

中考数学数学全等三角形截长补短试题及解析

一、全等三角形截长补短

1. 阅读下面材料，完成(1)-(3)题.

数学课上，老师出示了这样一道题：

如图 1，已知等腰 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ， AD 为 BC 边上的中线，以 AB 为边向 AB 左侧作等边 $\triangle ABE$ ，直线 CE 与直线 AD 交于点 F 。请探究线段 EF 、 AF 、 DF 之间的数量关系，并证明。

同学们经过思考后，交流了自己的想法：

小明：“通过观察和度量，发现 $\angle DFC$ 的度数可以求出来。”

小强：“通过观察和度量，发现线段 DF 和 CF 之间存在某种数量关系。”

小伟：“通过做辅助线构造全等三角形，就可以将问题解决。”

.....

老师：“若以 AB 为边向 AB 右侧作等边 $\triangle ABE$ ，其它条件均不改变，请在图 2 中补全图形，探究线段 EF 、 AF 、 DF 三者的数量关系，并证明你的结论。”

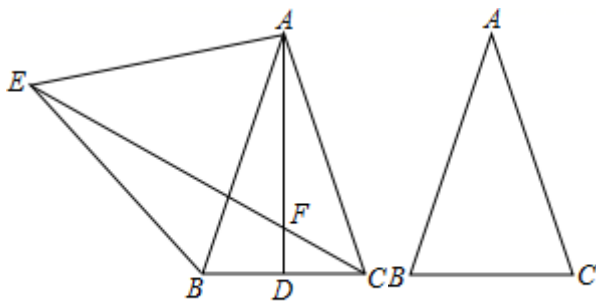


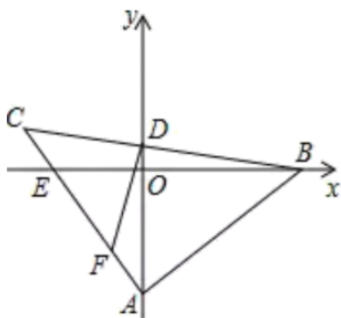
图 1

图 2

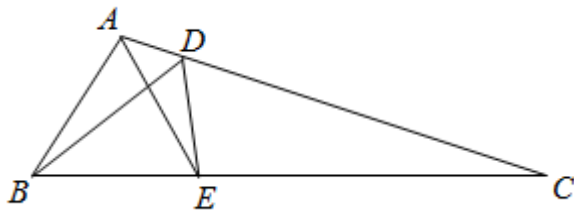
- (1) 求 $\angle DFC$ 的度数；
- (2) 在图 1 中探究线段 EF 、 AF 、 DF 之间的数量关系，并证明；
- (3) 在图 2 中补全图形，探究线段 EF 、 AF 、 DF 之间的数量关系，并证明。

2. 已知：在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = AC$ 。将 $\triangle ABC$ 按如图所示的位置放置在平面直角坐标系中，使得点 $A(0, m)$ 落在 y 轴的负半轴上，使得点 $B(n, 0)$ 落在 x 轴的正半轴上，点 C 在第二象限，并且 m, n 满足 $m^2 + n^2 + 6m - 8n + 25 = 0$ 。

- (1) 由题意可知 $OA = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $OB = \underline{\hspace{2cm}}$ （直接写答案）；
- (2) 求点 C 的坐标；
- (3) $\triangle ABC$ 的斜边 BC 交 y 轴于 D ，直角边 AC 交 x 轴于 E 。在 AC 上截取 $AF = CE$ ，连接 DF 。探究线段 DF 、 AD 、 BE 的数量关系并证明你的结论。



3. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 60^\circ$, 点 D 、 E 分别在 AC 、 BC 上, 连接 BD 、 DE 和 AE ; 并且有 $AB = BE$, $\angle AED = \angle C$.



