

江苏省苏州大学 2024 届高三新题型 2 月指导卷数学试题

学校: _____ 姓名: _____ 班级: _____ 考号: _____

一、单选题

1. 满足 $a \in M$, $\{a,b,c,d\} \subseteq M$ 的集合 M 共有 ()
A . 16 个
B . 15 个
C . 8 个
D . 7 个
2. 设 $0 < x < \pi$, 则函数 $f(x) = \frac{\sin x}{2} + \frac{2}{\sin x}$ 的最小值为 ()
A . 1
B . $\frac{3}{2}$
C . 2
D . $\frac{5}{2}$
3. 已知某 4 个数据的平均数为 6, 方差为 3, 现再加入一个数据 8, 则这 5 个数据的方差为 ()
A . $\frac{12}{5}$
B . $\frac{14}{5}$
C . $\frac{76}{25}$
D . $\frac{18}{5}$
4. 已知直线 l 的方向向量为 $u = (-1, -2, 2)$, 则向量 $a = (-1, 1, 2)$ 在直线 l 上的投影向量坐标为 ()
A . $(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$
B . $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$
C . $(-\frac{1}{9}, -\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$
D . $(\frac{1}{9}, -\frac{2}{9}, \frac{2}{9})$
5. 若圆锥的内切球半径为 1, 圆锥的侧面展开图为一个半圆, 则圆锥的体积为 ()
A . 2π
B . $\frac{8}{3}\pi$
C . 3π
D . 4π
6. 十六进制是一种逢 16 进 1 的计数制.我国曾在重量单位上使用过十六进制,比如成语“半斤八两”,即十六两为一斤.在现代,计算机中也常用到十六进制,其采用数字 0~9 和字母 A~F 共 16 个计数符号.这些符号与十进制的数的对应关系如下表:

十六进制	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
十进制	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

例如，用十六进制表示：E D 1B，则A B ()

7. 已知双曲线C: $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ (b > 0) 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过 F_2 且与 x 轴垂直的直线与 C 的一个交点为 P, $\triangle PF_1F_2$ 的内心为 M, 若 $|MF_2| = \sqrt{2}$, 则 C 的离心率为 ()
- A. 2 B. $\sqrt{3}$ C. $\frac{3}{2}$ D. $\sqrt{2}$

8. 若 $3\sin \alpha \cos \alpha = \sqrt{10}$, 则 $\tan \frac{\pi}{8} \cdot \frac{1}{\tan \frac{\pi}{8}}$ 的值为 ()
- A. 7 B. 14 C. $\frac{1}{7}$ D. $\frac{2}{7}$

二、多选题

9. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$, $S_7 = S_9$, 则 ()
- A. $S_{16} = 0$ B. 数列 $\{2a_n\}$ 是等比数列
- C. 数列 $\{S_n\}$ 中的最大项为 S_8 D. 数列 $\{\frac{S_n}{n}\}$ 是等差数列
10. 若正数 a, b 满足 $a + b = 1$, 则 ()
- A. $\log_2 a + \log_2 b = 2$ B. $2^a + 2^b = 2\sqrt{2}$
- C. $a - \ln b = 0$ D. $\sin a \sin b = \frac{1}{4}$
11. 已知点 $A(-2, 0), B(2, 0), N(0, \sqrt{2})$ 动点 M 满足直线 AM 和 BM 的斜率之积为 $-\frac{1}{2}$, 记点 M 的轨迹为曲线 C , 过坐标原点的直线交 C 于 P, Q 两点, 点 P 在第一象限, $PE \perp x$ 轴, 垂足为 E , 连接 QE 并延长交 C 于点 G , 则 ()
- A. 曲线 C 的方程为: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ B. $\triangle PQG$ 为直角三角形
- C. $\triangle PAN$ 面积最大值为 2 D. $\triangle PQG$ 面积最大值为 $\frac{16}{9}$

