安徽省芜湖市安徽师范大学附属中学2024届高三第二次模拟考试数学试题

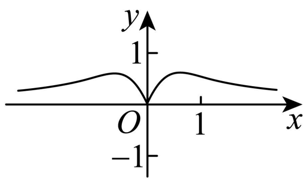
学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

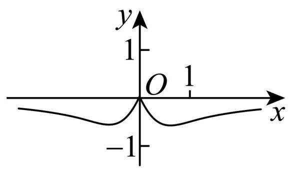
一、单选题

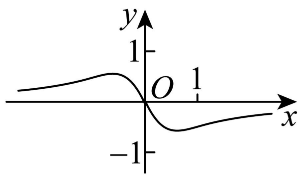
1．已知A，B是全集U的非空子集，且$A\subseteq \complement_U B$，则（　　）

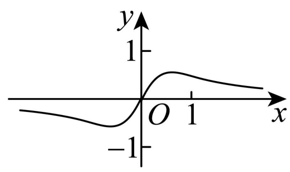
A．$B\subseteq A$　　B．$B\subseteq \complement_U A$　　C．$\complement_U A\subseteq \complement_U B$　　D．$A\subseteq B$

2．我国著名数学家华罗庚先生曾说：数缺形时少直观，形缺数时难入微，数形结合百般好，隔裂分家万事休．在数学的学习和研究中，常用函数的图象来研究函数的性质，也常用函数的解析式来分析函数的图象特征．则函数$f(x)=-\dfrac{2x}{x^2+1}$的图象大致为（　　）

A．

B．

C．

D．

3．已知复数$z=a+b\mathrm{i}\left(a,b\in\mathbf{R}\right)$且$x^2-\left(4+2\mathrm{i}\right)x+4+a\mathrm{i}=0$有实数根$b$，则$\left|z^2\right|=$（　　）

A．$2\sqrt{3}$　　B．12　　C．$2\sqrt{5}$　　D．20

4．已知等边$\triangle ABC$的边长为2，点D、E分别为AB,BC的中点，若$\overrightarrow{DE}=2\overrightarrow{EF}$，则$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{AF}=$（　　）

A．1　　B．$\dfrac{4}{5}$　　C．$\dfrac{6}{5}$　　D．$\dfrac{5}{4}$

5．已知F_1，F_2是双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$的左、右焦点，若双曲线上存在点$P$满足$\overrightarrow{PF_2}\cdot\overrightarrow{PF_1}=-2a^2$，则双曲线离心率的最小值为（　　）

A．$\sqrt{6}$　　B．$\sqrt{5}$　　C．2　　D．$\sqrt{3}$

6．在数列$\{a_n\}$中，S_n为其前n项和，首项$a_1=1$，且函数$f\left(x\right)=x^3-a_{n+1}\sin x+\left(2a_n+1\right)x+1$的导函数有唯一零点，则$S_5=$（　　）

A．26　　B．63　　C．57　　D．25

7. 已知函数 $f\left(x\right)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f\left(x+2\right)-2$ 为奇函数，$f\left(3x+1\right)$ 为偶函数，$f\left(1\right)=0$，则 $\sum_{k=1}^{2024}f\left(k\right)=$（　）

A．4036　　B．4040　　C．4044　　D．4048

8．已知直线 l：$Ax+By+C=0\left(A^2+B^2\neq 0\right)$ 与曲线 W：$y=x^3-x$ 有三个交点 D、E、F，且 $\left|DE\right|=\left|EF\right|=2$，则以下能作为直线 l 的方向向量的坐标是（　）.