(1) 求 $\angle CDE$ 的度数;

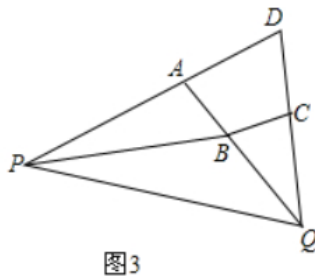
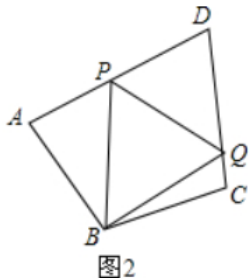
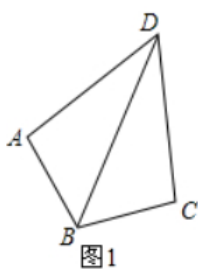
(2) 求证: $AD + DE = BD$.

4. 已知在四边形 $ABCD$ 中, $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$, $\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$, $AB = BC$

(1) 如图 1, 连接 BD , 若 $\angle BAD = 90^\circ$, $AD = 7$, 求 DC 的长度.

(2) 如图 2, 点 P 、 Q 分别在线段 AD 、 DC 上, 满足 $PQ = AP + CQ$, 求证: $\angle PBQ = \angle ABP + \angle QBC$

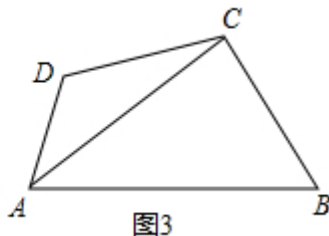
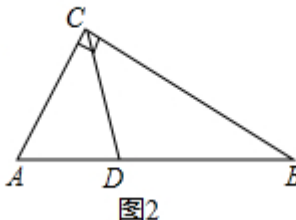
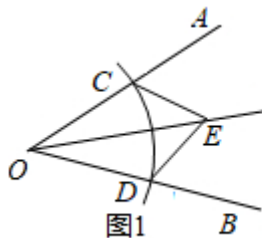
(3) 若点 Q 在 DC 的延长线上, 点 P 在 DA 的延长线上, 如图 3 所示, 仍然满足 $PQ = AP + CQ$, 请写出 $\angle PBQ$ 与 $\angle ADC$ 的数量关系, 并给出证明过程.



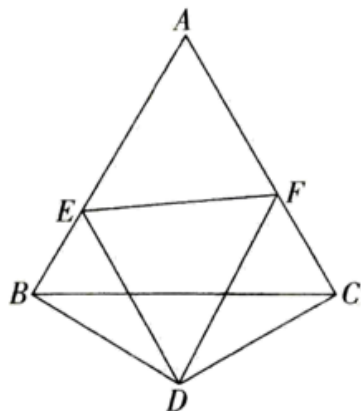
5. 阅读题: 如图 1, OM 平分 $\angle AOB$, 以 O 为圆心任意长为半径画弧, 交射线 OA , OB 于 C , D 两点, 在射线 OM 上任取一点 E (点 O 除外), 连接 CE , DE , 可证 $\triangle OCE \cong \triangle ODE$, 请你参考这个作全等的方法, 解答下列问题:

(1) 如图 2, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 2\angle B$, CD 平分 $\angle ACB$ 交 AB 于点 D , 试判断 BC 与 AC 、 AD 之间的数量关系;

(2) 如图 3, 在四边形 $ABCD$ 中, AC 平分 $\angle BAD$, $BC = CD = 10$, $AB = 20$, $AD = 8$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.



6. 如图, $\triangle ABC$ 是边长为 1 的等边三角形, $BD = CD$, $\angle BDC = 120^\circ$, 点 E , F 分别在 AB , AC 上, 且 $\angle EDF = 60^\circ$, 求 $\triangle AEF$ 的周长.



7. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, 点 D 与点 E 分别在 AB 、 AC 边上, $DE \parallel BC$, 且 $DE=DB$, 点 F 与点 G 分别在 BC 、 AC 边上, $\angle FDG = \frac{1}{2} \angle BDE$.

