

5. 6 函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$

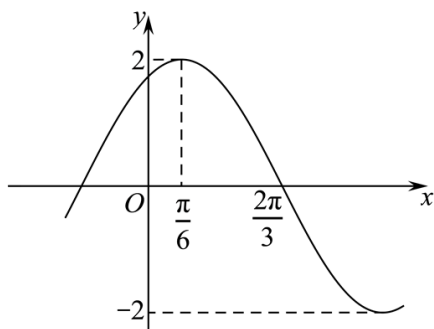
目录

【题型归纳】	2
题型一：根据函数图象求解析式.....	2
题型二：同名函数图象的变换.....	4
题型三：异名函数图象的变换.....	5
题型四：变换的重合问题.....	7
题型五：求图象变换前、后的解析式.....	8
题型六：由图象变换研究函数的性质.....	10
题型七：三角函数图象与性质的综合应用.....	12
题型八：用五点法作函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象.....	16
【重难点集训】	20
【高考真题】	35

【题型归纳】

题型一：根据函数图象求解析式

1. (2024·高三·全国·专题练习) 若函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的部分图象如图所示, 则 $f(x)$ 的解析式可能是 ()



A. $y = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

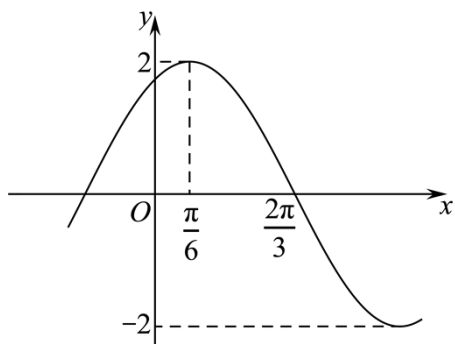
B. $y = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

C. $y = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

D. $y = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

【答案】C

【解析】如图：



易知： $A = 2$, $\frac{T}{4} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow T = 2\pi$, 即 $\frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \Rightarrow \omega = 1$.

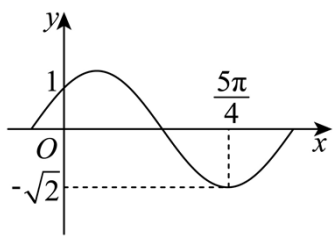
由 $2\sin\left(\frac{\pi}{6} + \varphi\right) = 2 \Rightarrow \varphi = 2k\pi + \frac{\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$,

$k = 0$ 时, $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

所以： $f(x) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

故选：C

2. (2024·高一·北京海淀·期末) 函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ $\left(A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象如图所示, 则其解析式为 ()



A. $f(x) = \sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

B. $f(x) = \sqrt{2}\sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}\right)$

C. $f(x) = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

D. $f(x) = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

【答案】D

【解析】由图象知 $A = \sqrt{2}$, $f(0) = 1$

所以 $\sqrt{2} \sin \varphi = 1$,

则 $\varphi = 2k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$ 或 $\varphi = 2k\pi + \frac{3\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$,

又 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{4}$,

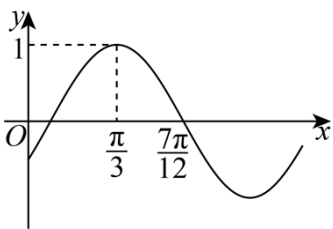
$\sqrt{2} \sin\left(\frac{5\omega\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$, $\frac{5\omega\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$, $\omega = \frac{8k}{5} + 1$, $k \in \mathbb{Z}$,

又 $T > \frac{5\pi}{4}$, $\omega = \frac{2\pi}{T} < \frac{8}{5}$, 已知 $\omega > 0$, 所以 $\omega = 1$, 所以 $f(x) = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$,

故选: D.

3. (2024·高一·黑龙江鸡西·期末) 函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示, 则

函数 $f(x)$ 的解析式为 ()



A. $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

B. $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$

C. $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$

D. $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

【答案】B

【解析】由函数图象可知 $\frac{T}{4} = \frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4}$, 所以 $T = \pi$,

又 $\omega > 0$, 所以 $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2$,

由图象的最小值可知 $A=1$ ，所以 $f(x)=\sin(2x+\varphi)$ ，

而最高点坐标为 $\left(\frac{\pi}{3}, 1\right)$ 代入得 $\sin\left(2 \times \frac{\pi}{3} + \varphi\right) = 1$ ，