A．$\left(0,1\right)$　　B．$\left(1,-1\right)$　　C．$\left(1,1\right)$　　D．$\left(1,0\right)$

二、多选题

9．已知由样本数据 $\left(x_i,y_i\right)$（i=1，2，3，…，10）组成的一个样本，得到回归直线方程为 $\hat{y}=-x+3$，且 $\overline{x}=4$．剔除一个偏离直线较大的异常点 $\left(-5,-1\right)$ 后，得到新的回归直线经过点 $\left(6,-4\right)$．则下列说法正确的是

A．相关变量 x，y 具有正相关关系

B．剔除该异常点后，样本相关系数的绝对值变大

C．剔除该异常点后的回归直线方程经过点 $\left(5,-1\right)$

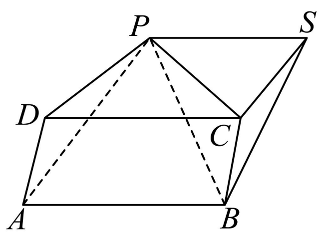
D．剔除该异常点后，随 x 值增加相关变量 y 值减小速度变小

10．在平面直角坐标系 xOy 中，角 θ 以坐标原点 O 为顶点，以 x 轴的非负半轴为始边，其终边经过点 $M\left(a,b\right)$，$\left|OM\right|=m\left(m\neq 0\right)$，定义 $f\left(\theta\right)=\dfrac{b+a}{m}$，$g\left(\theta\right)=\dfrac{b-a}{m}$，则（　）

A．$f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)+g\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=1$　　B．$f\left(\theta\right)+f^2\left(\theta\right)\geq 0$

C．若 $\dfrac{f\left(\theta\right)}{g\left(\theta\right)}=2$，则 $\sin 2\theta=\dfrac{3}{5}$　　D．$f\left(\theta\right)g\left(\theta\right)$ 是周期函数

11．如图，多面体 $PS-ABCD$ 由正四棱锥 $P-ABCD$ 和正四面体 $S-PBC$ 组合而成，其中 $PS=1$，则下列关于该几何体叙述正确的是（　）



A．该几何体的体积为 $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　　B．该几何体为七面体

C．二面角 $A-PB-C$ 的余弦值为 $-\frac{1}{3}$　　D．该几何体为三棱柱

三、填空题

12．从某工厂生产的零件中随机抽取11个，其尺寸值为43，45，45，45，49，50，50，51，51，53，57（单位：mm），现从这11个零件中任取3个，则3个零件的尺寸刚好为这11个零件尺寸的平均数、第六十百分位数、众数的概率为______.

13．已知偶函数 $f\left(x\right)=\sin\left(\omega x+\varphi\right)\left(\omega>0\right)$ 的图像关于点 $\left(\frac{\pi}{3},0\right)$ 中心对称，且在区间 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上单调，则 $\omega=$______.

14．若实数 x，y 满足 $x^2+y^2=25$，则 $\sqrt{50+8x+6y}+\sqrt{50+8x-6y}$ 的最大值为______

四、解答题

15．已知函数 $f\left(x\right)=\ln x+\frac{a}{x}-ax$，$a\in\mathrm{R}$

(1)若 $f\left(x\right)$ 在定义域内是减函数，求 a 的取值范围；

(2)当 $a<\frac{1}{2}$ 时，求 $f\left(x\right)$ 的极值点.

16．据新华社北京2月26日报道，中国航天全年预计实施100次左右发射任务，有望创造新的纪录，我国首个商业航天发射场将迎来首次发射任务，多个卫星星座将加速组网建设；中国航天科技集团有限公司计划安排近70次宇航发射任务，发射290余个航天器，实施一系列重大工程任务.由于航天行业拥有广阔的发展前景，有越来越多的公司开始从事航天研究，某航天公司研发了一种火箭推进器，为测试其性能，对推进器飞行距离与损坏零件数进行了统计，数据如下：

飞行距离 x（kkm）	56	63	71	79	90	102	110	117
损坏零件数 y（个）	61	73	90	105	119	136	149	163

参考数据：$\overline{x}=86$，$\overline{y}=112$，$\sum_{i=1}^{8}x_iy_i=82743$，$\sum_{i=1}^{8}x_i^2=62680$

(1)建立 y 关于 x 的回归模型 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$，根据所给数据及回归模型，求 y 关于 x 的回归方程（$\hat{b}$ 精确到0.1，$\hat{a}$ 精确到1）；

(2)该公司进行了第二项测试，从所有同型号推进器中随机抽取100台进行等距离飞行测试，对其中60台进行飞行前保养，测试结束后，有20台报废，其中保养过的推进器占比30%，请根据统计数据完成2×2列联表，并根据小概率值 $\alpha=0.01$ 的独立性检验，能

