清华大学 2024 年高三第三次模拟考试数学试卷

注意事项：

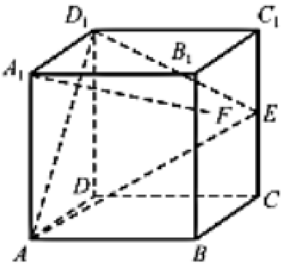
1． 答题前，考生先将自己的姓名、准考证号填写清楚，将条形码准确粘贴在考生信息条形码粘贴区。
2．选择题必须使用 2B 铅笔填涂；非选择题必须使用 0．5 毫米黑色字迹的签字笔书写，字体工整、笔迹清楚。
3．请按照题号顺序在各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试题卷上答题无效。
4．保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱，不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．下列不等式成立的是（　　）

A． $\sin\frac{1}{2}>\cos\frac{1}{2}$　　**B．** $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}>\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$　　**C．** $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}<\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{2}$　　**D．** $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}>\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$

2．在正方体 AC_1 中，**E** 是棱 CC_1 的中点，**F** 是侧面 BCC_1B_1 内的动点，且 A_1F 与平面 D_1AE 的垂线垂直，如图所示，下列说法不正确的是（　　）



A． 点 **F** 的轨迹是一条线段　　**B．** A_1F 与 **BE** 是异面直线

C． A_1F 与 D_1E 不可能平行　　**D．** 三棱锥 $F-ABD_1$ 的体积为定值

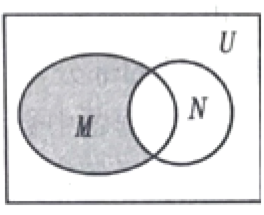
3．已知向量 $\overrightarrow{AB}=(3,2)$，$\overrightarrow{AC}=(5,-1)$，则向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 的夹角为（　　）

A． $45°$　　**B．** $60°$　　**C．** $90°$　　**D．** $120°$

4．函数 $y=\sqrt{4-x^2}$ 的定义域为 A，集合 $B=\left\{x\left|\log_2(x+1)>1\right.\right\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A． $\left\{x|1<x\le 2\right\}$　　**B．** $\left\{x|-2\le x\le 2\right\}$　　**C．** $\left\{x|-2<x<3\right\}$　　**D．** $\left\{x|1<x<3\right\}$

5．已知全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $M=\{x\,|-3<x<1\}$，$N=\{x\,||\,x\,|\le 1\}$，则阴影部分表示的集合是（　　）



A． $[-1,1]$　　**B．** $(-3,1]$　　**C．** $(-\infty,-3)\cup(-1,+\infty)$　　**D．** $(-3,-1)$

6．已知 P 与 Q 分别为函数 $2x-y-6=0$ 与函数 $y=x^2+1$ 的图象上一点，则线段 $|PQ|$ 的最小值为(　　)

A．$\frac{6}{5}$　　　　**B**．$\sqrt{5}$　　　　**C**．$\frac{6\sqrt{5}}{5}$　　　　**D**．6

7．已知点 F_2 为双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{4}=1(a>0)$ 的右焦点，直线 $y=kx$ 与双曲线交于 ***A***，***B*** 两点，若 $\angle AF_2B=\frac{2\pi}{3}$，则 $\text{V}AF_2B$ 的面积为（　　）

A．$2\sqrt{2}$　　　　**B**．$2\sqrt{3}$　　　　**C**．$4\sqrt{2}$　　　　**D**．$4\sqrt{3}$

8．设 ***i*** 为虚数单位，若复数 $z(1-i)=2+2i$，则复数 z 等于(　　)

A．$-2i$　　　　**B**．$2i$　　　　**C**．$-1+i$　　　　**D**．0

9．根据最小二乘法由一组样本点 $\left(x_i,y_i\right)$（其中 $i=1,2,\text{L}\ ,300$），求得的回归方程是 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$，则下列说法正确的是(　)