- (1) 如图 1, 若 $\angle BDE=120^\circ$, $DF \perp BC$, 点 G 与点 C 重合, $BF=1$, 直接写出 $BC=$ ___;
- (2) 如图 2, 当 G 在线段 EC 上时, 探究线段 BF 、 EG 、 FG 的数量关系, 并给予证明;
- (3) 如图 3, 当 G 在线段 AE 上时, 直接写出线段 BF 、 EG 、 FG 的数量关系:

_____.

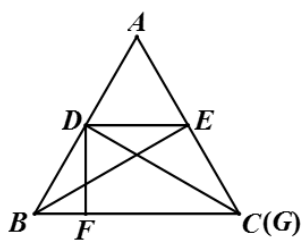


图 1

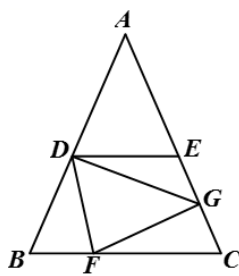


图 2

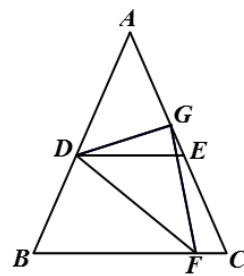
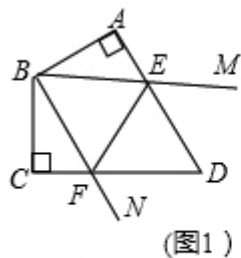


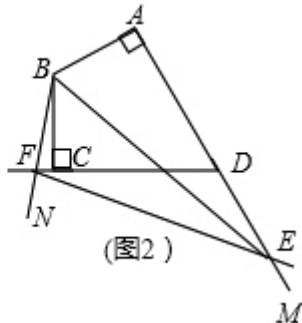
图 3

8. 如图 1, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB \perp AD$, $BC \perp CD$, $AB = BC$, $\angle ABC = 2\angle EBF$, 它的两边分别交 AD 、 DC 点 E 、 F . 且 $AE \neq CF$.

- (1) 求证: $EF = AE + CF$.
- (2) 如图 2, 当 $\angle MBN$ 的两边分别交 AD 、 DC 的延长线于点 E 、 F , 其余条件均不变时, (1) 中的结论是否成立? 如果成立, 请证明. 如果不成立, 线段 AE 、 CF 、 EF 又有怎样的数量关系? 并证明你的结论.

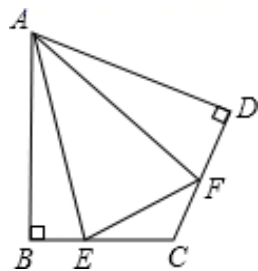


(图1)

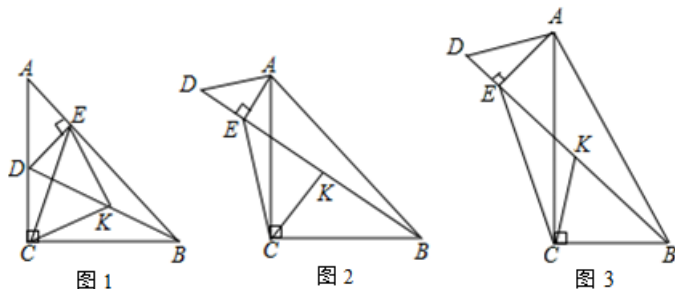


(图2)

9. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB=AD$, $\angle B=\angle D=90^\circ$, E 、 F 分别是边 BC 、 CD 上的点, 且 $\angle EAF = \frac{1}{2} \angle BAD$. 求证: $EF=BE+FD$.



10. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, $\angle BAC=\alpha$, 点 D 在边 AC 上 (不与点 A , C 重合) 连接 BD , 点 K 为线段 BD 的中点, 过点 D 作 $DE \perp AB$ 于点 E , 连结 CK , EK , CE , 将 $\triangle ADE$ 绕点 A 顺时针旋转一定的角度 (旋转角小于 90°)



- (1) 如图 1, 若 $\alpha=45^\circ$, 则 $\triangle ECK$ 的形状为_____;
- (2) 在 (1) 的条件下, 若将图 1 中的 $\triangle ADE$ 绕点 A 旋转, 使得 D , E , B 三点共线, 点 K 为线段 BD 的中点, 如图 2 所示, 求证: $BE-AE=2CK$;
- (3) 若 $\triangle ADE$ 绕点 A 旋转至图 3 位置时, 使得 D , E , B 三点共线, 点 K 仍为线段 BD 的中点, 请你直接写出 BE , AE , CK 三者之间的数量关系 (用含 α 的三角函数表示)。

【参考答案】***试卷处理标记, 请不要删除

一、全等三角形截长补短

1. (1) 60° ; (2) $EF=AF+FC$, 证明见解析; (3) $AF=EF+2DF$, 证明见解析.

