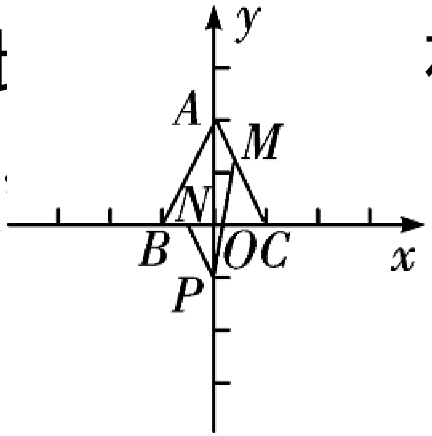
重难题型七　平面直角坐标系中新定义阅读理解题
（兰州卷2024T28，2023—2022T27）

典例精析

例

(2024·兰州模拟)在平面直角坐标系xOy中,给出如下定义：对于图形W和图形W外一点P,若在图形W上存在点M,N,使PM = 2PN,则称点P是图形W的一个“2倍关联点”.例如：如图①,已知图形W：△ABC,A(0,2),B(- 1,0),C(1,0)；点P(0, - 1)到△ABC上的点的最小距离为PO = 1,到△ABC上的点的最大距离为PA = 3,则PA > 2PO.因此 存在点M,N,使得PM = 2PN,则点P是△ABC的一个“2倍关联点



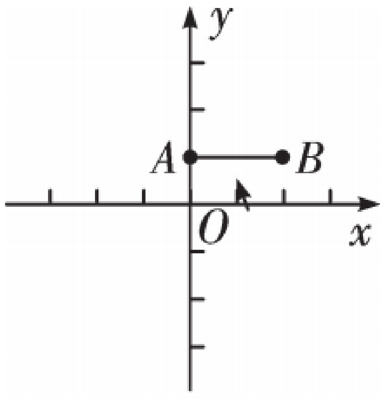
①

(1)如图②,已知A(0,1),B(2,1).

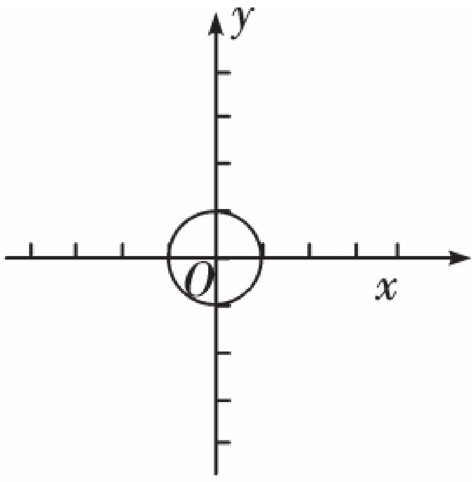
Ⅰ)判断点$P_1(2,-1)$<u>不是</u>(选填"是"或"不是")线段AB的一个"2倍关联点";

Ⅱ)若点$P_2(1,m)$是线段AB的"2倍关联点",求m的最小值;

(2)如图③,⊙O的圆心为原点,半径为1,若在直线l：$y=x+b$上存在点Q是⊙O的"2倍关联点",求b的取值范围.



②



③

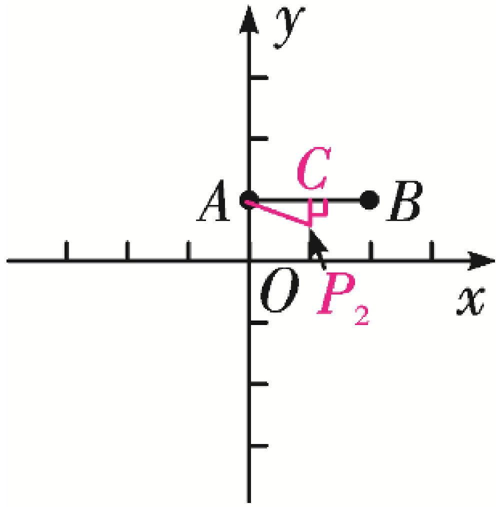
【思路分析】(1)①根据“2倍关联点”的定义判断即可；②过点P作$P_2C\perp AB$于点C,当$P_2A=2P_2C$时,点P_2是线段AB的“2倍关联点”,此时m的值最小,根据定义解直角三角形,即可求出m的值；(2)由题得出$y=x+b$交y轴于$(0,b)$,分两种情况：①当直线l在⊙O的左上方时,记为直线l_1,过圆心O作$OQ_1\perp l$于点Q_1,若Q_1是直线上⊙O的唯一“2倍关联点”,此时$Q_1M=2Q_1N$,得出$OQ_1=3$,然后判定$\triangle ODQ_1$为等腰三角形,解直角三角形得出$b=3\sqrt{2}$；②当直线l在⊙O的右下方时,记为直线l_2,过圆心O作$OQ_2\perp l_2$于点Q_2.同理得$b=-3\sqrt{2}$,即可求出b的取值范围.