所以 $2 \times \frac{\pi}{3} + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ，则 $\varphi = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ，

因为 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$ ，所以 $\varphi = -\frac{\pi}{6}$ ，

所以 $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ 。

故选：B。

题型二：同名函数图象的变换

4. (2024·高三·四川绵阳·阶段练习) 将函数 $y = \sin 2x$ 的图象向左平移 φ 个单位长度后，得到函数

$y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象，则 φ 的值可以是 ()

A. $\frac{2\pi}{3}$

B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{\pi}{6}$

D. $\frac{\pi}{12}$

【答案】D

【解析】函数 $y = \sin 2x$ 的图象向左平移 φ 个单位长度后，

得到函数的解析式为： $y = \sin 2(x + \varphi) = \sin(2x + 2\varphi)$ ，

于是有 $2\varphi = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$ ，

解得 $\varphi = k\pi + \frac{\pi}{12} (k \in \mathbb{Z})$ ，

针对四个选项中的四个角都是正角且小于 π ，

所以令 $k = 0$ ，得 $\varphi = \frac{\pi}{12}$ ，

故选：D

5. (2024·全国·模拟预测) 为了得到函数 $f(x) = 3\sqrt{2} \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$ 的图象，可将函数

$g(x) = 3\sin^2 x + 6\sin x \cos x - 3\cos^2 x + 1$ 的图象 ()

A. 向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度

B. 向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度

C. 向右平移 $\frac{5\pi}{24}$ 个单位长度

D. 向左平移 $\frac{5\pi}{24}$ 个单位长度

【答案】D

【解析】由已知 $g(x) = 3\sin^2 x + 6\sin x \cos x - 3\cos^2 x + 1 = 3\sin 2x - 3\cos 2x + 1 = 3\sqrt{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$

$$= 3\sqrt{2} \sin\left(2x - \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) + 1 = 3\sqrt{2} \cos\left(2x - \frac{3\pi}{4}\right) + 1,$$

设将函数 $g(x)$ 向左平移 φ 个单位, 得 $3\sqrt{2} \cos\left[2\left(x + \varphi\right) - \frac{3\pi}{4}\right] = 3\sqrt{2} \cos\left(2x + 2\varphi - \frac{3\pi}{4}\right) = f(x),$

所以 $2\varphi - \frac{3\pi}{4} = -\frac{\pi}{3},$ 解得 $\varphi = \frac{5\pi}{24},$

即将函数 $g(x)$ 向左平移 $\frac{5\pi}{24}$ 个单位长度可得 $f(x),$

故选: D.

6. (2024·高一·江西赣州·期中) 为了得到函数 $y = \cos\left(5x - \frac{\pi}{9}\right)$ 的图象, 只需将函数 $y = \cos 5x$ 的图象 ()

A. 向右平移 $\frac{\pi}{45}$ 个单位长度

B. 向左平移 $\frac{\pi}{45}$ 个单位长度

C. 向右平移 $\frac{\pi}{9}$ 个单位长度

D. 向左平移 $\frac{\pi}{9}$ 个单位长度

【答案】A

【解析】函数 $y = \cos\left(5x - \frac{\pi}{9}\right) = \cos 5\left(x - \frac{\pi}{45}\right),$ 只需将函数 $y = \cos 5x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{45}$ 个单位长度, 即可

得到函数 $y = \cos\left(5x - \frac{\pi}{9}\right)$ 的图象.

故选: A.

7. (2024·高一·湖南益阳·期末) 为了得到函数 $y = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象, 只需把函数 $y = 2\sin x$ 的图象上所有的点 ()

A. 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度

B. 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度

C. 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度

D. 向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度

【答案】C

【解析】为了得到函数 $y = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象, 只需把函数 $y = 2\sin x$ 的图象上所有的点向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度.

故选: C.

题型三: 异名函数图象的变换

8. (2024·高一·上海普陀·期末) 为了得到函数 $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象, 可以将函数 $y = \cos\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right)$ 的图象

()

A. 向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位

B. 向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位

C. 向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位

D. 向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位

【答案】B

【解析】 $y = \cos\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$

将函数向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位得： $y = \sin\left[2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi}{6}\right] = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$.

故选：B

9. (2024·高一·北京西城·期中) 要得到 $y = \cos 2x$ 的图象，只要将 $y = \sin 2x$ 的图象 ()

A. 向左平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位

B. 向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位

C. 向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位

D. 向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位

【答案】C

【解析】因为 $y = \sin 2x = \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left[2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right]$,

所以要得到 $y = \cos 2x$ 的图象，只要将 $y = \sin 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位，

故选：C.