【分析】

(1) 可设 $\angle BAD = \angle CAD = \alpha$, $\angle AEC = \angle ACE = \beta$, 在 $\triangle ACE$ 中, 根据三角形内角和可得 $2\alpha + 60 + 2\beta = 180^\circ$, 从而有 $\alpha + \beta = 60^\circ$, 即可得出 $\angle DFC$ 的度数;

(2) 在 EC 上截取 $EG=CF$, 连接 AG , 证明 $\triangle AEG \cong \triangle ACF$, 然后再证明 $\triangle AFG$ 为等边三角形, 从而可得出 $EF=EG+GF=AF+FC$;

(3) 在 AF 上截取 $AG=EF$, 连接 BG , BF , 证明方法类似 (2), 先证明 $\triangle ABG \cong \triangle EBF$, 再证明 $\triangle BFG$ 为等边三角形, 最后可得出结论.

【详解】

解：（1） $\because AB=AC$ ， AD 为 BC 边上的中线， $\therefore$ 可设 $\angle BAD=\angle CAD=\alpha$ ，

又 $\triangle ABE$ 为等边三角形，

$\therefore AE=AB=AC$ ， $\angle EAB=60^\circ$ ， $\therefore$ 可设 $\angle AEC=\angle ACE=\beta$ ，

在 $\triangle ACE$ 中， $2\alpha+60^\circ+2\beta=180^\circ$ ，

$\therefore \alpha+\beta=60^\circ$ ，

$\therefore \angle DFC=\alpha+\beta=60^\circ$ ；

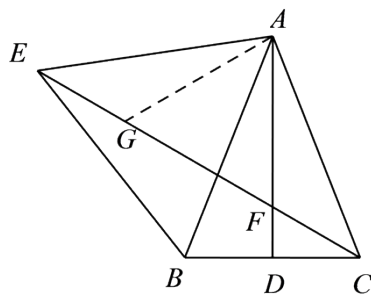
（2） $EF=AF+FC$ ，证明如下：

$\because AB=AC$ ， AD 为 BC 边上的中线， $\therefore AD\perp BC$ ， $\therefore \angle FDC=90^\circ$ ，

$\because \angle CFD=60^\circ$ ，则 $\angle DCF=30^\circ$ ，

$\therefore CF=2DF$ ，

在 EC 上截取 $EG=CF$ ，连接 AG ，



又 $AE=AC$ ，

$\therefore \angle AEG=\angle ACF$ ，

$\therefore \triangle AEG\cong\triangle ACF$ （SAS），

$\therefore \angle EAG=\angle CAF$ ， $AG=AF$ ，

又 $\angle CAF=\angle BAD$ ，

$\therefore \angle EAG=\angle BAD$ ，

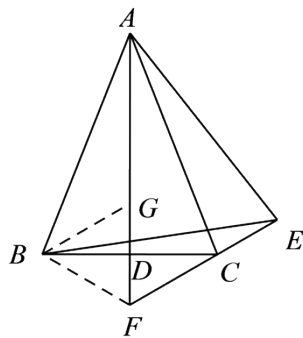
$\therefore \angle GAF=\angle BAD+\angle BAG=\angle EAG+\angle BAG=\angle 60^\circ$ ，

$\therefore \triangle AFG$ 为等边三角形，

$\therefore EF=EG+GF=AF+FC$ ，

即 $EF=AF+FC$ ；

（3）补全图形如图所示，



结论： $AF=EF+2DF$ ．证明如下：

同(1)可设 $\angle BAD = \angle CAD = \alpha$, $\angle ACE = \angle AEC = \beta$,

$$\therefore \angle CAE = 180^\circ - 2\beta,$$

$$\therefore \angle BAE = 2\alpha + 180^\circ - 2\beta = 60^\circ, \therefore \beta - \alpha = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle AFC = \beta - \alpha = 60^\circ,$$