A．至少有一个样本点落在回归直线 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 上

B．若所有样本点都在回归直线 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 上，则变量同的相关系数为 1

C．对所有的解释变量 x_i（$i=1,2,\text{L}\ ,300$），$\hat{b}x_i+\hat{a}$ 的值一定与 y_i 有误差

D．若回归直线 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 的斜率 $\hat{b}>0$，则变量 ***x*** 与 ***y*** 正相关

10．$a^2+b^2=1$ 是 $a\sin\theta+b\cos\theta\le 1$ 恒成立的（　　）

A．充分不必要条件　　　　**B**．必要不充分条件

C．充要条件　　　　**D**．既不充分也不必要条件

11．把函数 $f(x)=\sin^2 x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位，得到函数 $g(x)$ 的图象．给出下列四个命题

①$g(x)$ 的值域为 $(0,1]$

②$g(x)$ 的一个对称轴是 $x=\frac{\pi}{12}$

③$g(x)$ 的一个对称中心是 $\left(\frac{\pi}{3},\frac{1}{2}\right)$

④$g(x)$ 存在两条互相垂直的切线

其中正确的命题个数是（　　）

A．1　　　　**B**．2　　　　**C**．3　　　　**D**．4

12．已知角 α 的终边经过点 **P**$(\sin 47^0,\cos 47^0)$，则 **sin**$(\alpha-13^0)$=

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．边长为 **2** 的菱形 $ABCD$ 中, AC 与 BD 交于点 ***O***,***E*** 是线段 OD 的中点, AE 的延长线与 CD 相交于点 ***F***,若 $\angle BAD=60^{\circ}$,则 $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{EF}=$______.

14．已知 $\tan\alpha=3$，则 $\cos 2\alpha=$__________.

15．已知 α 的终边过点 $(3m,-2)$，若 $\tan\left(\pi+\alpha\right)=\frac{1}{3}$，则 $m=$__________.

16．已知抛物线 $C:y^{2}=4x$，点 P 为抛物线 C 上一动点，过点 P 作圆 $M:(x-3)^{2}+y^{2}=4$ 的切线，切点分别为 A,B，则线段 AB 长度的取值范围为__________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．(12 分) 对于非负整数集合 S（非空），若对任意 $x,y\in S$，或者 $x+y\in S$，或者 $\left|x-y\right|\in S$，则称 S 为一个好集合．以下记 $\left|S\right|$ 为 S 的元素个数.

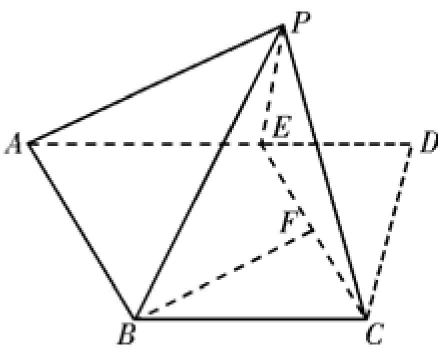
（**1**）给出所有的元素均小于 3 的好集合.（给出结论即可）

（**2**）求出所有满足 $\left|S\right|=4$ 的好集合.（同时说明理由）

（**3**）若好集合 S 满足 $\left|S\right|=2019$，求证：S 中存在元素 m，使得 S 中所有元素均为 m 的整数倍.

18．(12 分) 已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ t & 1\end{bmatrix}$ 的一个特征值为 **4**，求矩阵 **A** 的逆矩阵 A^{-1}.

19．(12 分) 如图，平面四边形 $ABCD$ 中，$BC//AD,\angle ADC=90^{\circ},\angle ABC=120^{\circ}$，$E$ 是 AD 上的一点，$AB=BC=2DE,F$ 是 EC 的中点，以 EC 为折痕把 $\triangle EDC$ 折起，使点 D 到达点 P 的位置，且 $PC\perp BF$.



（**1**）证明：平面 $PEC\perp$ 平面 $ABCE$；

（**2**）求直线 PC 与平面 PAB 所成角的正弦值.