10. (2024·高三·甘肃兰州·阶段练习) 为得到 $y = 2\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象，只需要将 $y = 2\cos 3x$ 函数的图象 ()

A. 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位

B. 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位

C. 向左平移 $\frac{5\pi}{18}$ 个单位

D. 向右平移 $\frac{5\pi}{18}$ 个单位

【答案】D

【解析】由题意利用诱导公式、函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象变换规律，得出结论. 由题可知，

$y = 2\cos 3x = 2\sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$ 的图象，

将其向右平移 α 个单位有 $y = 2\sin\left[3\left(x - \alpha\right) + \frac{\pi}{2}\right] = 2\sin\left(3x - 3\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$,

欲得到 $y = 2\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象，则 $-3\alpha + \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{5\pi}{18}$

所以应向右平移 $\frac{5\pi}{18}$ 个单位

故选：D

题型四：变换的重合问题

11. (2024·四川·一模) 函数 $y = \sqrt{3} \sin \omega x + \cos \omega x (\omega > 0)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后与函数

$y = 2 \cos\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象重合, 则 ω 的最小值为 ().

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】C

【解析】函数 $y = \sqrt{3} \sin \omega x + \cos \omega x = 2 \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right)$ 图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后,

得 $y = 2 \sin\left[\omega\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{6}\right]$ 的图象,

由已知得 $2 \sin\left[\omega\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{6}\right] = 2 \cos\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right)$,

所以 $\sin\left[\omega\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{6}\right] = \cos\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right)$,

所以 $\sin\left[\omega\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{6}\right] = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right)$,

所以 $\frac{\omega\pi}{6} = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$,

所以 $\omega = 12k + 3, k \in \mathbf{Z}$,

因为 $\omega > 0$, 所以 ω 的最小值为 3,

故选：C.

12. (2024·高三·河南南阳·期中) 若将函数 $f(x) = 2 \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right), \omega > 0$ 的图像向右平移 $\frac{1}{4}$ 个周期后, 与函数

$g(x) = 2 \cos(2x + \varphi)$ 的图像重合, 则 φ 的一个可能取值为 ()

A. $\frac{\pi}{3}$

B. $-\frac{\pi}{3}$

C. $-\frac{2\pi}{3}$

D. $-\frac{4\pi}{3}$

【答案】C

【解析】 $f(x) = 2 \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right), \omega > 0$, 周期 $T = \frac{2\pi}{\omega}$,

函数 $f(x) = 2 \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图像向右平移 $\frac{1}{4}$ 个周期后,

得函数 $y = 2 \sin\left[\omega\left(x - \frac{\pi}{2\omega}\right) + \frac{\pi}{3}\right] = 2 \sin\left(\omega x - \frac{\pi}{6}\right)$ 的图像,

而 $g(x) = 2 \cos(2x + \varphi) = 2 \sin\left[\frac{\pi}{2} + (2x + \varphi)\right] = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{2} + \varphi\right)$,

由题意 $\omega = 2, \frac{\pi}{2} + \varphi = 2k\pi - \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}, \therefore \varphi = 2k\pi - \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z},$

令 $\varphi = 2k\pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3},$ 得 $k = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z},$ 故 A 错误;

令 $\varphi = 2k\pi - \frac{2\pi}{3} = -\frac{\pi}{3},$ 得 $k = \frac{1}{6} \notin \mathbb{Z},$ 故 B 错误;

令 $\varphi = 2k\pi - \frac{2\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3},$ 得 $k = 0 \in \mathbb{Z},$ 故 C 正确;

令 $\varphi = 2k\pi - \frac{2\pi}{3} = -\frac{4\pi}{3},$ 得 $k = -\frac{1}{3} \notin \mathbb{Z},$ 故 D 错误.

故选: C.