否认为推进器是否报废与保养有关？

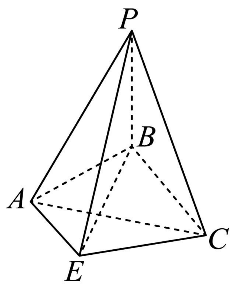
	保养	未保养	合计
报废			20
未报废			
合计	60		100

附：回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 中斜率和截距的最小二乘估计公式分别为 $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}$，

$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$，$K^2=\dfrac{n\left(ad-bc\right)^2}{\left(a+b\right)\left(c+d\right)\left(a+c\right)\left(b+d\right)}$，$n=a+b+c+d$；

$P\left(K^2\ge k_0\right)$	0.25	0.1	0.05	0.025	0.01	0.001
k_0	1.323	2.706	3.841	5.024	6.635	10.828

17．在三棱锥 $P-ABC$ 中，$PB\perp$ 平面 ABC，$AB=BC=BP=2$，点 E 在平面 ABC 内，且满足平面 $PAE\perp$ 平面 PBE,BA 垂直于 BC．



(1)当 $\angle ABE\in\left[\dfrac{\pi}{8},\dfrac{\pi}{3}\right]$ 时，求点 E 的轨迹长度；

(2)当二面角 $E-PA-B$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 时，求三棱锥 $E-PCB$ 的体积．

18．在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 W：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ 的离心率为 e，已知椭圆长轴长是短轴长的 2 倍，且椭圆 W 过点 $\left(1,e\right)$．

(1)求椭圆 W 的方程；

(2)已知平行四边形 $ABCD$ 的四个顶点均在 W 上，求平行四边形 $ABCD$ 的面积 S 的最大值．

19．对称变换在对称数学中具有重要的研究意义．若一个平面图形 K 在 m（旋转变换或反射变换）的作用下仍然与原图形重合，就称 K 具有对称性，并记 m 为 K 的一个对称

变换．例如，正三角形 R 在 m_1（绕中心 O 作 120°的旋转）的作用下仍然与 R 重合（如图 1 图 2 所示），所以 m_1 是 R 的一个对称变换，考虑到变换前后 R 的三个顶点间的对应关系，记 $m_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$；又如，$R$ 在 l_1（关于对称轴 r_1 所在直线的反射）的作用下仍然与 R 重合（如图 1 图 3 所示），所以 l_1 也是 R 的一个对称变换，类似地，记 $l_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$．记正三角形 R 的所有对称变换构成集合 S．一个非空集合 G 对于给定的代数运算.来说作成一个群，假如同时满足：

I．$\forall a,b\in G$，$a\circ b\in G$；

II．$\forall a,b,c\in G$，$(a\circ b)\circ c=a\circ(b\circ c)$；

III．$\exists e\in G$，$\forall a\in G$，$a\circ e=e\circ a=a$；

IV．$\forall a\in G$，$\exists a^{-1}\in G$，$a\circ a^{-1}=a^{-1}\circ a=e$．

对于一个群 G，称III中的 e 为群 G 的单位元，称IV中的 a^{-1} 为 a 在群 G 中的逆元．一个群 G 的一个非空子集 H 叫做 G 的一个子群，假如 H 对于 G 的代数运算∘来说作成一个群．

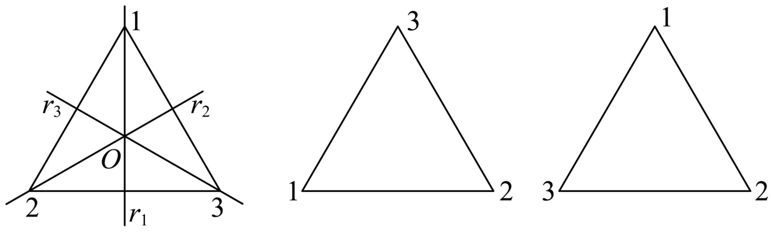


图1　　图2　　图3

(1)直接写出集合 S（用符号语言表示 S 中的元素）；

(2)同一个对称变换的符号语言表达形式不唯一，如

$m_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&2\\3&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&3\\1&3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3&1\\1&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1&2\\2&3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2&1\\2&1&3\end{pmatrix}$．对于集合 S 中的元素，定义一种新运算*，规则如下：$\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3\\c_1&c_2&c_3\end{pmatrix}$，