20.（12 分）在① $\sqrt{3}(b\cos C-a)=c\sin B$；② $2a+c=2b\cos C$；③ $b\sin A=\sqrt{3}a\sin\frac{A+C}{2}$ 这三个条件中任选一个，补充在下面问题中的横线上，并解答相应的问题.

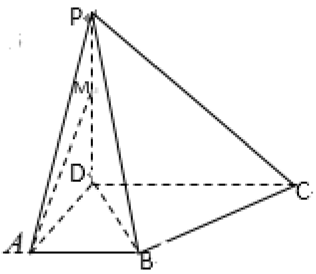
在 ΔABC 中，内角 **A，B，C** 的对边分别为 **a，b，c**，且满足________________，$b=2\sqrt{3}, a+c=4$，求 ΔABC 的面积.

21.（12 分）数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，a_n 是 -1 与 a_{n+1} 的等差中项.

（1）证明：数列 $\{a_n+1\}$ 为等比数列，并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）求数列 $\{a_n+2n\}$ 的前 n 项和 S_n.

22.（10 分）如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PD\perp$ 底面 $ABCD$，底面 $ABCD$ 是直角梯形，M 为侧棱 PD 上一点，已知 $BD=2, BC=2\sqrt{3}, CD=4, DP=4, DM=3$.



（Ⅰ）证明:平面 $PBC\perp$ 平面 PBD；

（Ⅱ）求二面角 $A-BM-C$ 的余弦值.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、**D**

【解析】

根据指数函数、对数函数、幂函数的单调性和正余弦函数的图象可确定各个选项的正误.

【详解】

对于 A，Q $0<\frac{1}{2}<\frac{\pi}{4}$，$\therefore \sin\frac{1}{2}<\cos\frac{1}{2}$，$A$ 错误；

对于 B，Q $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ 在 R 上单调递减，$\therefore\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}<\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$，$B$ 错误；

对于 C，Q $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}=\log_{2}3>1$，$\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{2}=\log_{3}2<1$，$\therefore\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}>\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{2}$，$C$ 错误；

对于 D，Q $y=x^{\frac{1}{3}}$ 在 R 上单调递增，$\therefore\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}>\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$，$D$ 正确.

故选：D.

【点睛】

本题考查根据初等函数的单调性比较大小的问题；关键是熟练掌握正余弦函数图象、指数函数、对数函数和幂函数的单调性.

2、**C**

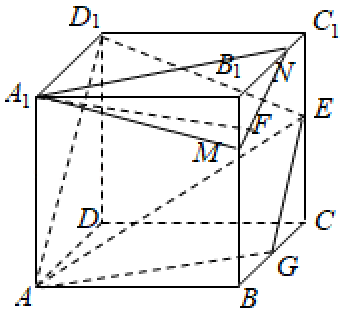
【解析】

分别根据线面平行的性质定理以及异面直线的定义，体积公式分别进行判断.

【详解】

对于 A，设平面 AD_1E 与直线 BC 交于点 G，连接 AG、EG，则 G 为 BC 的中点

分别取 B_1B、B_1C_1 的中点 M、N，连接 AM、MN、AN，



Q $A_1M//D_1E$，$A_1M\not\subset$ 平面 D_1AE，$D_1E\subset$ 平面 D_1AE，

$\therefore A_1M//$ 平面 D_1AE. 同理可得 $MN//$ 平面 D_1AE，

Q A_1M、MN 是平面 A_1MN 内的相交直线

$\therefore$ 平面 $A_1MN//$ 平面 D_1AE，由此结合 $A_1F//$ 平面 D_1AE，可得直线 $A_1F\subset$ 平面 A_1MN，

即点 F 是线段 MN 上上的动点. $\therefore A$ 正确.

对于 B，Q 平面 $A_1MN//$ 平面 D_1AE，BE 和平面 D_1AE 相交，

$\therefore A_1F$ 与 BE 是异面直线，$\therefore B$ 正确.

