湖北省高中名校联盟 2022-2023 学年高一下学期联合测评

数学试题

本试题共 **4** 页，**22** 题．满分 **150** 分．考试用时 **120** 分钟．

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上．

2．回答选择题时，选出每小题〖答　案〗后，用 **2B** 铅笔把答题卡上对应题目的〖答　案〗标号涂黑．如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他〖答　案〗标号．回答非选择题时，用签字笔或钢笔将〖答　案〗写在答题卡上．写在本试卷上无效．

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回．

一、选择题：本题共 **8** 小题，每小题 **5** 分，共 **40** 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．已知集合 $A=\{y|\ y=\sin x\}, B=\{y|\ y=2^x, x\le 0\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A．$(-\infty,0]$　　B．$[-1,0]$　　C．$[-1,0)$　　D．$(0,1]$

2．已知 i 为虚数单位，复数 $z=\mathrm{i}(a-2\mathrm{i})$ 的虚部与实部互为相反数，则实数 $a=$（　　）

A．-1　　B．-2　　C．1　　D．2

3．立体几何中的四个基本事实是学习立体几何的基础，下列四个命题中不是立体几何中的基本事实的是（　　）

A．过不在一条直线上的三点，有且仅有一个平面

B．如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线上的所有点都在这个平面内

C．平行于同一条直线的两条直线平行

D．垂直于同一条直线的两条直线平行

4．已知向量 $\vec{a},\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=3, \vec{a}\cdot\vec{b}=0$，则 $|\vec{a}+\vec{b}|=$（　　）

A．$\sqrt{13}$　　B．1　　C．5　　D．$\sqrt{11}$

5．点 P 在以坐标原点为圆心，半径为 1 的圆 O 上逆时针作匀速圆周运动，起点为圆 O 与 x 轴正半轴的交点，点 Q 为 $y=-\sqrt{3}x(x\le 0)$ 与圆 O 的交点，记点 P 运动到点 R，使得 $\sin\angle ROQ=\dfrac{2}{3}$（点 R 在第二象限），则点 R 的坐标为（　　）

A．$\left(\dfrac{\sqrt{5}-2\sqrt{3}}{6},\dfrac{2+\sqrt{15}}{6}\right)$　　B．$\left(\dfrac{-\sqrt{5}-2\sqrt{3}}{6},\dfrac{-2+\sqrt{15}}{6}\right)$

C．$\left(\dfrac{-2-\sqrt{15}}{6},\dfrac{-\sqrt{5}-2\sqrt{3}}{6}\right)$　　D．$\left(\dfrac{2-\sqrt{15}}{6},\dfrac{\sqrt{5}-2\sqrt{3}}{6}\right)$

6．将函数$f(x)=\sqrt{3}\sin x+\cos x$向右平移$\varphi(\varphi>0)$个单位长度后得到一个偶函数，则实数$\varphi$的最小值为（　　）

A．$\dfrac{\pi}{6}$　B．$\dfrac{\pi}{3}$　C．$\dfrac{2\pi}{3}$　D．$\dfrac{5\pi}{6}$

7．在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AB\perp BC,AB=BC=BB_1$，过点A作直线l与A_1C_1和B_1C所成的角均为α，则α的最小值为（　　）

A．$60°$　B．$45°$　C．$30°$　D．$15°$

8．在$\triangle ABC$中，a,b,c分别为角A,B,C所对的边，$\triangle ABC$的面积为$\dfrac{3}{2},\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}\in(\sqrt{3},3\sqrt{3})$，则$(c+a-b)(c+b-a)$的取值范围为（　　）

A．$(8\sqrt{2}-8,8)$　　B．$(6\sqrt{3},12+6\sqrt{3})$

C．$(12-6\sqrt{3},2\sqrt{3})$　　D．$(12-6\sqrt{3},6\sqrt{3})$

二、选择题：本题共**4**小题，每小题**5**分，共**20**分．在每小题给出的四个选项中，有多项是符合题目要求的．全部选对的得**5**分，部分选对的得**2**分，有选错的得**0**分．