$\{a_1,a_2,a_3\}=\{b_1,b_2,b_3\}=\{c_1,c_2,c_3\}=\{1,2,3\}$．

①证明集合 S 对于给定的代数运算*来说作成一个群；

②已知 H 是群 G 的一个子群，e，e' 分别是 G，H 的单位元，$a\in H$，a^{-1}，a' 分别是 a 在群 G，群 H 中的逆元．猜想 e，e' 之间的关系以及 a^{-1}，a' 之间的关系，并给出证明；

③写出群 S 的所有子群．

参考答案：

1．B

【分析】根据 Venn 图，结合子集和集合间的运算理解判断.

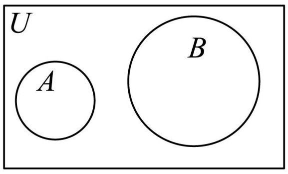
【详解】由题意知 $A \subseteq \complement_U B$，从而可得 Venn 图如下图，

对 A、D：由 Venn 图，可得 $B \cap A = \varnothing$，故 A、D 错误；

对 B：因为 $B \cap A = \varnothing$，$B \subseteq \complement_U A$ 正确，故 B 正确；

对 C：因为 $B \cap A = \varnothing$，则 $\complement_U A \subseteq \complement_U B$ 错误，故 C 错误；

故选：B.



2．C

【分析】

利用排除法，根据函数奇偶性和函数值的符号性分析判断.

【详解】由题意可知：$f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，关于原点对称，

且 $f(-x) = -\dfrac{-2x}{(-x)^2+1} = \dfrac{2x}{x^2+1} = -f(x)$，可知 $f(x)$ 为奇函数，排除 AB，

且 $f(1) = -1 < 0$，排除 D.

故选：C.

3．D

【分析】根据题意可求得 $b^2-4b+4+(2b+a)\mathrm{i}=0$，从而得 $\begin{cases} b^2-4b+4=0 \\ (2b+a)\mathrm{i}=0 \end{cases}$，求解得 $z=-4+2\mathrm{i}$，从而可求解.

【详解】由题意知 b 为 $x^2-(4+2\mathrm{i})x+4+a\mathrm{i}=0$ 的实数根，

则 $b^2-(4+2\mathrm{i})b+4+a\mathrm{i}=0$，即 $b^2-4b+4+(a-2b)\mathrm{i}=0$，

则 $\begin{cases} b^2-4b+4=0 \\ (a-2b)\mathrm{i}=0 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} b=2 \\ a=4 \end{cases}$，所以 $z=4+2\mathrm{i}$，

所以$\left|z^2\right|=4^2+2^2=20$，故 D 正确.

故选：D.

4．A

【分析】取$\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{AB}$为基底，利用平面向量基本定理表示出$\overrightarrow{EF},\overrightarrow{AF}$，进行数量积运算即可.

【详解】在$\triangle ABC$中，取$\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}$为基底，则$\left|\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right|=2,\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}=60^\circ$.

因为点D、E分别为AB,BC的中点，

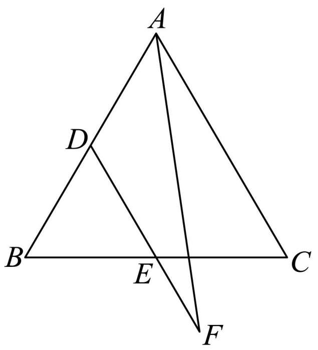
$\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$，

$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$，

$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{AF}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{8}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{3}{16}\overrightarrow{AC}^{\,2}$

$=\frac{1}{8}\times2\times2\times\cos60^\circ+\frac{3}{16}\times4=1$

故选：A



5．D

【分析】

设P的坐标，代入双曲线的方程，利用数量积的坐标表示，结合双曲线离心率的计算公式求解即得.