三、填空题

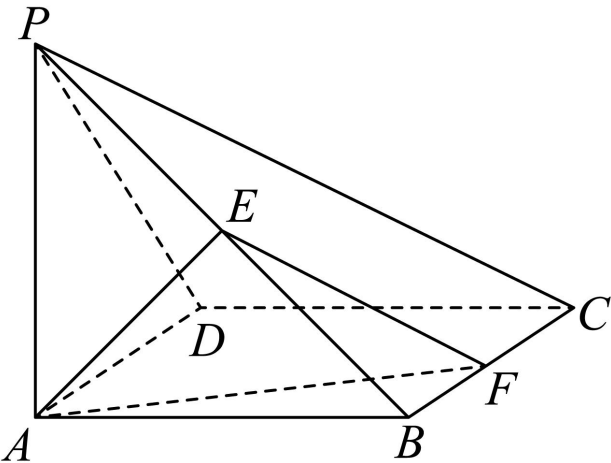
12. 写出一个同时满足① $1 \leq |z| \leq 2$; ② $|z| = 4$ 的复数 z _____.
13. 已知 $(1 - 2x)^6$ 展开式的二项式系数的最大值为 a , 系数的最大值为 b , 则 $\frac{b}{a}$ _____.
14. 过抛物线 $y^2 = 6x$ 的焦点 F 的直线交抛物线于 A, B 两点, C 在抛物线的准线上, 则 $\angle ACB$ 的最大值为 _____; 若 $\triangle ACB$ 为等边三角形, 则其边长为 _____.

四、解答题

15. 代号为 01, 02, 03 的三人同时对某一飞行目标进行射击, 三人击中的概率分别为 0.5, 0.6, 0.7. 若目标被一人击中, 则被击落的概率为 0.2; 若被 2 人击中, 则被击落的概率是 0.4; 若被三人击中, 则目标被击落的概率是 0.9.

- (1)求目标被 2 人击中的概率；
- (2)求目标被击落的概率.

16. 如图，在四棱锥 P-ABCD 中，底面 ABCD 为正方形，PA ⊥底面 ABCD，PA=AB=2，E 为线段 PB 的中点，F 为线段 BC 上的动点.



- (1)证明：平面 AEF ⊥平面 PBC；
- (2)若直线 AF 与平面 PAB 所成的角的余弦值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ，求点 P 到平面 AEF 的距离.

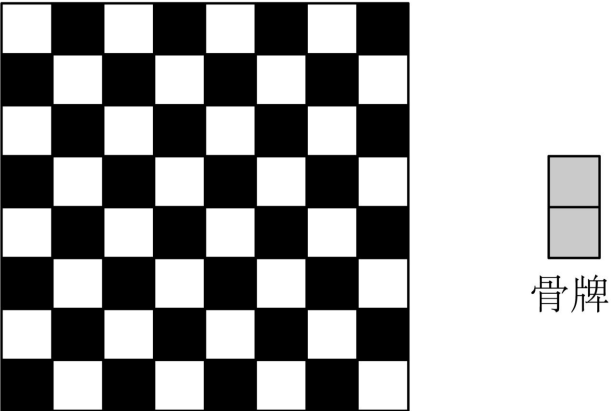
17. 已知在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 中， $AB=A_1B_1, AC=A_1C_1$ ，A 与 A_1 在直线 BC 的同侧， $AB \perp AC, A_1B_1 \perp A_1C_1$ ，直线 AC 与直线 A_1B_1 交于 O.

- (1)若 $AB=2, AC=1$ ，求 $\sin \angle AOB$ 的取值范围；
- (2)证明： $OA=OA_1$.

18. 已知函数 $f(x)=(1-x)^{1-x}$ ，其中 $x \in (0,1)$.

- (1)讨论 $f(x)$ 的单调性；
- (2)若 $0 < b < a < 1$ ，证明： $a^a \cdot b^b > a^b \cdot b^a$.

19. 国际象棋是国际通行的智力竞技运动.国际象棋使用 8×8 格黑白方格相间棋盘，骨牌为每格与棋盘的方格大小相同的 1×2 格灰色方格.若某种黑白相间棋盘与骨牌满足以下三点：①每块骨牌覆盖棋盘的相邻两格；②棋盘上每一格都被骨牌覆盖；③没有两块骨牌覆盖同一格，则称骨牌构成了棋盘的一种完全覆盖.显然，我们能够举例说明 8×8 格黑白方格相间棋盘能被骨牌完全覆盖.



