

中文摘要

算子理论是研究与讨论数学问题的一个重要领域,反映了很多数学问题的本质,有着深刻的研究意义.线性算子的局部谱半径及数值域是了解线性算子的性质和结构的重要工具,本文基于压缩算子类、线性算子的局部谱半径及数值域定义的基础上,提出了一个新的概念:根数值域.

定义. $A \in \mathcal{B}(H)$, 称 A 的根数值域为

$$F(A) = \{h(A, x), x \in H, x \neq 0\}.$$

其中 $h(A, x) = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} \langle |A^n| x, x \rangle^{1/n}$.

对于这个全新的概念,本文研究了根数值域的一系列基本性质.

第一章介绍了提出根数值域这个新概念的具体想法和相关背景,以及本文的具体结构.

第二章介绍了根数值域的一些基本性质,包括算子数乘的根数值域,根数值域的范围,以及有限算子直和的根数值域等于这些算子的根数值域的并,最后指出酉等价的算子的根数值域相等.

第三章介绍了加权移位算子的根数值域,给出加权移位算子的根数值域的计算通式及其更精确的范围.给出单射加权移位算子的根数值域与其近似点谱的关系,指出拟相似的单射单边加权移位算子的根数值域是相等的.最后给出两种用根数值域判断双边加权移位是否强不可约的方法.

第四章介绍了正规算子的根数值域的等价定义,指出拟相似的正规算子的根数值域相等.

关键词: 根数值域, 局部谱半径, 加权移位算子, 强不可约.

Abstract

Operator theory is an important field in the study and discussion of mathematical problems, which reflects the essence of many mathematical problems and has profound research significance. The local spectral radius and numerical range of linear operators are important tools to understand the properties and structures of linear operators. Based on the definition of classes of contractions, local spectral radius and numerical range of linear operators, this paper propose a new concept: Radical numerical range.

Definition. $A \in \mathcal{B}(H)$, the radical numerical range of A is denoted by

$$F(A) = \{h(A, x), x \in H, x \neq 0\}.$$

where $h(A, x) = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} \langle |A^n| x, x \rangle^{1/n}$.

This paper studies a series of basic properties of radical numerical range for this new concept.

The first chapter introduces the idea and background of the new concept of radical numerical range and the structure of this paper.

The second chapter gives some basic properties of radical numerical range, including the radical numerical range of multiplicative operators, the range of the radical numerical range of operators, and the radical numerical range of direct sum of finite operators is equal to the union of the radical numerical range of these operators. Finally. It is pointed out that the radical numerical range of unitary equivalent operators is equal.

The third chapter introduces the radical numerical range of weighted shift operators, gives the general formula for calculating the radical numerical range of weighted shift operators, the more accurate range of the radical numerical range of weighted shift operators. Gives the relationship between the radical numerical range of injective weighted shift operators and its approximate

point spectrum, furthermore, points out that quasi-similar injective unilateral weighted shift operators have equal radical numerical range. Finally. Finally, gives two methods are given to determine whether the bilateral weighted shift operator is strongly irreducible by using the radical numerical range.

The fourth chapter introduces the equivalent definition of the radical numerical range of normal operators, and points out that the radical numerical range of quasi-similar normal operators is equal.

Keywords: Radical numerical range, Local spectral radius, Weighted shift operator, Strongly irreducible.

目 录

第一章 绪论	1
1.1 研究背景及概念的提出	1
1.2 本文的主要结构	4
第二章 根数值域及其相关性质	5
第三章 加权移位算子的根数值域及相关定理	9
3.1 相关背景及预备知识	9
3.2 加权移位算子的根数值域及相关定理	10
第四章 正规算子的根数值域及相关定理	19
4.1 预备知识及相关背景	19
4.2 主要结果	19
参考文献	22
致谢	25

第一章 绪论

§1.1 研究背景及概念的提出

Hilbert 在研究积分方程的求解及特征值理论时, 考虑了满足 $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$ 的数列 $x = (x_1, \dots, x_n, \dots)$ 集, 这些数列所构成的空间就是 l^2 空间, 也是 Hilbert 空间的最早形式. Hilbert 空间与欧氏空间类似, 是具有内积的完备空间, 从而可以将数学分析中的大部分概念推广到 Hilbert 空间中. 简而言之, Hilbert 空间作为欧氏空间的推广, 继承了其大部分性质.