9．已知i为虚数单位，则（　　）

A．复数$z=2-3\mathrm{i}$在复平面内对应的点位于第四象限

B．$|1-2\mathrm{i}|=5$

C．$\mathrm{i}+\mathrm{i}^2+\mathrm{i}^3+\cdots+\mathrm{i}^{2023}=-1$

D．$z=1-\sqrt{3}\mathrm{i}$，则$z\cdot\overline{z}=4$

10．已知向量$\vec{a}=(1,\sqrt{3}),\vec{b}=(\cos\theta,\sin\theta)(\theta\in[0,\pi])$，则（　　）

A．若$\vec{a}/\!/\vec{b}$，则$\theta=\dfrac{\pi}{6}$　　B．$\vec{a}\cdot\vec{b}$的最小值为-1

C．$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$可能成立　　D．$|\vec{a}-\vec{b}|$的最大值为3

11．已知正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为1，点P为线段BC_1上的动点，则（　　）

A．$DP//$ 平面 AB_1D_1

B．D_1P+CP 的最小值为 $\sqrt{1+\sqrt{2}}$

C．直线 DP 与平面 $ABCD$ 、平面 DCC_1D_1 、平面 ADD_1A_1 所成的角分别为 α,β,γ ，则 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=1$

D．点 C 关于平面 AB_1D_1 的对称点为 M ，则 M 到平面 $ABCD$ 的距离为 $\frac{4}{3}$

12．在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 的对边分别为 $a,b,c,a=3,A=\frac{\pi}{3},O$ 为 $\triangle ABC$ 的外心，则（　　）

A．若 $\triangle ABC$ 有两个解，则 $3<c<2\sqrt{3}$

B．$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}$ 的取值范围为 $[-3\sqrt{3},3\sqrt{3}]$

C．$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ 的最大值为 9

D．若 B,C 为平面上的定点，则 A 点的轨迹长度为 $\frac{8}{3}\sqrt{3}\pi$

三、填空题：本题共 **4** 小题，每小题 **5** 分，共 **20** 分．

13.在 $\triangle ABC$ 中，内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c . 若 $a=3,b=5,\sin B=\frac{5}{9}$ ，则 $\cos A=$ ______________.

14．已知点 $A(0,2),B(2,3),C(3,3),D(6,7)$ ，则 $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{CD}$ 上的投影向量为______________．（用坐标表示）

15．已知函数 $f(x)$ 满足 $y=f(x+1)-1$ 为奇函数，则函数 $f(x)$ 的〖解析〗式可能为______________（写出一个即可）.

16．已知正三棱锥 $A-BCD$ 的侧棱长为 3 $\angle BAC=\angle BAD=\angle CAD=\frac{\pi}{2}$ ．过顶点 A 作底面 BCD 的垂线，垂足为 E ，过点 E 作侧面 ABC 的垂线，垂足为 F ，过点 F 作平面 ABD 的垂线，垂足为 G ，连接相关线段形成四面体 $AEFG$ ，则四面体 $AEFG$ 的外接球的表面积为______________.

四、解答题：本题共 **6** 小题，共 **70** 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．（10 分）已知 $|\vec{a}|=3,|\vec{b}|=2$ ，向量 $\vec{a},\vec{b}$ 的夹角为 $60°,c=2\vec{a}+3\vec{b},\vec{d}=m\vec{a}-2\vec{b}$ ，其中 $m\in\mathbf{R}$.

（1）若$\vec{c}//\vec{d}$，求实数m的值；

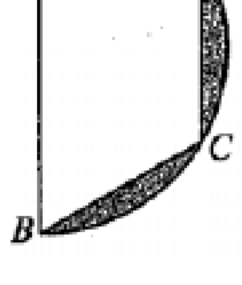
（2）若$\vec{c}\perp\vec{d}$，求实数m的值.

18.（12 分）在$\triangle ABC$中，角A,B,C的对边分别为$a,b,c,2\sin A-\sqrt{3}\cos C=\dfrac{\sqrt{3}\sin C}{\tan B}$.

（1）求B的大小；

（2）若B为锐角，求$\sin A+\sin B+\sin C$的取值范围.