对于C，由A知，平面$A_1MN//$平面D_1AE，

$\therefore A_1F$与D_1E不可能平行，$\therefore C$错误.

对于D，因为$MN//EG$，则F到平面AD_1E的距离是定值，三棱锥$F-AD_1E$的体积为定值，所以D正确；

故选：C.

【点睛】

本题考查了正方形的性质、空间位置关系、空间角、简易逻辑的判定方法，考查了推理能力与计算能力，属于中档题.

3、**C**

【解析】

求出$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\left(2,-3\right)$，进而可求$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=3\times2+2\times\left(-3\right)=0$,即能求出向量夹角.

【详解】

解：由题意知，$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\left(2,-3\right)$. 则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=3\times2+2\times\left(-3\right)=0$

所以$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$，则向量$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{BC}$的夹角为$90°$.

故选:**C.**

【点睛】

本题考查了向量的坐标运算，考查了数量积的坐标表示.求向量夹角时，通常代入公式$\cos\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}$ 进行计算.

4、**A**

【解析】

根据函数定义域得集合A，解对数不等式得到集合B，然后直接利用交集运算求解.

【详解】

解：由函数$y=\sqrt{4-x^2}$得$4-x^2\geq0$，解得$-2\leq x\leq2$，即$A=\left\{x\middle|-2\leq x\leq2\right\}$；

又$\log_2\left(x+1\right)>1=\log_2 2$，解得$x>1$，即$B=\left\{x\middle|x>1\right\}$，

则$A\cap B=\left\{x\middle|1<x\leq2\right\}$.

故选：**A.**

【点睛】

本题考查了交集及其运算，考查了函数定义域的求法，是基础题.

5、**D**

【解析】

先求出集合 N 的补集 $\complement_U N$，再求出集合 M 与 $\complement_U N$ 的交集，即为所求阴影部分表示的集合.

【详解】

由 $U=\mathbf{R}$，$N=\{x\,|\,|x|\le 1\}$，可得 $\complement_U N=\{x\,|\,x<-1$ 或 $x>1\}$，

又 $M=\{x\,|-3<x<1\}$

所以 $M\cap\complement_U N=\{x\,|-3<x<-1\}$.

故选：D.

【点睛】

本题考查了韦恩图表示集合，集合的交集和补集的运算，属于基础题.

6、C

【解析】

利用导数法和两直线平行性质，将线段 $|PQ|$ 的最小值转化成切点到直线距离.

【详解】

已知 P 与 Q 分别为函数 $2x-y-6=0$ 与函数 $y=x^2+1$ 的图象上一点，

可知抛物线 $y=x^2+1$ 存在某条切线与直线 $2x-y-6=0$ 平行，则 $k=2$，

设抛物线 $y=x^2+1$ 的切点为 $\left(x_0,x_0^2+1\right)$，则由 $y'=2x$ 可得 $2x_0=2$，

$\therefore x_0=1$，所以切点为 $(1,2)$，

则切点 $(1,2)$ 到直线 $2x-y-6=0$ 的距离为线段 $|PQ|$ 的最小值，

则 $|PQ|_{\min}=\dfrac{|2\times1-2-6|}{\sqrt5}=\dfrac{6\sqrt5}{5}$.

故选：C.

【点睛】

本题考查导数的几何意义的应用，以及点到直线的距离公式的应用，考查转化思想和计算能力.

7、D

【解析】

设双曲线 C 的左焦点为 F_1，连接 AF_1,BF_1，由对称性可知四边形 AF_1BF_2 是平行四边形，

设 $|AF_1|=r_1,|AF_2|=r_2$，得 $4c^2=r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos\dfrac{\pi}{3}$，求出 r_1r_2 的值，即得解.

【详解】

设双曲线 **C** 的左焦点为 F_1，连接 AF_1, BF_1，

由对称性可知四边形 AF_1BF_2 是平行四边形，

所以 $S_{\triangle AF_1F_2} = S_{\triangle AF_2B}$， $\angle F_1AF_2 = \frac{\pi}{3}$.

