通项公式与求和(重难点)

考点一

[解题必备]

1．数列的前n项和及其与通项的关系

(1)$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$;

(2)$a_n=\begin{cases} S_1\ (n=1), \\ S_n-S_{n-1}\ (n\geq 2). \end{cases}$

2．由递推公式求数列通项的常用方法

(1)形如$a_{n+1}=a_n+f(n)$，常用累加法，即利用$a_n=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})(n\geq 2，n\in\mathbf{N}^*)$求解．

(2)形如$a_{n+1}=a_n\cdot f(n)$，常用累乘法，即利用$a_n=a_1\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\cdots\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}$ $(n\geq 2，n\in\mathbf{N}^*)$求解.

(3)形如$a_{n+1}=ba_n+d(b\neq 1)$，常用构造等比数列法.

对$a_{n+1}=ba_n+d$变形得$a_{n+1}+x=b(a_n+x)$(其中$x=\frac{d}{b-1}$)，则$\{a_n+x\}$是公比为b的等比数列，利用它可求出a_n.

[典题研磨]

[例1]　(1)(多选)已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_n-3a_{n+1}=2a_na_{n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$，则下列结论正确的是(　　)

A．$\left\{\dfrac{1}{a_n}+1\right\}$为等比数列

B．$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\dfrac{1}{2\times 3^{n-1}-1}$

C．$\{a_n\}$为递增数列

D．$\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$的前$n$项和$T_n=3^n-n-1$

(2)数列$\{a_n\}$满足$\dfrac{1}{2}a_n=a_{n+1}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$，且$a_1=\dfrac{1}{2}$，若$a_n<\dfrac{1}{3}$，则$n$的最小值为(　　)

A．3　　B．4　　C．5　　D．6

[解析]　(1)因为$a_n-3a_{n+1}=2a_na_{n+1}$，

两边同除a_na_{n+1}，

可得$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{3}{a_n}+2$，

所以$\frac{1}{a_{n+1}}+1=3\left(\frac{1}{a_n}+1\right)$，

又$\frac{1}{a_1}+1=2\neq 0$，

所以$\left\{\frac{1}{a_n}+1\right\}$是以2为首项，3为公比的等比数列，故A正确；

所以$\frac{1}{a_n}+1=2\times 3^{n-1}$，

即$a_n=\frac{1}{2\times 3^{n-1}-1}$，

所以$\{a_n\}$为递减数列，故B正确，C错误；

所以$\frac{1}{a_n}=2\times 3^{n-1}-1$，$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$的前$n$项和为

$$T_n=(2\times 3^0-1)+(2\times 3^1-1)+\cdots+(2\times 3^{n-1}-1)$$

$$=2\times(3^0+3^1+\cdots+3^{n-1})-n$$

$$=2\times\frac{1-3^n}{1-3}-n=3^n-n-1$$，故D正确.

(2)数列$\{a_n\}$满足$\frac{1}{2}a_n=a_{n+1}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$，

即$a_{n+1}-\frac{1}{2}a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$，两边同时除以$\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

可得$\frac{a_{n+1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}-\frac{a_n}{\left(\frac{1}{2}\right)^n}=1$，$a_1=\frac{1}{2}$，

数列$\left\{\frac{a_n}{\left(\frac{1}{2}\right)^n}\right\}$是等差数列，其首项为1，公差为1，

所以$\frac{a_n}{\left(\frac{1}{2}\right)^n}=1+(n-1)\times 1=n$，所以$a_n=n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

令$a_n<\frac{1}{3}$，即$n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n<\frac{1}{3}$，当$n=1$，2，3时，$a_n>\frac{1}{3}$；

当$n=4$时，$4\times\frac{1}{16}=\frac{1}{4}<\frac{1}{3}$.故选B.

[答案]　(1)ABD　(2)B

反思提升

由递推关系式求数列的通项公式，常用的方法有：

(1)求出数列的前几项，再归纳猜想出数列的一个通项公式(注意验证)；

(2)将已知递推关系式整理、变形得到等差或等比数列的通项公式，或用累加法(适用于$a_{n+1}=a_n+f(n)$型)、累乘法(适用于$a_{n+1}=a_n\cdot f(n)$型)、待定系数法(适用于$a_{n+1}=pa_n+q$型)求通项公式.