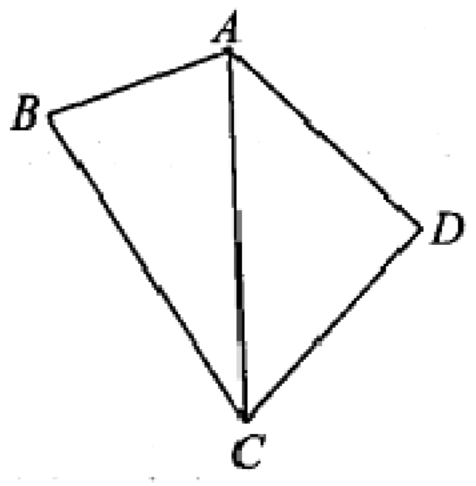
19.（12 分）意大利数学家卡瓦里在《不可分量几何学》中讲解了通过平面图形旋转计算体积的方法. 如图，AB为半圆的直径，C,D为半圆弧上的点，$AB=4,\angle CBA=\angle BAD=60^\circ$，阴影部分为弦$BC,CD,DA$与半圆弧所形成的弓形. 将该几何图形绕着直径$AB$所在直线旋转一周，阴影部分旋转后会形成一个几何体.



（1）写出该几何体的主要结构特征（至少两条）；

（2）计算该几何体的体积．

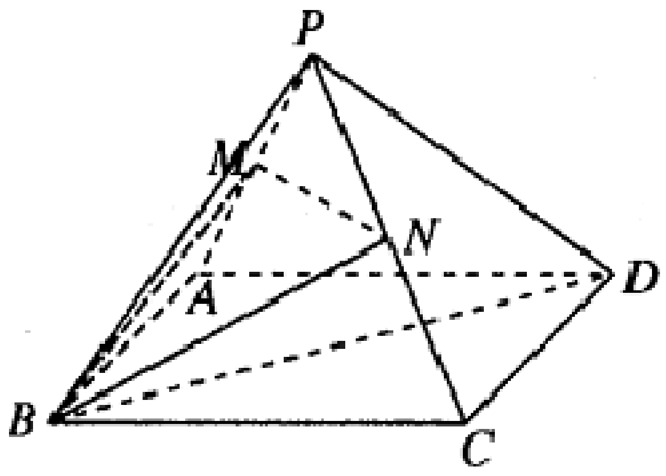
20．（12 分）某地政府为了解决停车难问题，在一块空地上规划建设一个四边形停车场．如图，经过测量 $AB=2, BC=6, CD=4, DA=4$，中间 AC 是一条道路，其面积忽略不计．



（1）求 $3\cos B-4\cos D$ 的值；

（2）$\triangle ABC, \triangle ACD$ 的面积分别记为 S_1, S_2，求 $S_1^2+S_2^2$ 的最大值．

21．（12 分）如图，在正四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA=2, AB=\sqrt{2}, M, N$ 分别为PA, PC 的中点．



（1）证明：平面 $PBD\perp$平面 BMN；

（2）求直线 PB 与平面 BMN 所成角的正弦值；

（3）求该四棱锥被平面 BMN 所截得的两部分体积之比$\frac{V_1}{V_2}$，其中 $V_1<V_2$．

22．（12 分）（1）已知函数 $f(x)=x+\frac{a}{x}(x>0, a\in\mathbf{R})$，指出函数 $f(x)$的单调性．（不需要证明过程）；

（2）若关于θ的方程$\sin^2 2\theta + k\sin 2\theta + \sqrt{2}k\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)\sin 2\theta + 4\sin^2\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) + 2k(\sin\theta + \cos\theta) + k = 0$，

在$\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$有实数解，求实数$k$的最大值.

——★ 参 考 答 案 ★——

一、选择题

1．D

〖解 析〗$\because A=[-1,1], B=(0,1], \therefore A\cap B=(0,1]$.

2．B

〖解 析〗$\because z=2+a\mathrm{i}$ 且 $a+2=0, \therefore a=-2$.

3．D

〖解 析〗根据四个基本事实可知前三个都是立体几何中的基本事实.

4．A

〖解 析〗由 $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2}=\sqrt{13}$.

5．B

〖解 析〗$\because x_R=\cos\left(\angle ROQ+120^\circ\right), y_R=\sin\left(\angle ROQ+120^\circ\right)$ 且 $\cos\angle ROQ=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ ，

$\therefore x_R=\dfrac{-\sqrt{5}-2\sqrt{3}}{6}, y_R=\dfrac{-2+\sqrt{15}}{6}$.