又 $\triangle ABE$ 为等边三角形, $\therefore \angle ABE = \angle AFC = 60^\circ$,

$\therefore$ 由8字图可得: $\angle BAD = \angle BEF$,

在AF上截取 $AG = EF$, 连接BG, BF,

又 $AB = BE$,

$\therefore \triangle ABG \cong \triangle EBF$ (SAS),

$$\therefore BG = BF,$$

又AF垂直平分BC,

$$\therefore BF = CF,$$

$$\therefore \angle BFA = \angle AFC = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle BFG$ 为等边三角形,

$$\therefore BG = BF, \text{ 又 } BC \perp FG, \therefore FG = BF = 2DF,$$

$$\therefore AF = AG + GF = BF + EF = 2DF + EF.$$

【点睛】

本题考查了全等三角形的判定和性质、等边三角形的性质、等腰三角形的性质等知识, 解决问题的关键是常用辅助线构造全等三角形, 属于中考常考题型.

2. (1) 3, 4; (2) $C(-3, 1)$; (3) $BE = DF + AD$, 理由见解析

【分析】

(1) 由非负数的性质求出m, n即可;

(2) 如图, 作 $CH \perp y$ 轴于点H, 只要证明 $\triangle ACH \cong \triangle BAO$ 即可解决问题;

(3) 在OB上取一点K, 使得 $OK = DH$, 则 $\triangle CHD \cong \triangle AOK$, 再证明 $DF = EK$, $AD = BK$ 即可解决问题.

【详解】

$$\text{解: (1) } \because m^2 + n^2 + 6m - 8n + 25 = 0$$

$$\therefore (m+3)^2 + (n-4)^2 = 0,$$

$$\because (m+3)^2 \geq 0, (n-4)^2 \geq 0,$$

$$\therefore m = -3, n = 4,$$

$$\therefore A(0, -3), B(4, 0)$$

$$\therefore OA = 3, OB = 4,$$

故答案为: 3, 4

(2) 如图, 作 $CH \perp y$ 轴于点H,

$$\because \angle CHA = \angle AOB = \angle CAB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CAH + \angle ACH = 90^\circ, \angle CAH + \angle BAO = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACH = \angle BAO,$$

$$\therefore AC = BC,$$

$$\therefore \triangle ACH \cong \triangle BAO,$$

$$\therefore AH = OB = 4, CH = OA = 3,$$

$$\therefore OH = 1,$$

$$\therefore C(-3, 1)$$

(3) 结论为: $BE = DF + AD$

理由: 如图, 在 OB 上取一点 K , 使得 $OK = DH$,

$$\because CH = OA, \angle CHD = \angle AOK = 90^\circ, DH = OK,$$

$$\therefore \triangle CHD \cong \triangle AOK \text{ (SAS)},$$

$$\therefore CD = AK,$$

$$\because AD = BK, AB = AC,$$

$$\therefore \triangle AKB \cong \triangle CDA \text{ (SSS)},$$

$$\therefore \angle KAB = \angle ACD = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle EAK = 45^\circ = \angle FCD,$$

$$\because CE = AF,$$

$$\therefore CF = AE,$$

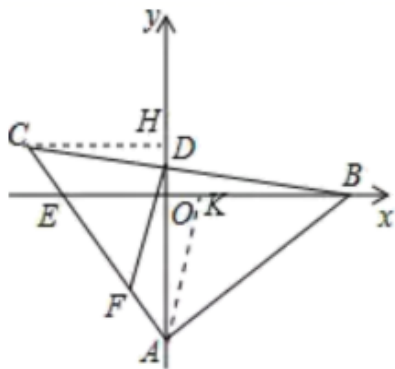
$$\because CD = AK,$$

$$\therefore \triangle CDF \cong \triangle AKE \text{ (SAS)}$$

$$\therefore DF = KE,$$

$$\because BE = EK + BK,$$

$$\therefore BE = DF + AD$$



【点睛】

本题考查三角形综合题、等腰直角三角形的性质、全等三角形的判定和性质、非负数的性质等知识, 解题的关键是学会添加常用辅助线, 构造全等三角形解决问题, 属于中考压轴题.