13. (2024·高一·河南·阶段练习) 将函数 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right) (\omega > 0)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后与函数 $g(x) = \cos(\omega x)$ 的图象重合, 则 ω 的最小值为 ()

A. 7

B. 5

C. 9

D. 11

【答案】D

【解析】 $y = f\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left[\omega\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{3}\right] = \sin\left(\omega x - \frac{\pi}{6}\omega + \frac{\pi}{3}\right),$

$\cos(\omega x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{2}\right), k \in \mathbb{Z},$

由题可知, $-\frac{\pi}{6}\omega + \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z},$ 解得 $\omega = -12k - 1, k \in \mathbb{Z},$

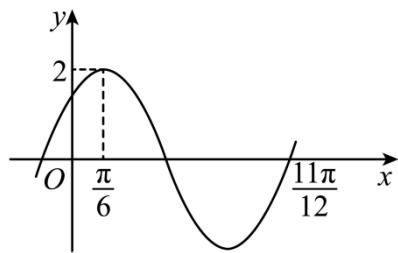
又 $\omega > 0,$ $\therefore$ 当 $k = -1$ 时, ω 取得最小值 11.

故选: D.

题型五: 求图象变换前、后的解析式

14. (2024·高一·江苏·期末) 已知函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ (其中 $A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如

图所示, 将函数 $f(x)$ 图象上所有点的横坐标变为原来的 6 倍后, 再向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度, 得到函数 $g(x)$ 的图象, 则函数 $g(x)$ 的解析式可以是_____.



【答案】 $g(x) = 2\sin\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{3}\right)$ (答案不唯一)

【解析】由函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象可得: $A = 2, \frac{3}{4}T = \frac{11\pi}{12} - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{4}$,

可得 $T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi$, 解得 $\omega = 2$,

则 $f(x) = 2\sin(2x + \varphi)$

∵ 函数 $f(x)$ 的图象过点 $(\frac{\pi}{6}, 2)$, 则 $f(\frac{\pi}{6}) = 2\sin(2 \times \frac{\pi}{6} + \varphi) = 2$, 即 $\sin(\frac{\pi}{3} + \varphi) = 1$,

由 $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, 可得 $\frac{\pi}{3} + \varphi \in (-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$, 故 $\frac{\pi}{3} + \varphi = \frac{\pi}{2}$, 解得 $\varphi = \frac{\pi}{6}$,

故 $f(x) = 2\sin(2x + \frac{\pi}{6})$,

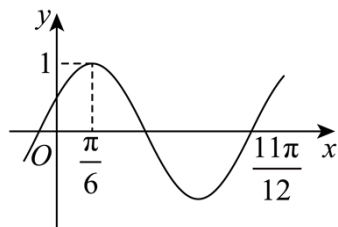
将函数 $f(x)$ 图象上所有点的横坐标变为原来的 6 倍, 得到 $y = 2\sin(\frac{1}{3}x + \frac{\pi}{6})$,

再向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度, 得到 $g(x) = 2\sin[\frac{1}{3}(x + \frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{6}] = 2\sin(\frac{1}{3}x + \frac{\pi}{3})$.

故答案为: $g(x) = 2\sin(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{3})$ (答案不唯一)

15. (2024·高三·北京东城·开学考试) 函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示,

则函数 $y = f(x)$ 的解析式为_____, 若将 $y = f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位后, 得到新函数解析式为_____.



【答案】 $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{6})$ $y = \sin(2x - \frac{\pi}{6})$

【解析】根据图象知 $A = 1, \frac{3}{4}T = \frac{11\pi}{12} - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{4}$, $\therefore T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi, \therefore \omega = 2$,

将点 $(\frac{\pi}{6}, 1)$ 代入 $f(x) = \sin(2x + \varphi)$, 得 $\sin(2 \times \frac{\pi}{6} + \varphi) = 1$,

$\therefore \frac{\pi}{3} + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, 又 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 则 $\varphi = \frac{\pi}{6}$,

$\therefore f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{6})$,

将 $y = f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位后, 得到新函数解析式为 $y = \sin[2(x - \frac{\pi}{6}) + \frac{\pi}{6}] = \sin(2x - \frac{\pi}{6})$.

故答案为: $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$, $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$.

16. (2024·高一·全国·课后作业) 把函数 $y = f(x)$ 图象上的所有点向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 再把横坐标伸长到原来的 2 倍, 所得图象的解析式是 $y = \sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3}\right)$, 则函数 $f(x)$ 的解析式为_____.

【答案】 $f(x) = \cos x$

【解析】 将函数 $y = \sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 得到函数 $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象,

再向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 得到函数 $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$ 的图象,

所以 $f(x) = \cos x$.

故答案为: $f(x) = \cos x$.