6．C

〖解 析〗将函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin x+\cos x=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 向右平移 $\varphi(\varphi>0)$ 个单位长度得到函数 $y=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}-\varphi\right)$ ，由函数 $y=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}-\varphi\right)$ 是偶函数得到 $\dfrac{\pi}{6}-\varphi=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in z)$ ，又 $\varphi>0$ ，$\therefore \varphi_{\min}=\dfrac{2\pi}{3}$.

7．C

〖解 析〗$\because AC /\!/ A_1C_1, \therefore \angle B_1CA$ 为异面直线 A_1C_1 和 B_1C 所成的角，又 $AC=B_1A=B_1C$ ，$\therefore \angle B_1CA=60^\circ$ ，过点 C 作直线 l 的平行线 l' ，则 l' 与 $\angle B_1CA$ 的角平分线重合时，α 取得最小值 30° .

8．B

〖解 析〗由 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{3}{2}\Rightarrow ab=\dfrac{3}{\sin C}$.

$\therefore \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}=ab\cos(\pi-C)=-ab\cos C=-\dfrac{3\cos C}{\sin C}=-\dfrac{3}{\tan C}\in(\sqrt{3},3\sqrt{3})$，

从而 $\tan C\in\left(-\sqrt{3},-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\Rightarrow C\in\left(\dfrac{2}{3}\pi,\dfrac{5}{6}\pi\right)\Rightarrow\dfrac{C}{2}\in\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{5\pi}{12}\right)$，

$\therefore (c+a-b)(c+b-a)=c^2-(a-b)^2=c^2-a^2-b^2+2ab=-2ab\cos C+2ab$，

$-2ab\cos C+2ab=2ab(1-\cos C)=\dfrac{6(1-\cos C)}{\sin C}=6\tan\dfrac{C}{2}\in(6\sqrt{3},12+6\sqrt{3})$．

二、选择题

9．ACD

〖解 析〗A 对，$z=2-3\mathrm{i}$ 对应的点坐标为 $(2,-3)$ 在第四象限；

B 错，$|1-2\mathrm{i}|=\sqrt{5}$；

C 对，$\mathrm{i}^{4n}+\mathrm{i}^{4n-1}+\mathrm{i}^{4n-2}+\mathrm{i}^{4n-3}=0\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，故 $\mathrm{i}+\mathrm{i}^2+\mathrm{i}^3+\cdots+\mathrm{i}^{2023}=\mathrm{i}+\mathrm{i}^2+\mathrm{i}^3=-1$；

D 对，$z\cdot\overline{z}=|\overline{z}|^2=4$．

10．BC

〖解 析〗A 错，若 $\vec{a}/\!/\vec{b}$，则 $\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta=2\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)=0$．又 $\theta\in[0,\pi],\therefore\theta=\dfrac{\pi}{3}$．

B 对，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta=2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)$，当 $\theta=\pi$ 时，$(\vec{a}\cdot\vec{b})_{\min}=-1$；

C 对，由选项 B 可知，当 $\theta=\dfrac{5\pi}{6}$ 时，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，则 $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$；

D 错，$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{5-2\cos\theta-2\sqrt{3}\sin\theta}=\sqrt{5-4\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)}$，

当 $\theta=\pi$ 时，$|\vec{a}-\vec{b}|_{\max}=\sqrt{7}$．

11．ACD

〖解 析〗A 对，平面 $BC_1D/\!/$ 平面 $AB_1D_1\Rightarrow DP/\!/$ 平面 AB_1D_1；

B 错，将平面 D_1C_1B 和平面 BC_1C 展开到同一个平面，连接 D_1C 即为所求最小值．用余弦定理或者过 D_1 作 CC_1 延长线的垂线，再用勾股定理均可得出 $D_1C=\sqrt{2+\sqrt{2}}$；

C 对，当 P 为 B 或 C_1 时，易求得 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=1$；当 P 为 BC_1 线段中间的点时，

过 P 作与平面 $ABCD$ 、平面 DCC_1D_1 、平面 ADD_1A_1 平行的平面，构成一个新长方体，其长、宽、高分别设为 a,b,c ，

则 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma$

$$=\left(\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)^2+\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)^2=1；$$

D 对，因为 $A_1C\perp$ 平面 AB_1D_1 ，且垂足为 A_1C 上靠近 A_1 的三等分点，则 C 关于平面 AB_1D_1 的对称点 M 为把 CA_1 延长 $\frac{1}{3}$ 倍，于是 M 到平面 $ABCD$ 的距离为 $\frac{4}{3}$.