在有限维空间中, 矩阵对角化是一个重要课题, 在 Hilbert 空间 H 中, 当 H 上的算子 A 满足 $A = A^*$ 时, A 便是实对称矩阵在无穷维空间的推广形式, 此时称 A 为自伴算子. 如果自伴算子 A 还满足 $\langle Ax, x \rangle \geq 0, x \in H$, 则称 A 为正算子. 正算子 A 会存在唯一的正平方根算子, 记作 $A^{1/2}$. 当 $A^* = A^{-1}$ 时, A 称作酉算子, 它是刚体运动在 Hilbert 空间上的推广. 在一切酉变换下不变的性质的研究可以看作是欧氏几何学在无穷维空间上的推广.

在复数域中, 若 $z \in \mathbb{C}$, 则 z 可以表示为 $z = |z|e^{i\arg z}$, 这是复数 z 的极分解. 将复数 z 的极分解进一步推广就得到了矩阵的极分解, 而有界线性算子的极分解实际上是矩阵广义极分解的推广. 在 Hilbert 空间中, 算子 A 可分解为 $A = U|A|$, 其中 U 是部分等距算子, $|A| = (A^*A)^{1/2}$ 称作 A 的模. 当 $N(U) = N(A)$ 时, U 是唯一的, 此时称 $A = U|A|$ 是算子 A 的极分解. 对于有限维空间 X 上的线性算子 A , A 的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 可将空间 X 分解为 A 的 n 个不变子空间 $M_1, M_2, \dots, M_n$ 的直和, 这是关于算子 A 的结构的重要结果. 这个结果对应了无穷维空间 H 上算子的谱 $\sigma(A)$. 因此谱理论可以看成是矩阵特征值理论在无限维空间的推广. 在数学史上, von Neumann 发现谱理论恰好是粒子物理与量子力学的数学基础, 使得谱理论成为算子理论的一个重要组成部分, 并得到迅速发展.

矩阵的谱的结构较为简单, 而线性算子的谱的结构比较复杂, 想要将其完美刻画有时难度很大, 于是数学家开始研究线性算子的谱的近似刻画. 基于此问题, 学者提出了谱半径, 数值域等概念.

算子 A 的谱半径 $r(A)$ 可以定义为满足级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-(n+1)} A^n$ 对半径为 r 的圆以外的所有 λ 在 0 点处收敛的最小 r 值. 当固定任意的 $x \in X$ 时, A 在点 x 处的局部谱半径定义为满足级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-(n+1)} A^n x$ 对半径为 r 的圆以外的所有 λ 在 0 点处收敛的最小 r 值, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n x\|^{1/n}$.

O. Toeplitz 在 1962 年提出了 Hilbert 空间上算子数值域的定义, 线性算子的数值域的定义来源于二次型 $f(x) = x^T A x$ 及 Rayleigh 商 $R(A, x) = \frac{x^T A x}{x^T x}, x \neq 0$ 等概念, 将以上二者推广到无穷维 Hilbert 空间后即得线性算子的数值域 $W(A) = \{\langle Ax, x \rangle / (x, x) : x \neq 0\}$. O. Toeplitz^[29] 和 Hausdorff^[14] 发现了数值域的凸性后, 线性算子的数值域开始受到人们的广泛关注. 随着数值域理论的发展, 有关特殊算子的数值域理论被逐渐完善, 如幂零算子的数值域^[16], 幂等算子的数值域^[28], 无穷维 Hamilton 算子的数值域^[2]等.