题型六: 由图象变换研究函数的性质

17. (2024·四川成都·模拟预测) 将函数 $f(x) = \sin\left(\omega x - \frac{\pi}{3}\right)$ ($\omega > 0$) 的图象向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度后得到函数 $g(x)$ 的图象, 且函数 $g(x)$ 是偶函数, 则 ω 的最小值是 ()

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{5}{6}$

【答案】 A

【解析】 由题意 $g(x) = f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\omega x - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\omega\right)$ ($\omega > 0$) 是偶函数,

所以 $-\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\omega = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, 解得 $\omega = -\frac{5}{3} - 2k, k \in \mathbb{Z}$,

又 $\omega > 0$, 所以当且仅当 $k = -1$ 时, $\omega_{\min} = \frac{1}{3}$.

故选: A.

18. (2024·高一·江苏常州·期末) 将正弦曲线 $y = \sin x$ 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位得到曲线 C_1 , 再将曲线 C_1 上的每一点的横坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$ 得到曲线 C_2 , 最后将曲线 C_2 上的每个点的纵坐标变为原来的 2 倍得到曲线的

C_3 . 若曲线 C_3 恰好是函数 $f(x)$ 的图象, 则 $f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的值域是 ()

- A. $[-1, 1]$ B. $[-1, 2]$ C. $[1, 2]$ D. $[-2, 2]$

【答案】 B

【解析】 将正弦曲线 $y = \sin x$ 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位得到曲线 $C_1: y = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象;

再将曲线 C_1 上的每一点的横坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$ 得到曲线 $C_2: y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象;

最后将曲线 C_2 上的每个点的纵坐标变为原来的 2 倍得到曲线的 $C_3: y = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象.

由于曲线 C_3 恰好是函数 $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象.

在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上, $2x + \frac{\pi}{6} \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right]$, $\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$, $2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \in [-1, 2]$.

故 $f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的值域是 $[-1, 2]$.

故选: B.

19. (2024·高三·全国·阶段练习) 把函数 $f(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图像向右平移 φ ($0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 个单位长度, 再

把横坐标压缩到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍, 纵坐标不变, 得到图像关于原点对称的函数 $g(x)$, 则 ()

- A. $\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$ 为 $g(x)$ 的一个对称中心 B. $x = \pi$ 为 $g(x)$ 的一条对称轴
- C. $g(\varphi) = 1$ D. $g\left(\frac{3\pi}{4} - x\right) = g(x)$

【答案】D

【解析】把函数 $f(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图像向右平移 φ 个单位长度,

$$\text{得 } y = \cos\left[2(x - \varphi) + \frac{\pi}{3}\right] = \cos\left(2x - 2\varphi + \frac{\pi}{3}\right),$$

再把横坐标压缩到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍, 纵坐标不变,

$$\text{得 } y = \cos\left(4x - 2\varphi + \frac{\pi}{3}\right), \text{ 即 } g(x) = \cos\left(4x - 2\varphi + \frac{\pi}{3}\right),$$

由函数 $g(x)$ 图像关于原点对称,

$$\text{得 } -2\varphi + \frac{\pi}{3} = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}, \text{ 得 } \varphi = -\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{12}, k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{当 } k = -1 \text{ 时, 由 } 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}, \text{ 得 } \varphi = \frac{5\pi}{12}, \text{ 则 } g(x) = \sin 4x,$$

对于选项 A: $g\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, 故 A 错误;

对于选项 B: 因为 $g(\pi) = 0$, 故 B 错误;

对于选项 C: $g(\varphi) = \sin\left(4 \times \frac{5\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, 故 C 错误;

对于选项 D: $g\left(\frac{3\pi}{4}-x\right)=\sin\left[4\left(\frac{3\pi}{4}-x\right)\right]=\sin(3\pi-4x)=\sin(\pi-4x)=\sin 4x=g(x)$,

故 D 正确.

故选:D.

题型七: 三角函数图象与性质的综合应用

20. (2024·高一·浙江湖州·阶段练习) 已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\phi)(A>0, \omega>0, |\phi|<\frac{\pi}{2})$ 的图象在 y 轴右侧的第一个最大值点和最小值点分别为 $(\pi, 2)$ 和 $(4\pi, -2)$.

(1) 试求 $f(x)$ 的解析式;

(2) 将 $y=f(x)$ 图象上所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{3}$ (纵坐标不变), 然后再将新的图象向 x 轴正方向平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位, 得到函数 $y=g(x)$ 的图象. 写出函数 $y=g(x)$ 的解析式, 并用五点法画出 $y=g(x)$ 在长度为一个周期的闭区间上的图象;

(3) 在第 (2) 问的前提下, 若方程 $g(x)-a=0$ 对 $x\in\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right]$ 有两个不同的实数根, 求 a 的取值范围.