国际象棋棋盘

- (1)证明：切掉 8×8 格黑白方格相间棋盘的对角两格，余下棋盘不能被骨牌完全覆盖；
- (2)请你切掉 8×8 格的黑白方格相间棋盘的任意两个异色方格，然后画出余下棋盘的一种

骨牌完全覆盖方式，并证明：无论切掉的是哪两个异色方格，余下棋盘都能被骨牌完全覆盖；

(3)记 $m \times n$ 格黑白方格相间棋盘的骨牌完全覆盖方式数为 $F(m,n)$ ，数列 $\{F(2,n)\}$ 的前 n 项和为 S_n ，证明： $S_n = F(2,n+2) - 2$ 。

参考答案：

1. C

【分析】根据集合满足的条件，列举出所有情况即可.

【详解】集合 M 满足 $a \in M \Rightarrow \{a, b, c, d\}$,

所以集合 M 可以为: $\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}$

共有 8 个.

故选: C

2. D

【分析】根据题意, 令 $t = \sin x$, 求导可得 $f'(t) = \frac{1}{2} - \frac{2}{t^2}$, 即可得到 $f(t)$ 在 $(0, 1)$ 单调递减,

从而得到结果.

【详解】因为 $0 < x < \pi$, 令 $t = \sin x$, 则 $t \in (0, 1)$, 由 $f'(t) = \frac{1}{2} - \frac{2}{t^2} < 0$ 可得

$f'(t) < 0$, 当 $t \in (0, 1)$ 时, $f'(t) < 0$, 则 $f(t)$ 单调递减,

所以 $t = 1$ 时, $f(t)$ 有最小值为 $f(1) = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{5}{2}$.

故选: D

【点睛】,

3. C

【分析】根据题意, 由平均数以及方差的计算公式, 代入计算, 即可得到结果.

【详解】设原来 4 个数据依次为 a, b, c, d , 则 $a + b + c + d = 24$,

方差为 3, 则 $\frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - 3 = 3$,

即 $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 12$,

所以 $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 12$, $a + b + c + d = 24$, $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 12$,

则 $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 12$, $a + b + c + d = 24$, $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 12$

再加入一个数据 8, 则其平均数为 $\frac{1}{5}(a + b + c + d + 8) = \frac{1}{5}(24 + 8) = \frac{32}{5}$,

则这 5 个数据的方差为 $\frac{1}{5}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 8^2) - \left(\frac{32}{5}\right)^2 = \frac{1}{5}(12 + 64) - \frac{1024}{25} = \frac{76}{25}$

$\frac{1}{5}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - \left(\frac{32}{5}\right)^2 = \frac{64}{25}$

$$\frac{1}{5} \cdot 156 - \frac{64}{5} - 24 - \frac{32}{5} \cdot 2 - 4 - \frac{64}{25} - \frac{76}{25}.$$

故选：C

4. D

【分析】根据题意，求得 $\frac{\vec{r} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|} = 1, |\vec{r}| = 3$ ，结合 $\frac{\vec{u} \cdot \vec{a}}{|\vec{u}|} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{r}}{|\vec{u}|}$ ，代入即可求解.

【详解】直线 l 的方向向量为 $\vec{u} = (1, 2, 2)$ 和 $\vec{a} = (1, 1, 2)$,

可得 $\frac{\vec{r} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|} = 1, |\vec{r}| = \sqrt{1^2 + (2)^2 + 2^2} = 3$,

则向量 $\vec{a} = (1, 1, 2)$ 在直线 l 上的投影向量的坐标为

$$\frac{\vec{u} \cdot \vec{a}}{|\vec{u}|} \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} (1, 2, 2) = \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{2}{9}\right).$$

故选：D.