不变子空间问题指: 复可分 Hilbert 空间上的每个有界线性算子是否都具有非平凡的不变子空间? 这是算子理论的经典问题. $\mathcal{B}(H)$ 上的压缩算子 A 指对任意 $x \in H$, 都满足 $\|Ax\| \leq \|x\|$. S. Brown^[7] 等人证明了谱包含单位圆周的压缩算子都有非平凡的不变子空间. 研究压缩算子的不变子空间是有意义的, 因为对于任意非零算子 T , $T/\|T\|$ 都是一个压缩算子.

B. S. Nagy 与 C. Foias 最先提出压缩算子分类, 并进行了系统的研究, 推动了不变子空间问题的研究.

$C_{..}$ 类压缩算子定义为:

$$A \in C_0. \text{ 若 } A^n h \rightarrow 0, \forall h; \quad A \in C_1. \text{ 若 } A^n h \not\rightarrow 0, \forall h \neq 0;$$

$$A \in C_0 \text{ 若 } A^{*n} h \rightarrow 0, \forall h; \quad A \in C_1 \text{ 若 } A^{*n} h \not\rightarrow 0, \forall h \neq 0.$$

记 $C_{\alpha, \beta} = C_{\alpha} \cap C_{\beta} (\alpha, \beta = 0, 1)$.

若 A 为压缩算子, 则 A 在空间 $H = H_1 \oplus H_2$ 上有唯一的标准三角剖分 $\begin{pmatrix} C_0 & * \\ 0 & C_1 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} C_1 & * \\ 0 & C_0 \end{pmatrix}$, 其中 H_1 是 A 的最大不变子空间, 且 A 的限制是 C_1 类, H_2 是 A^* 的最大不变子空间, 且 A 的收缩是 C_0 类.

压缩算子 A 可进一步分解为

$$A = \begin{pmatrix} C_{01} & * & * & * & * \\ 0 & C_{00} & * & * & * \\ 0 & 0 & C_{11} & * & * \\ 0 & 0 & 0 & C_{00} & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{10} \end{pmatrix}.$$

若 A 为完全非酉压缩算子, 且存在非零函数 $u \in H^\infty$ 使得 $u(A) = 0$, 则称 A 为 C_0 类压缩算子, 此时 A 的极小函数的内因子与 A 的不变子空间可以建立如下联系.

A 是空间 H 上的 C_0 类压缩算子, 其极小函数 m_A 的每个内因子 m 对应的子空间 $H_m = \{h : h \in H, m(A)h = 0\}$ 都是 A 的超不变子空间. 进一步, 对每个维数大于 1 的空间 H 上的 C_0 类压缩算子 A , A 都有非平凡不变子空间.

B. S. Nagy 还指出每一个 C_{11} 类压缩算子 A 都存在非平凡的超不变子空间.

此后, 许多学者进行了压缩算子类与不变子空间关系的研究.

1987 年, L. Kérchy^[18]证明了若完全非酉算子的 C_{11} 类压缩算子 A 的西膨胀是不可约的, 则 A 有非平凡的不变子空间, 进一步, 有 $H^\infty(A) = \text{AlgLat}A$. 1997 年, C. S. Kubrusly^[19]证明了如果一个压缩算子没有非平凡不变子空间, 那么 A 是 C_{00}, C_{01}, C_{10} 类压缩算子中的一类. 2001 年, C. S. Kubrusly 与 N. Levan^[20]证明了若亚正规压缩算子 A 没有非平凡不变子空间, 则 A 是使 B 满足一定条件的 C_{00} 或 C_{10} 类压缩算子. 这里及下段的算子 B 和 B_* 分别是 H 上 $\{A^{*n}A^n, n \geq 1\}$ 和 $\{A^nA^{*n}, n \geq 1\}$ 的强极限.