【解析】(1) 由函数 $f(x)$ 在 y 轴右侧的第一个最大值点和最小值点分别为 $(\pi, 2)$ 和 $(4\pi, -2)$. 可得 $A=2$,

且 $\frac{T}{2}=3\pi$, 解得 $T=6\pi$, 所以 $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{1}{3}$, 此时 $f(x)=2\sin(\frac{1}{3}x+\phi)$,

把点 $(\pi, 2)$ 的坐标代入解析式 $f(x)=2\sin(\frac{1}{3}x+\phi)$, 可得 $2\sin(\frac{1}{3}\pi+\phi)=2$,

因为 $|\phi|<\frac{\pi}{2}$, 所以 $\phi=\frac{\pi}{6}$, 所以该函数的解析式为 $f(x)=2\sin(\frac{1}{3}x+\frac{\pi}{6})$.

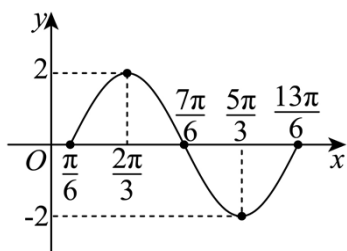
(2) 将 $y=f(x)$ 图像上所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{3}$, 得到 $y=2\sin(x+\frac{\pi}{6})$,

再沿 x 轴正方向平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位, 得到 $g(x)=2\sin(x-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6})=2\sin(x-\frac{\pi}{6})$,

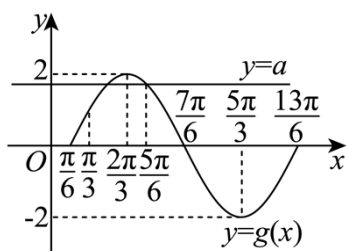
列表如下:

x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{13\pi}{6}$
$x-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	0	2	0	-2	0

描点、连线, 可得函数 $g(x)$ 在长度为一个周期的闭区间上的简图, 如图所示:



(3) 在第(2)问的前提下, 若方程 $g(x)-a=0$ 对 $x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right]$ 有两个不同的实数根, 即 $y=g(x)$ 与 $y=a$ 对 $x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right]$ 有两个不同的交点. 如图,



当 $x = \frac{5\pi}{6}$ 时, $g(\frac{5\pi}{6}) = \sqrt{3}$. 结合图知道 a 的取值范围为 $[\sqrt{3}, 2)$.

21. (2024·高一·安徽·期末) 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right)$ 上单调递增, 且直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 和

$x = \frac{2\pi}{3}$ 为函数 $y = f(x)$ 的图象的两条对称轴.

(1) 求 $f(x)$ 的一个解析式;

(2) 将 $f(x)$ 的图象先向左平移 $\frac{5\pi}{12}$ 个单位长度, 再把所得图象上各点的横坐标伸长为原来的 2 倍, 得到函数

$h(x)$ 的图象, 若对任意的 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 不等式 $p[h(x)-1] \cdot \left[h\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-1\right] < h(2x)$ 恒成立, 求实数 p 的取值范围.

【解析】(1) 根据题意可知 $\frac{T}{2} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, $\therefore T = \pi$,

取 $\omega > 0$, 则 $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2$,

又根据“五点法”可得 $2 \times \frac{\pi}{6} + \varphi = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$,

$\therefore \varphi = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$,

$\therefore f(x) = \sin\left(2x - \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right) = \sin\left(2x - \frac{5\pi}{6}\right)$.

(2) 将 $f(x) = \sin\left(2x - \frac{5\pi}{6}\right)$ 的图象向左平移 $\frac{5\pi}{12}$ 个单位长度得到 $y = \sin\left[2\left(x + \frac{5\pi}{12}\right) - \frac{5\pi}{6}\right] = \sin 2x$ 的图象,

再将各点的横坐标伸长为原来的 2 倍得到 $y = \sin x$ 的图象, 故 $h(x) = \sin x$.

对任意的 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 不等式 $p[h(x)-1]\left[h\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-1\right] < h(2x)$ 恒成立.

即对任意的 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $p(\sin x - 1)\left[\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-1\right] < \sin 2x$

即 $p(\sin x - 1)(\cos x - 1) < \sin 2x$ 恒成立.