12．ABD

〖解　析〗A 对，有两解的情形为 $\frac{\sqrt{3}}{2}c<3<c\Rightarrow 3<c<2\sqrt{3}$；

B 对，由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{3}{\sin\frac{\pi}{3}}=2\sqrt{3}=2R$ ，得外接圆半径 $R=\sqrt{3}$ ，

于是 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}=Ra\cos\langle\overrightarrow{OA},\overrightarrow{BC}\rangle=3\sqrt{3}\cos\langle\overrightarrow{OA},\overrightarrow{BC}\rangle\in[-3\sqrt{3},3\sqrt{3}]$；

C 错，法一：用投影向量求解：当 $\overrightarrow{BA}$ 在 $\overrightarrow{BC}$ 上的投影向量模最大且与之同向，取得 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ 的最大值，此时 $OA//BC,\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ 最大值为 $3\left(\frac{3}{2}+\sqrt{3}\right)=\frac{9}{2}+3\sqrt{3}$；

法二：转化到圆心：$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BC}\cdot(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA})=\frac{9}{2}+(\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{OA})_{\max}=\frac{9}{2}+3\sqrt{3}$ ；

D 对，由正弦定理知 A 点在半径为 $\sqrt{3}$ 的优弧上运动，但是由两段优弧拼接成葫芦状，所以长度为 $\frac{4}{3}\pi\times\sqrt{3}\times 2=\frac{8}{3}\sqrt{3}\pi$.

三、填空题

13． $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

〖解　析〗在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ 可解出 $\sin A=\frac{1}{3}$ ，又 $A<B$ ，故 $\cos A=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

14．$\left(\dfrac{6}{5},\dfrac{8}{5}\right)$

〖解 析〗$\overrightarrow{AB}=(2,1),\overrightarrow{CD}=(3,4)$，由投影向量公式可得.

15．$f\left(x\right)=x$

〖解 析〗取 $f\left(x\right)=x$，则 $y=f(x+1)-1=(x+1)-1=x$ 符合题意.

16．3π

〖解 析〗正三棱锥 $A-BCD$ 为正方体的一个墙角，E 为等边 $\triangle BCD$ 的中心.

因为平面 $ABC\perp$ 平面 $ABD,FG\perp$ 平面 ABD，则 G 在 AB 上.

知四面体 $AEFG$ 为鳖臑模型，则 AE 即为外接球的直径，即 $2R=\sqrt{3},R=\dfrac{\sqrt{3}}{2},S=4\pi R^2=3\pi$.（本题也可以把立体图形放在正方体中，更方便理解各个垂足所在的位置）

四、解答题

17．解：（1）$\because \vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 不共线，$\therefore$ 由 $\vec{c}//\vec{d}\Rightarrow\dfrac{m}{2}=\dfrac{-2}{3}\Rightarrow m=-\dfrac{4}{3}$.

（2）$\vec{c}\cdot\vec{d}=2m\vec{a}^2-6\vec{b}^2+(3m-4)\vec{a}\cdot\vec{b}=27m-36=0\Rightarrow m=\dfrac{4}{3}$.

18．解：（1）由 $2\sin A-\sqrt{3}\cos C=\dfrac{\sqrt{3}\sin C}{\tan B}=\dfrac{\sqrt{3}\sin C\cos B}{\sin B}$

$\Rightarrow 2\sin A\sin B-\sqrt{3}\cos C\sin B=\sqrt{3}\sin C\cos B$.

又 $\sin B\cos C+\cos B\sin C=\sin(B+C)=\sin A,$

$\therefore 2\sin A\sin B=\sqrt{3}\sin A$.　$A\in(0,\pi)\Rightarrow\sin A\neq0$，则 $\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

又 $B\in(0,\pi)\Rightarrow B=\dfrac{\pi}{3}$ 或 $B=\dfrac{2\pi}{3}$.