2022 年, W. Mwangi^[23]得到了更强的结果, 证明了若是压缩算子 A 没有非平凡不变子空间, 则 A 或者是一个 C_{00} 类压缩算子, 或者是一个满足 $\|B_*x\| < \|x\|$ ($\forall x \in H, x \neq 0$) 的 C_{01} 类压缩算子, 或者是一个满足 $\|Bx\| < \|x\|$ ($\forall x \in H, x \neq 0$) 的 C_{10} 类压缩算子.

以上研究表明 C_{00} 类压缩算子与非平凡子空间的关系没有确切结果, 但 C_{00} 类的子类 C_0 类压缩算子却一定存在非平凡不变子空间, 因此思考, 是否 C_{01} 类压缩算子也可以取其满足某些条件的子类, 进而对不变子空间有更强的

联系?¹在算子 $A \in C_{01}$ 时有 $A^n x \rightarrow 0$, 但 $A^{*n} A^n x$ 的极限无法确定, 由此得到启发, 将定义建立在 $A^{*n} A^n x$ 上, 利用数值域定义, 再对其开 n 次方, 借此剥离开一些趋于 0 的数, 从而观察算子更细致的结构. 由此, 纪友清教授给出定义 $h(A, x) = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} \langle |A^n| x, x \rangle^{1/n}$, 这里为与算子的局部谱半径进行区分, 对 $A^{*n} A^n$ 进行了取模. 在本文第四章会证明若算子 A 具有正规性, 则 A 的 $h(A, x)$ 与其局部谱半径相等². 将 x 取遍 H 中非零元得到的 $h(A, x)$ 收集为集合 $\{h(A, x), x \in H, x \neq 0\}$, 称作算子 A 的根数值域, 记作 $F(A)$. 由此定义的算子的根数值域与其数值域有本质不同, 以下说明, 有限算子直和的根数值域会等于这些算子的根数值域的并, 但由于算子的数值域是凸的, 所以有限算子直和的数值域并不总等于这些算子的数值域的并.

§1.2 本文的主要结构

本文主要研究根数值域的基本性质及定理, 侧重于研究加权移位算子及正规算子的根数值域, 并与已有概念: 局部谱半径建立联系, 望借此能探究算子的更深一层的结构.

第一章: 绪论部分, 阐述提出根数值域这个新概念的具体想法, 介绍相关背景, 以及本文的主要结构.

第二章: 介绍根数值域的一些基本性质, 包括算子的根数值域与其数乘的根数值域的关系, 有限算子直和的根数值域等于这些算子的根数值域的并. 最后指出酉等价的算子的根数值域相等.

第三章: 介绍加权移位算子的根数值域的相关内容, 给出加权移位算子的根数值域的计算通式及其根数值域更精确的范围, 以及单射加权移位算子的根数值域与其近似点谱的关系, 指出拟相似的单射单边加权移位算子的根数值域是相等的, 最后附上两种用根数值域判断双边加权移位是否强不可约的方法.

第四章: 介绍正规算子的根数值域的相关内容, 给出正规算子根数值域的等价定义, 指出拟相似的正规算子的根数值域相等.

¹胡朝龙师兄提供了重要的建议.

²莫凤联证明了定义中上极限是必要的.

第二章 根数值域及其相关性质

定义2.0.1. 设 H 是可分无穷维 Hilbert 空间, $A \in \mathcal{B}(H)$, 定义 A 的根数值域 $F(A)$ 为

$$F(A) = \{h(A, x), x \in H, x \neq 0\}.$$

其中 $h(A, x) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \langle |A^n| x, x \rangle^{1/n}$.

由定义可以看出 $h(A, x)$ 与 x 的范数无关, 因此以下可以假设 $\|x\| = 1$.

算子 A 的局部谱半径 $r(A, x)$ 有以下性质^[10]:

- (1) $r(A, x) \in [0, r(A)]$,
- (2) $r(\alpha A, \beta x) = |\alpha| r(A, x), \forall \beta \neq 0, \alpha \in \mathbb{C}$,
- (3) $r(A, A^k x) = r(A, x), \forall x \in H, k \in \mathbb{N}$,
- (4) $r(A^k, x) = r(A, x)^k, \forall k \in \mathbb{Z}^+$.