5. C

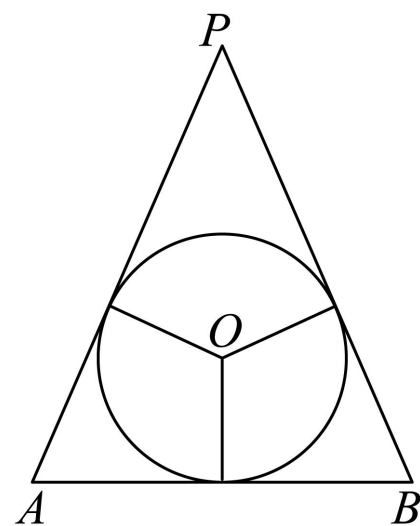
【分析】利用圆锥侧面展开图扇形弧长可构造方程求得 $l = 2r$ ，利用圆锥轴截面面积可构造方程求得 r 的值，代入圆锥体积公式即可.

【详解】根据题意，设圆锥的底面半径为 r ，母线长为 l ，高为 h ，

圆锥侧面展开图为半圆，

侧面展开图扇形弧长为 $\pi l = 2\pi r$ ，则 $l = 2r$ ，

作出圆锥的轴截面如下图所示，其中 O 为圆锥内切球球心，



$$h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{3}r,$$

$$S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot h = \sqrt{3}r^2$$

$$\text{又 } S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2}(2l - 2r) \cdot 1 = 3r,$$

$$\sqrt{3}r_2 = 3r, \text{ 解得: } r = \sqrt{3}, \quad h = 3,$$

$$\text{圆锥体积为 } V = \frac{1}{3}\pi r_2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 3 \cdot 3 = 3\pi.$$

故选：C

6. A

【分析】由表格中 A、B 对应的十进制可得 $A = B = 10 = 11$ ，转化为十六进制可得答案.

【详解】由表格中 A 对应的十进制为 10，B 对应的十进制为 11，

所以 $A = B = 10 = 11$ ，

由十进制表示为 $10 = 11 = 6 = 16 = 14$ ，

又表格中 E 对应的十进制为 14，

所以十六进制表示 $A = B = 6E$ ，

故选：A.

7. A

【分析】由双曲线定义及圆的切线性质推出圆在 x 轴切于实轴端点，进而求出 c 可求解.

【详解】如图，设圆 M 与各边切于 A, B, C，双曲线实半轴长为 a = 1，半焦距为 c，

$$\text{由切线性质得 } |PC| = |PB|, |FC| = |F_1A|, |F_2B| = |F_1A|,$$

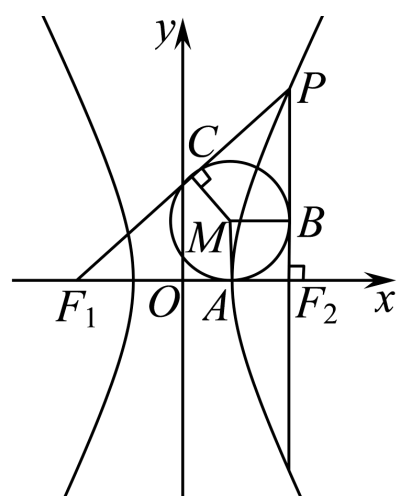
$$\text{故 } |PF_1| = |PF_2| = |FC| = |F_2B| = |F_1A| = |F_2A| = 2a = 2,$$

$$\text{即 A 在双曲线上，即 } A(1, 0), \text{ 又 } PF_2 \perp x \text{ 轴，} |MF_2| = \sqrt{2},$$

$$\text{故 } \triangle MAF_2B \text{ 为正方形，内切圆半径为 } |MA| = |MB| = 1,$$

$$\text{故 } c = 1 + 1, c = 2, \text{ 则 C 的离心率为 } 2.$$

故选：A



【点睛】利用双曲线定义得出焦点三角形的内切圆与 x 轴切于实轴端点是本题关键.

8. B

【分析】先由三角函数平方关系结合已知求出 $\sin$, $\cos$, 从而求出 $\tan$, 再由

$\tan \frac{\pi}{4} = 1 = \frac{2 \tan \frac{\pi}{8}}{1 - \tan^2 \frac{\pi}{8}}$ 即可求出 $\tan \frac{\pi}{8}$, 最后由两角和的正切公式代入表达式即可求解.