（2）$\because$ 角 B 是锐角，由（1）得 $B=\dfrac{\pi}{3},C=\dfrac{2\pi}{3}-A$.

$\therefore \sin A+\sin C=\sin A+\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-A\right)=\dfrac{3}{2}\sin A+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos A=\sqrt{3}\sin\left(A+\dfrac{\pi}{6}\right)$.

$\because A\in\left(0,\dfrac{2\pi}{3}\right),\therefore A+\dfrac{\pi}{6}\in\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}\right),.$

$\therefore \sin\left(A+\dfrac{\pi}{6}\right)\in\left(\dfrac{1}{2},1\right],\therefore \sin A+\sin C\in\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\sqrt{3}\right]$

$\therefore \sin A+\sin B+\sin C$ 的取值范围是 $\left(\sqrt{3},\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right]$.

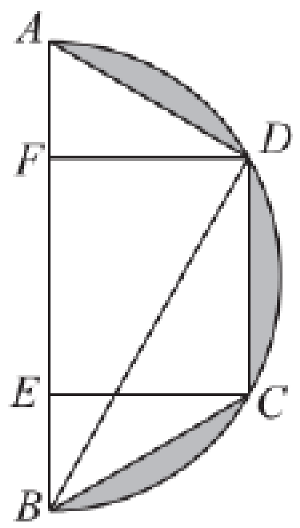
19．解：（1）该几何体中间空心部分为一个圆柱和两个等高的圆锥拼接而成的组合体，且圆柱的上下底面分别为两个圆锥的底面. 该旋转体为球体挖去上述组合体而形成的几何体.（写出“圆柱”、“圆锥”、“球”中一项给 1 分，两项给 3 分）

（2）连接 BD，则 $AD\perp BD$．分别过 C,D 作 AB 的垂线，垂足分别为 E,F．

$\angle BAD=60°,AB=4$，则 $AD=2,DF=\sqrt{3},AF=1$.

同理 $BC=2,CE=\sqrt{3},BE=1,EF=4-1-1=2$，即 $CD=2$.

体积为球的体积，减去两个圆锥的体积，减去圆柱的体积 $V=\dfrac{4}{3}\pi\times 2^3-2\times\dfrac{1}{3}\times\pi(\sqrt{3})^2\times 1-\pi\times(\sqrt{3})^2\times 2=\dfrac{8}{3}\pi$.



20．解：（1）在 $\triangle ABC,\triangle ADC$ 中，$AB=2,BC=6,AD=CD=4$，根据余弦定理，

$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos B=4+36-24\cos B=40-24\cos B$.

同理，在 $\triangle ADC$ 中，$AC^2=32-32\cos D$.

所以 $40-24\cos B=32-32\cos D$，化简得 $3\cos B-4\cos D=1$.

（2）由（1）有 $\cos D=\dfrac{3\cos B-1}{4}$.

由题意 $S_1^2=\left(\frac{1}{2}AB\cdot BC\sin B\right)^2=\left(\frac{1}{2}\times2\times6\sin B\right)^2=36\sin^2B=36\left(1-\cos^2B\right)$，

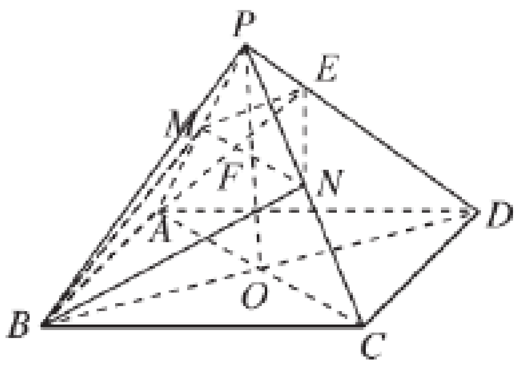
同理可得，$\triangle ADC$ 的面积 S_2，

$S_2^2=(8\sin D)^2=64-64\cos^2D=64-4(3\cos B-1)^2=60-36\cos^2B+24\cos B$．

令 $\cos B=x$，则 $S_1^2+S_2^2=36\left(1-x^2\right)+60+24x-36x^2=24\left(-3x^2+x+4\right)$，