【详解】

设$P(x_0,y_0)$，双曲线的半焦距为c，则有$|x_0|\geq a$，$\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=1$，$F_1(-c,0),F_2(c,0)$，

于是$\overrightarrow{PF_2}=(c-x_0,-y_0),\overrightarrow{PF_1}=(-c-x_0,-y_0)$，

因此$\overrightarrow{PF_2}\cdot\overrightarrow{PF_1}=x_0^2-c^2+y_0^2=x_0^2+(\frac{x_0^2}{a^2}-1)b^2-c^2=\frac{c^2}{a^2}x_0^2-b^2-c^2\geq\frac{c^2}{a^2}a^2-b^2-c^2=-b^2$，

当且仅当$|x_0|=a$时取等号，则$-2a^2\ge -b^2$，即$\frac{b^2}{a^2}\ge 2$，离心率$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}\ge\sqrt{3}$，

所以双曲线离心率的最小值为$\sqrt{3}$.

故选：D

6．C

【分析】

计算$f'\left(x\right)$，分析$f'\left(x\right)$的奇偶性，可判断零点取值，代入计算可得$\left\{a_n\right\}$的递推关系，求出前5项，计算求和即可.

【详解】因为$f\left(x\right)=x^3-a_{n+1}\sin x+\left(2a_n+1\right)x+1$，

所以$f'\left(x\right)=3x^2-a_{n+1}\cos x+\left(2a_n+1\right)$，由题意可知：$f'\left(x\right)=0$有唯一零点.

令$g\left(x\right)=f'\left(x\right)=3x^2-a_{n+1}\cos x+\left(2a_n+1\right)$，可知$g\left(x\right)$为偶函数且有唯一零点，

则此零点只能为0，即$g\left(0\right)=0$，代入化简可得：$a_{n+1}=2a_n+1$，

又$a_1=1$，所以$a_2=3$，$a_3=7$，$a_4=15$，$a_5=31$，所以$S_5=57$.

故选：C

7．D

【分析】根据题中$f\left(x+2\right)-2$为奇函数，$f\left(3x+1\right)$为偶函数，从而可得出$f\left(x\right)$为周期为4的函数，从而可求解.

【详解】由题意得$f\left(x+2\right)-2$为奇函数，所以$f\left(x+2\right)-2+f\left(-x+2\right)-2=0$，即

$f\left(x+2\right)+f\left(-x+2\right)=4$，所以函数$f\left(x\right)$关于点$\left(2,2\right)$中心对称，

由$f\left(3x+1\right)$为偶函数，所以可得$f\left(x+1\right)$为偶函数，则$f\left(x+1\right)=f\left(-x+1\right)$，所以函数$f\left(x\right)$关于直线$x=1$对称，

所以$f\left(x+2\right)=f\left(-x\right)=-f\left(-x+2\right)$，从而得$f\left(x\right)=f\left(x+4\right)$，所以函数$f\left(x\right)$为周期为4的函数，

因为$f\left(1\right)=0$，所以$f\left(1\right)+f\left(3\right)=4$，则$f\left(3\right)=4$，

因为$f\left(x\right)$关于直线$x=1$对称，所以$f\left(3\right)=f\left(-1\right)=4$，

又因为$f\left(x\right)$关于点$\left(2,2\right)$对称，所以$f\left(2\right)=2$，

又因为$f\left(4\right)=f\left(-2\right)=-f\left(0\right)$，又因为$f\left(-2\right)=f\left(-2+4\right)=f\left(2\right)=2$，所以

$f\left(1\right)+f\left(2\right)+f\left(3\right)+f\left(4\right)=8$，

所以$\sum_{k=1}^{2024}f\left(k\right)=\frac{2024}{4}\times\left[f\left(1\right)+f\left(2\right)+f\left(3\right)+f\left(4\right)\right]=4048$，故 D 正确.

故选：D.

8．C

【分析】

由函数$y=x^3-x$的性质可得曲线W的对称中心$(0,0)$，即得$E(0,0)$，再根据给定长度求出点D的坐标即得.