于是思考算子 A 的 $h(A, x)$ 是否也有此性质.

性质2.0.2. $A \in \mathcal{B}(H)$, 则 A 的根数值域有以下性质:

- (1) $h(A, x) \in [0, r(A)]$,
- (2) $h(\alpha A, \beta x) = |\alpha| h(A, x), \forall \beta \neq 0, \alpha \in \mathbb{C}$,
- (3) $h(A, A^k x) = h(A, x), \forall x \in H, k \in \mathbb{N}$,
- (4) $h(A^k, x) \leq h(A, x)^k, \forall k \in \mathbb{Z}^+$.

证明

(1) 对任意 $x \in H$, 有

$$\begin{aligned} h(A, x) &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \langle |A^n| x, x \rangle^{1/n} \\ &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (\| |A^n| \| \cdot \|x\|^2)^{1/n} \\ &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{1/n} \\ &= r(A), \end{aligned}$$

因此有 $h(A, x) \in [0, r(A)]$.

(2) 对 $h(\alpha A, \beta x), \forall x \in \mathbb{C}$, 有

$$\begin{aligned} h(\alpha A, \beta x) &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\beta|^{2/n} |\langle (\alpha A)^n | x, x \rangle|^{1/n} \\ &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\alpha|^n |A^n | x, x \rangle|^{1/n} \\ &= |\alpha| h(A, x), \end{aligned}$$

因此有 $h(\alpha A, \beta x) = |\alpha| h(A, x), \forall \beta \neq 0, \alpha \in \mathbb{C}$.

(3) 任意 $k \in \mathbb{N}$ 固定, 对任意 $x \in H$, 有

$$\begin{aligned} h(A, A^k x) &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \langle A^{*k} | A^n | A^k x, x \rangle^{1/n} \\ &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \langle (A^{*2k} A^{*n} A^n A^{2k})^{1/2} x, x \rangle^{1/n} \\ &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \langle | A^{n+2k} | x, x \rangle^{1/(n+2k \cdot n+2k/n)} \\ &= h(A, x), \end{aligned}$$

因此有 $h(A, A^k x) = h(A, x), \forall x \in H, k \in \mathbb{N}$.

(4) 任意 $k \in \mathbb{Z}^+$ 固定, 对任意 $h(A^k, x)$, 有

$$\begin{aligned} h(A^k, x) &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \langle | A^{kn} | x, x \rangle^{1/n} \\ &= \left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \langle | A^{kn} | x, x \rangle^{1/(kn)} \right)^k \\ &\leq h(A, x)^k, \end{aligned}$$

故 $h(A^k, x) \leq h(A, x)^k, \forall k \in \mathbb{Z}^+$.

■

引理2.0.3. 若有界数列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 满足 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, 那么

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \max\{a_n, b_n\} = \max\{a, b\}.$$

证明 不妨设 $a > b$. 由上极限定义知对 $\forall \varepsilon, \exists$ 正整数 N , 使得 $n > N$ 时, 有 $a_n < a + \varepsilon, b_n < b + \varepsilon < a + \varepsilon$, 且有无穷多项满足 $a_n > a - \varepsilon, b_n > b - \varepsilon$. 设 $c_n = \max\{a_n, b_n\}$, 则对上述 ε, N , 当 $n > N$ 时有 $c_n < a + \varepsilon$, 且有无穷多项满足 $c_n > a - \varepsilon$, 因此数列 $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 有上极限 a . 即 $\{\max\{a_n, b_n\}\}_{n \in \mathbb{N}}$ 的上极限为 a .