解：(1)II)如图②,过点P_2作$P_2C\perp AB$于点C,则C(1,1).

当$P_2A=2P_2C$时,点P_2是线段AB的“2倍关联点”,此时m的值最小.

在Rt△ACP_2中,$\angle P_2AC=30°$,$\therefore\frac{P_2C}{AC}=\tan 30°$,$\therefore P_2C=AC\cdot\tan 30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$,

又$\because P_2C=1-m$,$\therefore 1-m=\frac{\sqrt{3}}{3}$,解得$m=1-\frac{\sqrt{3}}{3}$,$\therefore$m的最小值为$1-\frac{\sqrt{3}}{3}$.



②

(2)如图③,$y=x+b$交y轴于$(0,b)$,分两种情况:

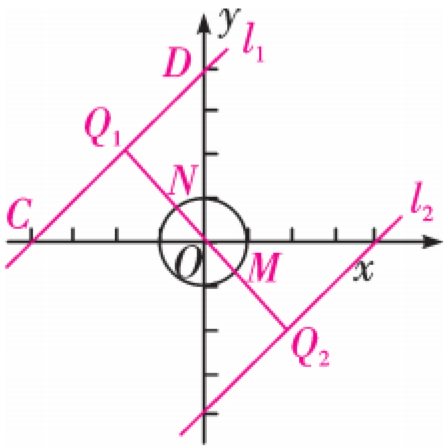
①当直线l在⊙O的左上方时,记为直线l_1,过圆心O作$OQ_1\perp l_1$于点Q_1,

若Q_1是直线l_1上⊙O的唯一“2倍关联点”,此时$Q_1M=2Q_1N$,

∵⊙O的半径为1,$OQ_1+1=2(OQ_1-1)$,∴$OQ_1=3$,

∵直线$y=x+b$,∴$C(-b,0)$,$D(0,b)$.∴$OC=OD=b$.∴$\angle CDO=45°$,

在Rt△ODQ_1中,$\frac{OQ_1}{OD}=\sin 45°$,$b=OD=\frac{OQ_1}{\sin 45°}=3\sqrt{2}$



③

②当直线l在⊙O的右下方时,记为直线l_2,

过圆心O作$OQ_2\perp l_2$于点Q_2.同理得$b=-3\sqrt{2}$.

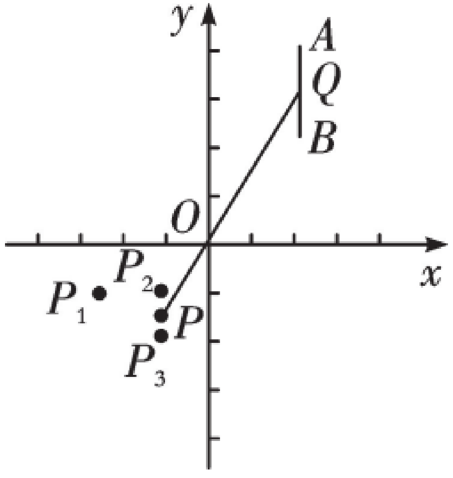
综上所述,b的取值范围是$-3\sqrt{2}<b<3\sqrt{2}$.

甘肃中考真题体验

1.(2024·兰州第28题9分)在平面直角坐标系xOy中,给出如下定义：点P是图形W外一点,点Q在PO的延长线上,使得$\frac{PO}{QO}=\frac{1}{2}$,如果点Q在图形W上,则称点P是图形W的“延长2分点”.例如：如图①,A(2,4),B(2,2),P$\left(-1,-\frac{3}{2}\right)$是线段AB外一点,Q(2,3)在PO的延长线上,且$\frac{PO}{QO}=\frac{1}{2}$,因为点Q在线段AB上,所以点P是线段AB的“延长2分点”.

(1)如图①,已知图形W_1：线段AB,A(2,4),B(2,2),在$P_1\left(-\frac{5}{2},-1\right)$,$P_2(-1,-1)$,$P_3(-1,-2)$中,

$\underline{P_2,P_3}$是图形W_1的“延长2分点”;