当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $\sin x \in (0, 1), \cos x \in (0, 1), \sin 2x \in (0, 1]$

当 $p \leq 0$ 时, 不等式恒成立.

当 $p > 0$ 时, $\frac{1}{p} > \left[\frac{(\sin x - 1)(\cos x - 1)}{\sin 2x}\right]_{\max}$,

$$\text{令 } F(x) = \frac{(\sin x - 1)(\cos x - 1)}{\sin 2x} = \frac{\sin x \cos x + 1 - \cos x - \sin x}{2 \sin x \cos x} = \frac{1}{2} + \frac{1 - \cos x - \sin x}{2 \sin x \cos x},$$

设 $t = \cos x + \sin x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 则 $t \in (1, \sqrt{2}]$

$$2 \sin x \cos x = t^2 - 1.$$

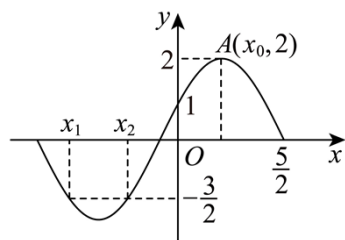
令 $y = \frac{1}{2} + \frac{1-t}{t^2-1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{1+t}$, 其值域为 $\left(0, \frac{3}{2} - \sqrt{2}\right]$,

$\therefore \frac{1}{p} > \frac{3}{2} - \sqrt{2}$, 即 $0 < p < 6 + 4\sqrt{2}$.

综上, p 的取值范围是 $(-\infty, 6 + 4\sqrt{2})$.

22. (2024·高一·北京延庆·期中) 已知函数 $f(x) = 2 \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如下图,

$$A(x_0, 2), f(x_1) = f(x_2) = -\frac{3}{2}.$$



(1) 若已知图中点 A 的横坐标 $x_0 = 1$.

(i) 求 $\omega, \varphi, f(x)$ 的解析式;

(ii) 若 $f(x) \geq \sqrt{2}$, 求 x 的取值范围;

(2) 求 $\sin\left[\frac{\pi}{6}(x_2 - x_1)\right]$ 的值.

【解析】(1) (i) Q 图中点 A 的横坐标 $x_0 = 1$,

$$\therefore \frac{T}{4} = \frac{5}{2} - 1 = \frac{3}{2}, \therefore T = \frac{2\pi}{\omega} = 6, \therefore \omega = \frac{\pi}{3}.$$

$$\therefore f(x) = 2\sin\left(\frac{\pi}{3}x + \varphi\right),$$

将点 $A(1, 2)$ 代入得: $2\sin\left(\frac{\pi}{3} + \varphi\right) = 2$,

所以 $\frac{\pi}{3} + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$,

所以 $\varphi = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$,

因为 $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$,

所以 $k = 0$ 时, $\varphi = \frac{\pi}{6}$.

$$\therefore f(x) = 2\sin\left(\frac{\pi}{3}x + \frac{\pi}{6}\right).$$

(ii) 若 $f(x) = 2\sin\left(\frac{\pi}{3}x + \frac{\pi}{6}\right) \geq \sqrt{2}$,

则 $\sin\left(\frac{\pi}{3}x + \frac{\pi}{6}\right) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$\therefore 2k\pi + \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{3}x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

解得 $6k + \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{7}{4} + 6k, k \in \mathbb{Z}$,

即 x 的取值范围为 $\left[6k + \frac{1}{4}, \frac{7}{4} + 6k\right], k \in \mathbb{Z}$.

(2) 由图可知, $f(0) = 2\sin\varphi = 1$, 又 $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\therefore \varphi = \frac{\pi}{6}$,

将点 $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ 代入得: $2\sin\left(\frac{5\omega}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = 0$,

所以 $\frac{5\omega}{2} + \frac{\pi}{6} = \pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}$,

解得 $\omega = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$,

因为 $\frac{T}{2} > \frac{5}{2}$, 即 $T = \frac{2\pi}{\omega} > 5$,

所以 $0 < \omega < \frac{2\pi}{5}$,

所以当 $k=0$ 时, $\omega=\frac{\pi}{3}$,

$$\therefore f(x)=2\sin\left(\frac{\pi}{3}x+\frac{\pi}{6}\right),$$

$$\text{又 } f(x_1)=f(x_2)=-\frac{3}{2},$$

$$\therefore 2\sin\left(\frac{\pi}{3}x_1+\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{3}x_2+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{3}{2},$$

$$\therefore \sin\left(\frac{\pi}{3}x_2+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{3}{4},$$