【详解】显然函数$f(x)=x^3-x$的定义域为**R**，$f(-x)=(-x)^3-(-x)=-f(x)$，即函数$f(x)$是奇函数，

因此曲线W的对称中心为$(0,0)$，由直线l与曲线W的三个交点D,E,F满足$|DE|=|EF|=2$，得$E(0,0)$，

设$D(x,x^3-x)$，则$x^2+(x^3-x)^2=4$，令$x^2=t$，则有$t^3-2t^2+2t-4=0$，即$(t^2+2)(t-2)=0$，

解得$t=2$，即$x=\pm\sqrt{2}$，因此点$D(\sqrt{2},\sqrt{2})$或$D(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$，$\overline{ED}=(\sqrt{2},\sqrt{2})$或$\overline{ED}=(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$，

选项中只有坐标为$(1,1)$的向量与$\overline{ED}$共线，能作为直线l的方向向量的坐标是$(1,1)$.

故选：C

【点睛】

关键点点睛：本题的关键首先是得到曲线对称中心为$(0,0)$，从而得到$E(0,0)$，然后再去设点D坐标，根据$|DE|=2$，得到高次方程，利用换元法结合因式分解解出D的坐标即可.

9．BC

【分析】

根据给定条件，求出新样本的中心点，进而求出新回归直线的斜率，再逐项判断即得.

【详解】依题意，原样本中，$\overline{y}=-4+3=-1$，

剔除一个偏离直线较大的异常点$(-5,-1)$后，新样本中，

$\overline{x'}=\frac{4\times10-(-5)}{9}=5,\overline{y'}=\frac{-1\times10-(-1)}{9}=-1$，

因此剔除该异常点后的回归直线方程经过点$(5,-1)$，C 正确；

由新的回归直线经过点$(6,-4)$，得新的回归直线斜率为$\frac{-4-(-1)}{6-5}=-3$，因此相关变量x，y具有负相关关系，A 错误；

又$|-3|>1$，则剔除该异常点后，随x值增加相关变量y值减小速度变大，D 错误；

由剔除的是偏离直线较大的异常点，得剔除该点后，新样本数据的线性相关程度变强，即样本相关系数的绝对值变大，B 正确.

故选：BC

10．ACD

【分析】根据题意分别求出$\cos\theta=\frac{a}{m}$，$\sin\theta=\frac{b}{m}$，则$f(\theta)=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$，$g(\theta)=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$，从而可对 A 判断求解，利用换元法令

$t=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\in\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$可对 B 判断求解，由$\frac{f(\theta)}{g(\theta)}=\frac{\tan\theta+1}{\tan\theta-1}=2$求出

$\tan\theta=3$，并结合$\sin2\theta==\frac{2\tan\theta}{\tan^2\theta+1}$从而可对 C 判断求解，由$f(\theta)g(\theta)=-\cos2\theta$可对 D 判断求解.

【详解】由题意得$M(a,b)$在角θ的终边上，且$|OM|=m$，所以$\cos\theta=\frac{a}{m}$，$\sin\theta=\frac{b}{m}$，

则$f(\theta)=\frac{b+a}{m}=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$，$g(\theta)=\frac{b-a}{m}=\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$，

对 A：$f\left(\frac{\pi}{6}\right)+g\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{6}=1$，故 A 正确；

对 B：$f(\theta)+f^2(\theta)=\sin\theta+\cos\theta+(\sin\theta+\cos\theta)^2$，令

$t=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\in\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$，

所以$f(\theta)+f^2(\theta)=t+t^2=\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\geq-\frac{1}{4}$，故 B 错误；

对 C：$\frac{f(\theta)}{g(\theta)}=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}=\frac{\tan\theta+1}{\tan\theta-1}=2$，解得$\tan\theta=3$，

又由$\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta=\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=\frac{2\tan\theta}{\tan^2\theta+1}=\frac{2\times3}{3^2+1}=\frac{3}{5}$，故 C 正确；

对 D：$f(\theta)g(\theta)=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin\theta-\cos\theta)=\sin^2\theta-\cos^2\theta=-\cos2\theta$，因为$y=\cos2\theta$为