3. (1) 60° ; (2) 见解析

【分析】

(1) 由 $AB = BE$, $\angle ABC = 60^\circ$, 可得 $\triangle ABE$ 为等边三角形, 由 $\angle AEB = \angle EAC + \angle C$, $\angle CDE = \angle EAC + \angle AED$, $\angle AED = \angle C$, 可证 $\angle CDE = \angle AEB = 60^\circ$

(2) 延长 DA 至 F , 使 $AF = DE$, 连接 FB , 由 $\angle BED = 60^\circ + \angle AED$, $\angle BAF = 60^\circ + \angle C$, 且 $\angle C = \angle AED$, 可证 $\triangle FBA \cong \triangle DBE$ (SAS) 由 $DB = FB$, 可证

$\triangle FBD$ 为等边三角形，可得 $BD = FD$ ，可推出结论，

【详解】

解：（1） $\because AB = BE$ ， $\angle ABC = 60^\circ$ ，

$\therefore \triangle ABE$ 为等边三角形，

$\therefore \angle BAE = \angle AEB = 60^\circ$ ，

$\because \angle AEB = \angle EAC + \angle C$ ， $\angle CDE = \angle EAC + \angle AED$ ，

$\therefore \angle AED = \angle C$ ，

$\therefore \angle CDE = \angle AEB = 60^\circ$

（2）如图，延长 DA 至 F ，使 $AF = DE$ ，连接 FB ，

由（1）得 $\triangle ABE$ 为等边三角形，

$\therefore \angle AEB = \angle ABE = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle BED = \angle AEB + \angle AED = 60^\circ + \angle AED$ ，

又 $\because \angle BAF = \angle ABE + \angle C = 60^\circ + \angle C$ ，且 $\angle C = \angle AED$ ，

$\therefore \angle BED = \angle BAF$ ，

在 $\triangle FBA$ 与 $\triangle DBE$ 中，
$$\begin{cases} AB = BE \\ \angle BAF = \angle BED \\ AF = DE \end{cases}$$

$\therefore \triangle FBA \cong \triangle DBE (SAS)$

$\therefore DB = FB$ ， $\angle DBE = \angle FBA$

$\therefore \angle DBE + \angle ABD = \angle FBA + \angle ABD$ ，

$\therefore \angle ABE = \angle FBD = 60^\circ$

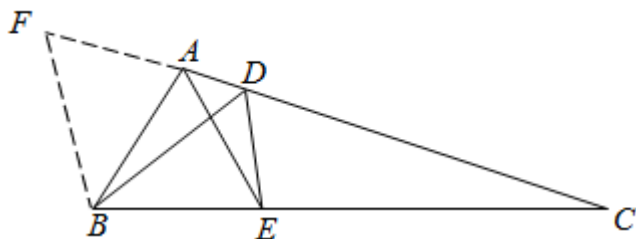
又 $\because DB = FB$ ，

$\therefore \triangle FBD$ 为等边三角形

$\therefore BD = FD$ ，

又 $\because FD = AF + AD$ ，且 $AF = DE$ ，

$\therefore FD = DE + AD = BD$ ，



【点睛】

本题考查等边三角形的判定与性质，三角形全等判定与性质，线段和差，三角形外角性质，关键是引辅助线构造三角形全等证明等边三角形．

4. （1） $DC = 7$ ；（2）见解析；（3） $\angle PBQ = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle ADC$ ，证明见解析

【分析】

（1）根据已知条件得出 $\triangle BDC$ 为直角三角形，再根据 HL 证出 $Rt\triangle BAD \cong Rt\triangle BCD$

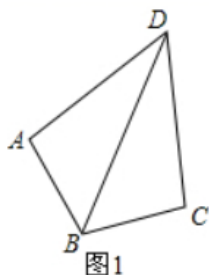
，从而证出 $AD = CD$ 即可得出结论；

(2) 如图 2，延长 DC 到 K ，使得 $CK = AP$ ，连接 BK ，通过证 $\triangle BPA \cong \triangle BCK$ (SAS) 得到：
 $\angle 1 = \angle 2$ ， $BP = BK$ 。然后根据 SSS 证明得 $\triangle PBQ \cong \triangle BKQ$ ，从而得出
 $\angle PBQ = \angle 2 + \angle CBQ = \angle 1 + \angle CBQ$ ，然后得出结论；