由图可知 $\frac{\pi}{3}x_2+\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$,

$$\therefore \cos\left(\frac{\pi}{3}x_2+\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{1-\sin^2\left(\frac{\pi}{3}x_2+\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{\sqrt{7}}{4},$$

$$\text{Q } \frac{\pi}{3}x_2+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}x_1+\frac{\pi}{6}=-\pi,$$

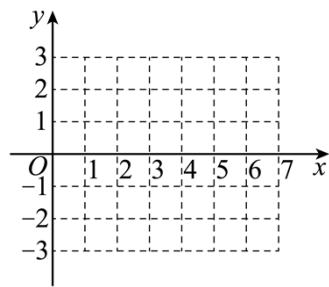
$$\therefore x_2+x_1=-4,$$

$$\therefore -x_1=x_2+4$$

$$\therefore \sin\left[\frac{\pi}{6}(x_2-x_1)\right]=\sin\frac{\pi}{6}(2x_2+4)=\sin\left(\frac{\pi}{3}x_2+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}x_2+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{7}}{4}.$$

题型八：用五点法作函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象

23. (2024·高一·四川凉山·期中) 已知函数 $f(x)=2\sin\left(\frac{\pi}{3}x+\frac{\pi}{3}\right)$



(1) 用“五点作图法”在给定坐标系中画出函数 $f(x)$ 在 $[0,6]$ 上的图像;

(2) 结合第 (1) 图象写出函数 $y=f(x)$ 在 $[0,6]$ 上单调递增区间;

(3) 当 $x\in[0,m]$ 时, $f(x)$ 的取值范围为 $[\sqrt{3},2]$, 求 m 的取值范围.

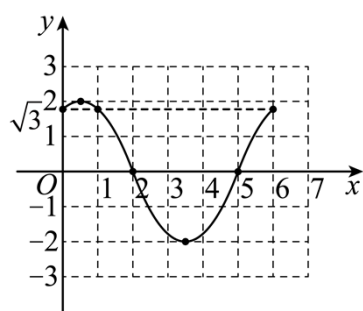
$$\text{【解析】(1) } f(x)=2\sin\left(\frac{\pi}{3}x+\frac{\pi}{3}\right), \quad T=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}}=6,$$

$$\text{由 } 0\leq x\leq 6 \text{ 可得, } \frac{\pi}{3}\leq \frac{\pi}{3}x+\frac{\pi}{3}\leq \frac{7\pi}{3},$$

列表如下：

$\frac{\pi}{3}x + \frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{7\pi}{3}$
x	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{7}{2}$	5	6
$2\sin\left(\frac{\pi}{3}x + \frac{\pi}{3}\right)$	$\sqrt{3}$	2	0	-2	0	$\sqrt{3}$

作图：



(2) 结合图像，函数 $y = f(x)$ 在 $[0, 6]$ 上的单调递增区间为 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ ， $\left[\frac{7}{2}, 6\right]$

(3) $\forall x \in [0, m]$ ， $\therefore \frac{\pi}{3}x + \frac{\pi}{3} \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi m}{3} + \frac{\pi}{3}\right]$ ，

又 $\sqrt{3} \leq f(x) \leq 2$ ，

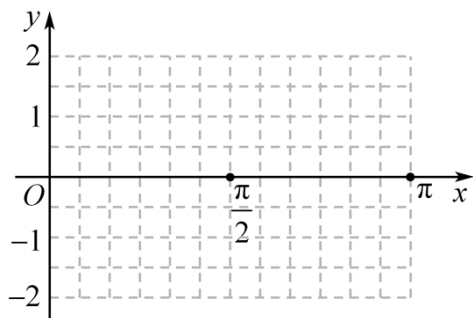
所以 $\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{3}m + \frac{\pi}{3} \leq \frac{2}{3}\pi$ ，

所以， $\frac{1}{2} \leq m \leq 1$ ，

$\therefore m$ 的取值范围是 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 。

24. (2024·高一·海南·阶段练习) 已知函数 $f(x) = \sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x$ 。

(1) 用“五点作图法”在给定的坐标系中，画出函数 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上的图像；



(2) 先将函数 $y = f(x)$ 的图像向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位后，再将得到的图像上各点的横坐标伸长为原来的 4 倍，纵

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/378023011124007026>