[注意]　由S_n求a_n时，一定要注意分$n=1$和$n\geq 2$两种情况进行讨论，最后验证两者可否合为一个式子，若不能，则用分段形式来表示.

[押题演练]

1．数列$\{a_n\}$满足：$\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{2^2}a_2+\frac{1}{2^3}a_3+\cdots+\frac{1}{2^n}a_n=2n+1$，则数列$\{a_n\}$的通项公式为________________.

[解析]　由$\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{2^2}a_2+\frac{1}{2^3}a_3+\cdots+\frac{1}{2^n}a_n=2n+1$，　①

得$\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{2^2}a_2+\frac{1}{2^3}a_3+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}a_{n-1}=2(n-1)+1=2n-1(n\geqslant 2)$，　②

①－②，得$\frac{1}{2^n}a_n=2n+1-(2n-1)=2$，$\therefore a_n=2\cdot 2^n=2^{n+1}$.当$n=1$时，$\frac{1}{2}a_1=2+1=3$，$\therefore a_1=6$，不满足上式．$\therefore a_n=\begin{cases}6，& n=1，\\ 2^{n+1}，& n\geqslant 2.\end{cases}$

[答案]　$a_n=\begin{cases}6，& n=1，\\ 2^{n+1}，& n\geqslant 2\end{cases}$

2．已知首项为2的数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}(2n-1)=a_n(2n+1)(n\in\mathbf{N}^*)$，则数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=$________.

[解析]　因为$a_{n+1}(2n-1)=a_n(2n+1)(n\in\mathbf{N}^*)$，且$a_1=2$，所以$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2n+1}{2n-1}$，当$n\geqslant 2$时，得$a_n=a_1\times\frac{a_2}{a_1}\times\frac{a_3}{a_2}\times\cdots\times\frac{a_n}{a_{n-1}}=2\times\frac{3}{1}\times\frac{5}{3}\times\cdots\times\frac{2n-1}{2n-3}=4n-2$，显然$a_1=2$适合上式，$\therefore a_n=4n-2$，$n\in\mathbf{N}^*$.

[答案]　$4n-2$，$n\in\mathbf{N}^*$

考点二

[解题必备]

1．数列求和

(1)分组转化法：一个数列既不是等差数列，也不是等比数列，若将这个数列适当拆开，重新组合，就会变成几个可以求和的部分，分别求和，然后再合并.

(2)错位相减法：主要用于求数列$\{a_n \cdot b_n\}$的前n项和，其中$\{a_n\}$，$\{b_n\}$分别是等差数列和等比数列.

(3)裂项相消法：即将数列的通项分成两个式子的代数差的形式，然后通过累加抵消中间若干项的方法，裂项相消法适用于形如$\left\{\dfrac{c}{a_n a_{n+1}}\right\}$(其中$\{a_n\}$是各项均不为零的等差数列，$c$为常数)的数列.

2．常见的拆项公式

(1)若$\{a_n\}$为各项都不为0的等差数列，公差为$d(d\neq0)$，则$\frac{1}{a_n\cdot a_{n+1}}=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$；

(2)$\frac{1}{n(n+k)}=\frac{1}{k}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}\right)$；

(3)$\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$．

[典题研磨]

角度一　分组转化法求和

[例2]　数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$满足：$a_1=1$，a_n是a_{n+1}与-3^n的等差中项，$b_n=a_n-3^n$.

(1)求数列$\{b_n\}$的通项公式；

(2)设$c_n=b_n+\log_2|b_n|$，求数列$\{c_{2n-1}\}$的前n项和T_n.

[解]　(1)$\because a_n$是a_{n+1}与-3^n的等差中项，

$\therefore 2a_n=a_{n+1}-3^n$. $\therefore a_{n+1}=2a_n+3^n$.

$\therefore a_{n+1}-3^{n+1}=2(a_n-3^n)$,

即$b_{n+1}=2b_n$.

$\therefore b_n=b_12^{n-1}=(a_1-3)\times 2^{n-1}=-2^n$.

$\therefore$数列$\{b_n\}$的通项公式为$b_n=-2^n$.