【详解】一方面由题意 $3\sin \alpha = \cos \alpha = \sqrt{10}$, 且注意到 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$,

联立得 $10\sin^2 \alpha = 6\sqrt{10}\sin \alpha - 9 = 0$, 解得 $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$,

所以 $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 3$,

另一方面不妨设 $x = \tan \frac{\pi}{8} > 0$, 且 $\tan \frac{\pi}{4} = 1 = \frac{2 \tan \frac{\pi}{8}}{1 - \tan^2 \frac{\pi}{8}}$,

所以有 $x^2 - 2x - 1 = 0$, 解得 $x = 1 + \sqrt{2}$ 或 $x = 1 - \sqrt{2}$ (舍去), 即 $x = \tan \frac{\pi}{8} = 1 + \sqrt{2}$,

由两角和的正切公式有

$$\tan \frac{\pi}{8} = \frac{\tan \alpha - x}{1 - x \tan \alpha} = \frac{3 - (1 + \sqrt{2})}{1 - 3(1 + \sqrt{2})} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4 - 3\sqrt{2}} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4 - 3\sqrt{2}} \cdot \frac{4 + 3\sqrt{2}}{4 + 3\sqrt{2}} = \frac{7 - 5\sqrt{2}}{7 - 5\sqrt{2}},$$

$$\text{所以 } \tan \frac{\pi}{8} = \frac{1}{\frac{1}{\tan \frac{\pi}{8}}} = \frac{1}{7 - 5\sqrt{2}} = \frac{7 + 5\sqrt{2}}{(7 - 5\sqrt{2})(7 + 5\sqrt{2})} = \frac{7 + 5\sqrt{2}}{7 - 5\sqrt{2}}.$$

$$\frac{7 + 5\sqrt{2}}{7 - 5\sqrt{2}} = \frac{7 + 5\sqrt{2}}{7 - 5\sqrt{2}} \cdot \frac{7 + 5\sqrt{2}}{7 + 5\sqrt{2}} = \frac{(7 + 5\sqrt{2})^2}{7^2 - (5\sqrt{2})^2} = \frac{7 + 5\sqrt{2}}{5\sqrt{2} - 7} = 14.$$

故选: B.

9. ABD

【分析】根据给定条件, 可得数列 a_n 是等差数列, 再结合等差数列性质逐项判断即得.

【详解】由 $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$, 得数列 a_n 是等差数列, 令其公差为 d , 由 $S_7 = S_9$, 得 $a_8 = a_9 = 0$,

对于 A, $S_{16} = \frac{16(a_1 + a_{16})}{2} = 8(a_8 + a_9) = 0$, A 正确;

对于 B, $\frac{2a_{n+1}}{2a_n} = \frac{2a_{n+1} + a_n}{2a_n} = 2d$ 为常数, 数列 $2a_n$ 是等比数列, B 正确;

对于 C, 由 $a_8 = a_9 = 0$ 知, d 的取值不确定, 当 d 为正数时, 数列 a_n 单调递增, 数列 S_n 无

最大项，C 错误；

对于 D， $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$ ， $\frac{S_n}{n} = a_1 + \frac{d}{2}n$ ，于是 $\frac{S_{n+1}}{n+1} - \frac{S_n}{n} = \frac{d}{2}$ ，数列 $\frac{S_n}{n}$ 是等差数列，

D 正确.

故选：ABD

10. BCD

【分析】对 A：利用基本不等式求得 ab 的最大值，即可求得目标式的范围，从而判断；对 B：直接使用基本不等式，结合指数运算，即可判断；对 C：构造函数 $f(x) = \ln x - x + 1$ ，利用导数研究其单调性和值域，将 $a = \ln b$ 转化为 $\ln b = b - 1$ ，即可判断；对 D：构造函数 $g(x) = \sin x \sin(1-x)$ ，利用导数研究其最大值，结合适度放缩，即可判断.

