第7讲 拉普拉斯变换的基本性质

1、唯一性

$$\left.\begin{array}{l} L[f(t)]=F(s) \\ L^{-1}[F(s)]=f(t) \end{array}\right\} \text{等价} \Longleftrightarrow f(t) \underset{L^{-1}}{\overset{L}{\rightleftarrows}} F(s)$$

$f(t)$与$F(s)$一一对应

2、线性性质

若$L[f_1(t)]=F_1(s)$，$L[f_2(t)]=F_2(s)$

则$L[af_1(t)\pm bf_2(t)]=aF_1(s)\pm bF_2(s)$　　（a、b为常数）

例1　$L[10-2e^{-5t}]=\dfrac{10}{s}-\dfrac{2}{s+5}$

例2　$L[\sin\omega t]=L[\dfrac{1}{2\mathrm{j}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t})]$　欧拉公式

$$=\frac{1}{2\mathrm{j}}\left[\frac{1}{s-\mathrm{j}\omega}-\frac{1}{s+\mathrm{j}\omega}\right]=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

3、微分定理——时域微分定理

设$L[f(t)]=F(s)$ 则$L[\frac{df(t)}{dt}]=sF(s)-f(0)$

$$L[\frac{d^2f(t)}{dt^2}]=s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$$

$$L[\frac{d^nf(t)}{dt^n}]=s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\ldots-f^{(n-1)}(0)$$

例1 $L[\cos\omega t]=L[\frac{1}{\omega}\frac{d\sin\omega t}{dt}]=\frac{1}{\omega}[s\frac{\omega}{s^2+\omega^2}-\sin\omega t\Big|_0]=\frac{s}{s^2+\omega^2}$

微分定理——s域（复频域）微分定理

设$L[f(t)]=F(s)$　　则$L[tf(t)]=(-1)^1\frac{dF(s)}{ds}$

$$L[t^n f(t)]=(-1)^n\frac{d^nF(s)}{ds^n}$$

例 2　$L[t\sin at]=?$

$$L[t\sin at]=(-1)^1\frac{dF(s)}{ds}=(-1)^1\left(\frac{a}{s^2+a^2}\right)'=\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$$

4、积分定理——时域积分

设$L[f(t)]=F(s)$　　则$L[\int_0^t f(\tau)d\tau]=\frac{1}{s}F(s)$

例 1　$L[t]=L[\int_0^t u(\tau)d\tau]=\frac{L[u(t)]}{s}=\frac{1}{s^2}$

积分定理——s域积分

设$L[f(t)]=F(s)$　　则$\int_s^\infty F(s)ds \xrightarrow{L^{-1}} \frac{f(t)}{t}$

例2　$L^{-1}[\int_s^\infty \frac{1}{s+a}ds] = L^{-1}[\int_s^\infty F(s)ds] = \frac{e^{-at}}{t}$

5、平移定理——时域平移

设$L[f(t)]=F(s)$　　则 $L[f(t-t_0)]=F(s)\cdot e^{-t_0 s}$

例1： $L[u(t-t_0)]=\frac{1}{s}e^{-t_0 s}$

平移定理—— s域平移

设$L[f(t)]=F(s)$　　则$L[e^{-at}f(t)]=F(s+a)$

例2　$L[(2t+1)e^{-at}]=L[2te^{-at}+e^{-at}]=\dfrac{2}{(s+\alpha)^2}+\dfrac{1}{s+\alpha}$

例3　$L[e^{-at}\cos\omega t]=\dfrac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$

6、初值定理和终值定理

初值定理　若$L[f(t)]=F(s)$，且$f(t)$在$t=0$处无冲激，

$$\text{则}\quad f(0^+)=\lim_{t\to 0^+} f(t)=\lim_{s\to\infty} sF(s)$$

终值定理　若$f(t)$及其导数$f'(t)$可进行拉氏变换，且 $\lim_{t\to\infty} f(t)$存在时

$$\text{则}\quad f(\infty)=\lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{s\to 0} sF(s)$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/376032104234010050