■

定理2.0.4. 对 $\forall A, B \in \mathcal{B}(H)$, 有

$$F(A \oplus B) = F(A) \cup F(B).$$

证明 对 $\forall x, y \neq 0$

$$\begin{aligned} h((A \oplus B), (x, y)) &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left\langle \begin{pmatrix} A^n & \\ & B^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle^{1/n} \\ &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left\langle \begin{pmatrix} |A^n| & \\ & |B^n| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle^{1/n} \\ &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (\langle |A^n| x, x \rangle + \langle |B^n| y, y \rangle)^{1/n}. \end{aligned}$$

因此有

$$\begin{aligned} h((A \oplus B), (x, y)) &\geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (\max \{ \langle |A^n| x, x \rangle, \langle |B^n| y, y \rangle \})^{1/n} \\ &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \max \{ \langle |A^n| x, x \rangle^{1/n}, \langle |B^n| y, y \rangle^{1/n} \}, \\ h((A \oplus B), (x, y)) &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (2 \max \{ \langle |A^n| x, x \rangle, \langle |B^n| y, y \rangle \})^{1/n} \\ &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \max \{ \langle |A^n| x, x \rangle^{1/n}, \langle |B^n| y, y \rangle^{1/n} \}. \end{aligned}$$

设 $a_n = \langle |A^n| x, x \rangle^{1/n}$, $b_n = \langle |B^n| y, y \rangle^{1/n}$, 由 (性质2.0.2) 知 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 是有界数列, 则由 (引理2.0.3), 有

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \max \{ \langle |A^n| x, x \rangle^{1/n}, \langle |B^n| y, y \rangle^{1/n} \} = \max \left\{ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \langle |A^n| x, x \rangle^{1/n}, \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \langle |B^n| y, y \rangle^{1/n} \right\},$$

即 $h((A \oplus B), (x, y)) = \max\{h(A, x), h(B, y)\}$.

任取 $a \in F(A \oplus B)$, 则 $\exists x, y$ 使得 $a = h((A \oplus B), (x, y))$, 又 $h((A \oplus B), (x, y)) = \max\{h(A, x), h(B, y)\}$, 则 $a \in F(A) \cup F(B)$, 故 $F(A \oplus B) \subset F(A) \cup F(B)$.

另一方面, 显然 $F(A \oplus B) \supset F(A) \cup F(B)$.

综上, 有 $F(A \oplus B) = F(A) \cup F(B)$. ■

推论2.0.5. 对 $\forall A_n \in \mathcal{B}(H), N < \infty$, 有

$$F\left(\bigoplus_{n=1}^N A_n\right) = \bigcup_{n=1}^N F(A_n).$$

算子数值域是凸的, 因此两个算子直和的数值域不一定等于两个算子数值域的并, 再由 (定理2.0.4) 可知, 算子的根数值域与其数值域有本质区别.

定理2.0.6. 若 $A, B \in \mathcal{B}(H)$ 且 A 酉等价于 B , 则 $F(A) = F(B)$.

证明 已知 A 酉等价于 B , 即存在酉算子 $U \in \mathcal{B}(H)$, 使得 $UAU^* = B$, 对 $\forall a \in F(B), \exists x$ 使得 $a = h(B, x)$, 则有

$$\begin{aligned} h(B, x) &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \langle |B^n| x, x \rangle^{1/n} \\ &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \langle |UA^nU^*| x, x \rangle^{1/n} \\ &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \langle (UA^{*n}A^nU^*)^{1/2} x, x \rangle^{1/n} \\ &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \langle (UA^{*n}A^nU^*)^{1/2} UU^* x, UU^* x \rangle^{1/n} \\ &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \langle U^* (UA^{*n}A^nU^*)^{1/2} UU^* x, U^* x \rangle^{1/n}. \end{aligned}$$

由于 $(U^*(UA^{*n}A^nU^*)^{1/2}U)^2 = A^{n*}A^n$, 且正算子有唯一正平方根, 于是 $U^*(UA^{*n}A^nU^*)^{1/2}U = (A^{n*}A^n)^{1/2} = |A^n|$. 则有 $h(B, x) = h(A, U^*x)$, 于是 $F(B) \subset F(A)$.

同理, $F(A) \subset F(B)$, 故 $F(A) = F(B)$. ■

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/378067025071006046>