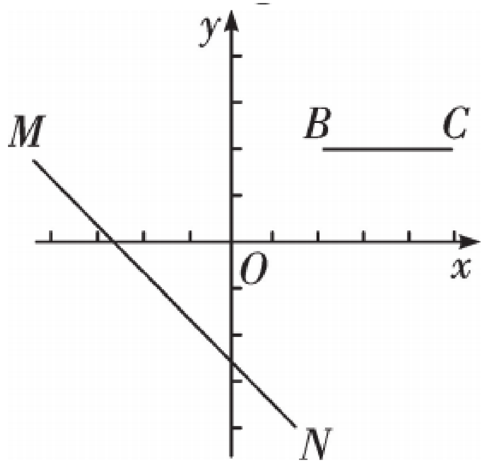


①

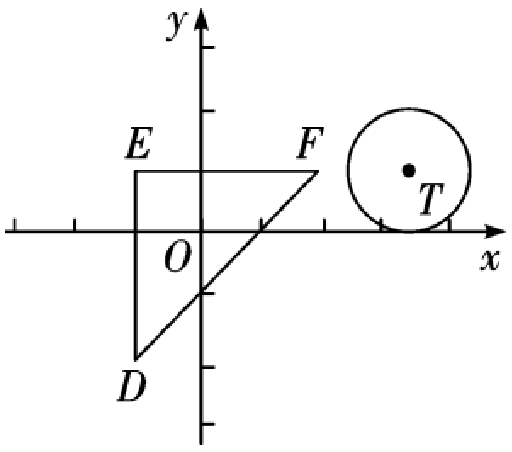
(2)如图②,已知图形W_2：线段BC,B(2,2),C(5,2),若直线MN：$y=-x+b$上存在点P是图形W_2的“延长2分点”,求b的最小值；

(3)如图③,已知图形W_3：以T(t,1)为圆心,半径为1的⊙T,若以D(-1,-2),E(-1,1),F(2,1)为顶点的等腰Rt△DEF上存在点P,使得点P是图形W_3的“延长

t的



②



③

解：(2)作BC以原点为位似中心,位似比为2∶1的位似图形B′C′,

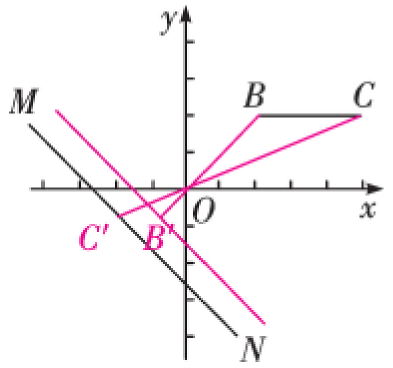
∵B(2,2),C(5,2),∴B′(-1,-1),C′$\left(-\frac{5}{2},-1\right)$,

∵直线MN：$y=-x+b$上存在点P是图形W_2的“延长2分点”,

∴直线MN：$y=-x+b$与B′C′有交点,

∴当MN：$y=-x+b$过点C′时,b值最小,

把C′$\left(-\frac{5}{2},-1\right)$,代入$y=-x+b$,得$b=-\frac{7}{2}$,∴b的最小值为$-\frac{7}{2}$.



②

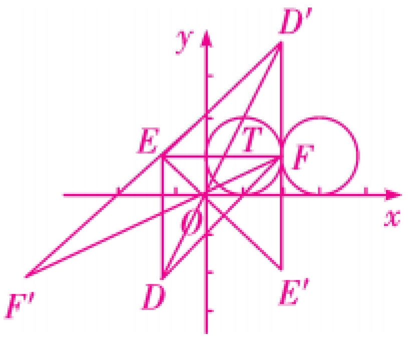
(3)作△DEF以原点为位似中心,位似比为1∶2的位似△D′E′F′,

∵D(-1,-2),E(-1,1),F(2,1),∴D′(2,4),E′(2,-2),F′(-4,-2),

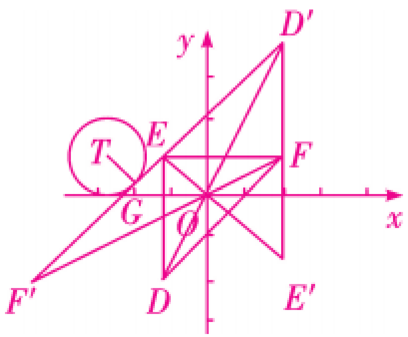
∵等腰Rt△DEF上存在点P,使得点P是图形W_3的"延长2分点",

∴当W_3与△D′E′F′有交点时,满足题意.