设 $|AF_1| = r_1, |AF_2| = r_2$，则 $4c^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos\frac{\pi}{3} = r_1^2 + r_2^2 - r_1r_2$，

又 $|r_1 - r_2| = 2a$.故 $r_1r_2 = 4b^2 = 16$，

所以 $S_{\triangle AF_1F_2} = \frac{1}{2}r_1r_2\sin\frac{\pi}{3} = 4\sqrt{3}$.

故选：**D**

【点睛】

本题主要考查双曲线的简单几何性质，考查余弦定理解三角形和三角形面积的计算，意在考查学生对这些知识的理解掌握水平.

8、**B**

【解析】

根据复数除法的运算法则，即可求解.

【详解】

$z(1-i) = 2 + 2i, z = \frac{2+2i}{1-i} = 2i$.

故选:**B.**

【点睛】

本题考查复数的代数运算，属于基础题.

9、**D**

【解析】

对每一个选项逐一分析判断得解.

【详解】

回归直线必过样本数据中心点，但样本点可能全部不在回归直线上，故 **A** 错误；

所有样本点都在回归直线 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 上，则变量间的相关系数为 ± 1，故 **B** 错误；

若所有的样本点都在回归直线 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 上，则 $\hat{b}x + \hat{a}$ 的值与 y_i 相等，故 **C** 错误；

相关系数 ***r*** 与 $\hat{b}$ 符号相同，若回归直线 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 的斜率 $\hat{b} > 0$，则 $r > 0$，样本点分布应从左到右是上升的，则变量 ***x*** 与 ***y*** 正相关，故 **D** 正确.

故选 **D**.

【点睛】

本题主要考查线性回归方程的性质，意在考查学生对该知识的理解掌握水平和分析推理能力.

10、**A**

【解析】

设$\begin{cases} a=\cos\alpha \\ b=\sin\alpha \end{cases} \Rightarrow a\sin\theta+b\cos\theta=\sin\theta\cos\alpha+\cos\theta\sin\alpha=\sin(\theta+\alpha)\le 1$ 成立；反之，$a=b=0$ 满足

$a\sin\theta+b\cos\theta\le 1$，但 $a^2+b^2\ne 1$，故选 **A.**

11、**C**

【解析】

由图象变换的原则可得 $g(x)=-\dfrac{1}{2}\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)+\dfrac{1}{2}$,由 $\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)\in[-1,1]$ 可求得值域;利用代入检验法判断②③;

对 $g\left(x\right)$ 求导,并得到导函数的值域,即可判断④.

【详解】

由题,$f(x)=\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$,

则向右平移 $\dfrac{\pi}{12}$ 个单位可得,$g(x)=\dfrac{1-\cos 2\left(x-\dfrac{\pi}{12}\right)}{2}=-\dfrac{1}{2}\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)+\dfrac{1}{2}$

Q $\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)\in[-1,1]$,$\therefore$ $g(x)$ 的值域为 $[0,1]$,①错误;

当 $x=\dfrac{\pi}{12}$ 时,$2x-\dfrac{\pi}{6}=0$,所以 $x=\dfrac{\pi}{12}$ 是函数 $g(x)$ 的一条对称轴,②正确;

当 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 时,$2x-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$,所以 $g(x)$ 的一个对称中心是 $\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{1}{2}\right)$,③正确;

$g'(x)=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)\in[-1,1]$,则 $\exists x_1, x_2\in R, g'(x_1)=-1, g'(x_2)=1$,使得 $g'(x_1)\cdot g'(x_2)=-1$,则 $g(x)$ 在 $x=x_1$ 和

$x=x_2$ 处的切线互相垂直,④正确.

即②③④正确,共 **3** 个.

故选:**C**

【点睛】

本题考查三角函数的图像变换,考查代入检验法判断余弦型函数的对称轴和对称中心,考查导函数的几何意义的应用.