $ABCD$. 又 $AC \perp BD$,

所以 OP, AC, BD 两两互相垂直, 建立如图所示的空间直角坐标系,

由 $\triangle PAC$ 是边长为 2 的等边三角形, $PB = PD = \sqrt{6}$, 可得 $OP = OB = OD = \sqrt{3}$,

$\therefore A(1, 0, 0)$, $B(0, \sqrt{3}, 0)$, $C(-1, 0, 0)$, $P(0, 0, \sqrt{3})$,

$\therefore \vec{CP} = (1, 0, \sqrt{3})$, $\vec{AP} = (-1, 0, \sqrt{3})$, 由已知得 $\vec{OF} = \vec{OA} + \vec{AF} = \vec{OA} + \frac{1}{4}\vec{AP} = \left(\frac{3}{4}, 0, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$,

设平面 BDF 的一个法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{OB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{OF} = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} \sqrt{3}y = 0 \\ \frac{3}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}z = 0 \end{cases}, \text{ 令 } x = 1, \text{ 得 } y = 0, z = -\sqrt{3},$$

$$\text{所以 } \vec{n} = (1, 0, -\sqrt{3}), \therefore \cos \langle \vec{CP}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{CP} \cdot \vec{n}}{|\vec{CP}| |\vec{n}|} = \frac{1-3}{2 \times 2} = -\frac{1}{2},$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/375240214331011134>