(3) 如图 3，在 CD 延长线上找一点 K ，使得 $KC = AP$ ，连接 BK ，构建全等三角形：
 $\triangle BPA \cong \triangle BCK$ (SAS)，由该全等三角形的性质和全等三角形的判定定理 SSS 证得：
 $\triangle PBQ \cong \triangle BKQ$ ，则其对应角相等： $\angle PBQ = \angle KBQ$ ，结合四边形的内角和是 360° 可以推得：
 $\angle PBQ = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle ADC$ 。

【详解】

(1) 证明：如图 1，



$$\because \angle ABC + \angle ADC = 180^\circ, \quad \angle BAD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BCD = \angle BAD = 90^\circ,$$

在 $Rt\triangle BAD$ 和 $Rt\triangle BCD$ 中，

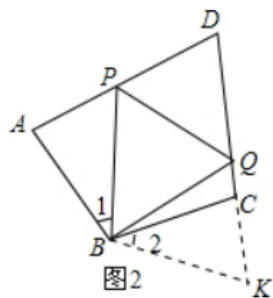
$$\begin{cases} BD = BD \\ AB = BC \end{cases}$$

$$\therefore Rt\triangle BAD \cong Rt\triangle BCD (HL),$$

$$\therefore AD = DC,$$

$$\therefore DC = 7;$$

(2) 如图 2，



延长 DC 至点 K ，使得 $CK = AP$ ，连接 BK

$$\because \angle ABC + \angle ADC = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD + \angle BCD = 180^\circ,$$

$$\because \angle BCD + \angle BCK = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle BCK,$$

$$\begin{aligned}
&\because AP = CK, AB = BC, \\
&\therefore \triangle BPA \cong \triangle BCK (SAS), \\
&\therefore \angle 1 = \angle 2, BP = BK, \\
&\because PQ = AP + CQ, QK = CK + CQ, \\
&\therefore PQ = QK, \\
&\because BP = BK, BQ = BQ, \\
&\therefore \triangle PBQ \cong \triangle BKQ (SSS), \\
&\therefore \angle PBQ = \angle 2 + \angle CBQ = \angle 1 + \angle CBQ, \\
&\therefore \angle PBQ = \angle ABP + \angle QBC; \\
&(3) \angle PBQ = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle ADC;
\end{aligned}$$

如图 3, 在 CD 延长线上找一点 K , 使得 $KC = AP$, 连接 BK ,

$$\begin{aligned}
&\because \angle ABC + \angle ADC = 180^\circ, \\
&\therefore \angle BAD + \angle BCD = 180^\circ, \\
&\because \angle BAD + \angle PAB = 180^\circ, \\
&\therefore \angle PAB = \angle BCK,
\end{aligned}$$

在 $\triangle BPA$ 和 $\triangle BCK$ 中,

$$\begin{cases} AP = CK \\ \angle BAP = \angle BCK \\ AB = BC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BPA \cong \triangle BCK (SAS),$$

$$\begin{aligned}
&\therefore \angle ABP = \angle CBK, BP = BK, \\
&\therefore \angle PBK = \angle ABC, \\
&\because PQ = AP + CQ, \\
&\therefore PQ = QK,
\end{aligned}$$

在 $\triangle PBQ$ 和 $\triangle BKQ$ 中,

$$\begin{cases} BP = BK \\ BQ = BQ \\ PQ = KQ \end{cases}$$

$$\therefore \triangle PBQ \cong \triangle BKQ (SSS),$$

$$\begin{aligned}
&\therefore \angle PBQ = \angle KBQ, \\
&\therefore 2\angle PBQ + \angle PBK = 2\angle PBQ + \angle ABC = 360^\circ, \\
&\therefore 2\angle PBQ + (180^\circ - \angle ADC) = 360^\circ, \\
&\therefore \angle PBQ = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle ADC.
\end{aligned}$$