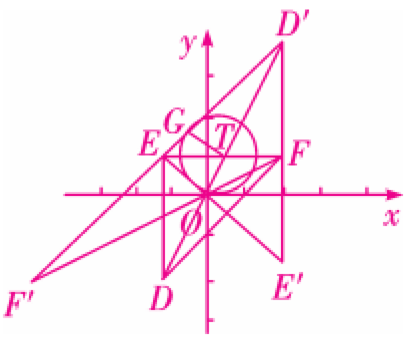
当⊙T与D′E′相切时,如答图①,则t=1或t=3,∴1≤t≤3;



答图①



答图②



答图③

当$\odot T$与$D'F'$相切时,且切点为G,连接TG,则$\angle TGE=90^{\circ}$,

$\because \triangle DEF$为等腰直角三角形,$\therefore \triangle D'E'F'$为等腰直角三角形,

$\because E(-1,1),F(2,1),E'(2,-2),F'(-4,-2)$,$\therefore EF \parallel E'F' \parallel x$轴,$\therefore \angle D'F'E'=45^{\circ}$,

$\because$以$T(t,1)$为圆心,半径为1的$\odot T$,$\therefore T$点在直线EF上,$TG=1$,

$\therefore \angle TEG=\angle D'E'F'=45^{\circ}$,

$\therefore ET=\sqrt{2}TG=\sqrt{2}$,$\therefore t=-1-\sqrt{2}$或$t=\sqrt{2}-1$,$\therefore -1-\sqrt{2}\leq t\leq \sqrt{2}-1$.

综上所述,t的取值范围为$1\leq t\leq 3$或$-1-\sqrt{2}\leq t\leq \sqrt{2}-1$.

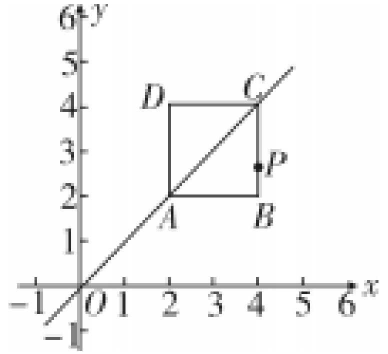
2.(2022·兰州第27题8分)在平面直角坐标系中,P(a,b)是第一象限内一点,给出如下定义：$k_1=\frac{a}{b}$和$k_2=\frac{b}{a}$两个值中的最大值叫做点P的“倾斜系数”k.

(1)求点P(6,2)的“倾斜系数”k的值;

(2)I)若点P(a,b)的“倾斜系数”$k=2$,请写出a和b的数量关系,并说明理由;

II)若点P(a,b)的“倾斜系数”$k=2$,且$a+b=3$,求OP的长;

(3)如图,边长为2的正方形ABCD沿直线AC：$y=x$运动,P(a,b)是正方形ABCD上任意一点,且点P的“倾斜系数”$k<\sqrt{3}$,请直接写出a的取值范围



解：(1)由题意知$k_1=\frac{6}{2}=3$,$k_2=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$,$k_1>k_2$.

即点P(6,2)的“倾斜系数”k的值为3.

(2)Ⅰ)$\because$点P(a,b)的“倾斜系数”$k=2$,

$\therefore \frac{a}{b}=2$或$\frac{b}{a}=2$,即$a=2b$或$b=2a$,

$\therefore$a和b的数量关系为$a=2b$或$b=2a$.

Ⅱ)由Ⅰ)知$a=2b$或$b=2a$,

$\because a+b=3$,

$\therefore \begin{cases} a=1, \\ b=2 \end{cases}$或$\begin{cases} a=2, \\ b=1, \end{cases}$ $\therefore OP=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$.

(3)由题意知当P点与D点重合时,且$k=\sqrt{3}$时,

a有最小临界值,此时a<b,如答图①,

连接OD,延长DA交x轴于点E,

此时$\frac{a}{b}=\sqrt{3}$,则$\frac{a+2}{a}=\sqrt{3}$,解得$a=\sqrt{3}+1$;

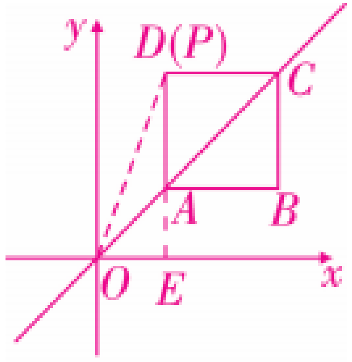
当P点与B点重合时,且$k=\sqrt{3}$时,a有最大临界值,此时a>b,如答图②,连接OB,

延长CB交x轴于点F,

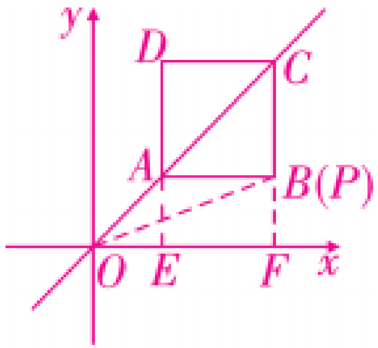
此时$\frac{a}{b}=\sqrt{3}$,则$\frac{a}{a-2}=\sqrt{3}$,解得$a=3+\sqrt{3}$.

综上所述,若点P的"倾斜系数"$k<\sqrt{3}$,

则a的取值范围为$\sqrt{3}+1<a<3+\sqrt{3}$.



答图①



答图②