所以，当 $x=\cos B=\frac{1}{6}$ 时，$S_1^2+S_2^2$ 取得最大值，最大值为 98．

21．（1）证明：连接 AC，并取 AC 中点 O，连 PO．



$$\left.\begin{array}{l}\text{正方形}ABCD\Rightarrow AC\perp BD\\ PA=PC\Rightarrow AC\perp PO\\ PO\cap BD=O\\ PO\subset\text{平面}PBD\\ BD\subset\text{平面}PBD\end{array}\right\}\Rightarrow AC\perp\text{平面}PBD.$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{又}MN/\!/AC\Rightarrow MN\perp\text{平面}PBD\\ MN\subset\text{平面}BMN\end{array}\right\}\Rightarrow\ \text{平面}PBD\perp\text{平面}BMN.$$

（2）解：设 PO 与 MN 相交于点 F，则 F 为 PO 的中点，

延长 BF 交 PD 于点 E，连接 EM,EN．

由 $BC=\sqrt{2}$，则 $BD=2$，则 $\triangle PBD$ 为等边三角形．

因为平面 $PBD\perp$ 平面 BMN，所以 P 到平面 BMN 的距离等于 P 到直线 BE 的距离．

$$BF=\sqrt{BO^2+OF^2}=\sqrt{1^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{2},PF=\frac{\sqrt{3}}{2},PB=2.$$

在 $\triangle PBF$ 中，用余弦定理，得 $\cos\angle PBF=\dfrac{2^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2\times2\times\frac{\sqrt{7}}{2}}=\dfrac{5}{2\sqrt{7}}=\dfrac{5}{14}\sqrt{7}$．

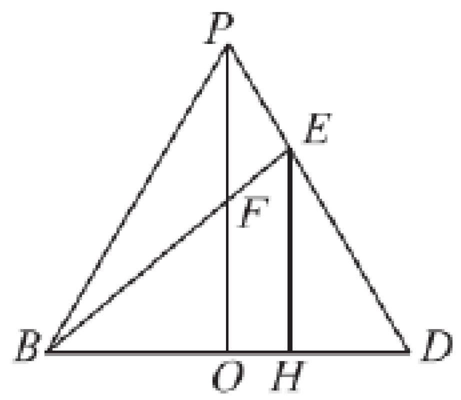
则 $\sin\angle PBF=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{21}}{14}$.

则 P 到直线 BE 的距离 $d=PB\sin\angle PBF=2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

直线 PB 与平面 BMN 所成角的正弦值 $\sin\theta=\dfrac{d}{PB}=\dfrac{\frac{\sqrt{21}}{7}}{2}=\dfrac{\sqrt{21}}{14}$.

（此问若直接说明 $\angle PBF$ 为所求的角，从而计算也可给 8 分；或者用等体积法求距离均可.）

（3）解：过 E 作 $EH\perp BD$ 于 H，



设 $DH=x$，则 $EH=\sqrt{3}x, OH=1-x, OF=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$， $OB=1$，

由 $\dfrac{OF}{EH}=\dfrac{BO}{BH}$，得 $\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}x}=\dfrac{1}{2-x}$，解出 $DH=x=\dfrac{2}{3}$.

即 E 点为 PD 上靠近 P 点的三等分点.

在 $\triangle PBE$ 中，$BE=\sqrt{2^2+\left(\dfrac{2}{3}\right)^2-2\times2\times\dfrac{2}{3}\cos60^\circ}=\dfrac{2}{3}\sqrt{7}$.

四棱锥 $P-ABCD$ 的高 $PO=\sqrt{3}$，则 $V_{P-ABCD}=\dfrac{1}{3}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$.

四边形 $BMEN$ 的对角线垂直，

则 $V_{P-BMEN}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times BE\times MN\times d=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}\sqrt{7}\times1\times\dfrac{\sqrt{21}}{7}=\dfrac{\sqrt{3}}{9}$，

下方几何体体积 $V_{下}=V_{P-ABCD}-V_{P-BMEN}=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{9}=\dfrac{5\sqrt{3}}{9}$，