【详解】因为 $a + b = 1$ ，故可得 $ab = \frac{1}{4} - (a - \frac{1}{2})^2 \leq \frac{1}{4}$ ，当且仅当 $a = b = \frac{1}{2}$ 取得等号；

对 A： $\log_2 a + \log_2 b = \log_2 ab = \log_2 \frac{1}{4} = -2$ ，故 A 错误；

对 B： $2^a + 2^b = 2\sqrt{2^{a+b}} = 2\sqrt{2}$ ，当且仅当 $a = b = \frac{1}{2}$ 时取得等号，故 B 正确；

对 C：令 $f(x) = \ln x - x + 1, x \in (0, 1)$ ， $f'(x) = \frac{1}{x} - 1 < 0$ ，

故 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 单调递减， $f(x) > f(1) = 0$ ，即当 $x \in (0, 1)$ ， $\ln x - x + 1 > 0$ ；

$a = \ln b = 1 - b = \ln b$ ，又 $a > 0$ ，即 $1 - b > 0$ ，解得 $b < 1$ ，故 $b \in (0, 1)$ ；

故 $\ln b = b - 1 < 0$ ，也即 $a = \ln b < 0$ ，故 C 正确；

对 D：令 $g(x) = \sin x \sin(1-x), x \in (0, 1)$ ，则

$g'(x) = \cos x \sin(1-x) - \sin x \cos(1-x) = \sin(1-x-x) = \sin(1-2x)$ ，

故当 $x \in (0, \frac{1}{2})$ 时， $g'(x) > 0$ ， $g(x)$ 单调递增；当 $x \in (\frac{1}{2}, 1)$ 时， $g'(x) < 0$ ， $g(x)$ 单调递减；

故 $g(x)$ 的最大值为 $g(\frac{1}{2}) = \sin^2 \frac{1}{2}$ ；

由 C 可知， $b \in (0, 1)$ ，则 $\sin b \sin(1-b) = \sin^2 \frac{1}{2} = \sin^2 \frac{\pi}{6} = \frac{1}{4}$ ，故 D 正确；

故选：BCD.

【点睛】关键点点睛：本题 CD 选项的判断，解决的关键在于构造 $f(x) = \ln x - x + 1, x \in (0, 1)$ ，

以及 $g(x) = \sin x \sin(1-x), x \in (0, 1)$ ，利用导数研究其单调性和最值，从而实现问题的解决.

11. BD

【分析】对 A，设 $M(x, y)$ ，由直线 AM 和 BM 的斜率之积为 $\frac{1}{2}$ 列式得方程；

对 B，设 $P(x_0, y_0)$ ， $G(x_1, y_1)$ ，得 $k_{PQ} = 2k_{QE}$ ，结合点在椭圆上求得 $k_{QG} \cdot k_{GP} = \frac{\frac{y_1^2}{x_1^2} - \frac{y_0^2}{x_0^2}}{1 - \frac{y_1^2}{x_1^2} - \frac{y_0^2}{x_0^2}} = \frac{1}{2}$ ，

即可证 $k_{GP} \cdot k_{PQ} = 1$ ；

对 C，求出与直线 AN 平行且与曲线 C 相切且切点在第一象限的切线方程，结合点线距离求得最大面积；

对 D，直线 PQ 的方程为 $y = kx (k \neq 0)$ ，联立抛物线方程解得 P 点坐标，即可求直线 PG 方程，结合韦达定理及铅锤法得 $S_{\triangle PQG} = \frac{1}{2} |y_0| |x_0 - x_G|$ ，最后讨论最大值。

【详解】对 A：设 $M(x, y)$ ，则 $\frac{y}{x-2} \cdot \frac{y}{x+2} = \frac{1}{2}$ ，化简得： $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1 (x \neq \pm 2)$ ，故 A 错误；

对 B：设 $P(x_0, y_0)$ ， $G(x_1, y_1)$ ， $Q(x_0, y_0)$ ， $E(x_0, 0)$ ，则 $k_{PQ} = \frac{y_0}{x_0} = k \neq 0$ ， $k_{QE} = \frac{y_0}{2x_0} = \frac{k}{2}$ ，

$$k_{QG} \cdot k_{GP} = \frac{\frac{y_1}{x_1} - \frac{y_0}{x_0}}{\frac{x_1}{x_0} - 1} = \frac{\frac{y_1^2}{x_1^2} - \frac{y_0^2}{x_0^2}}{\frac{x_1^2}{x_0^2} - 1} = \frac{\frac{y_1^2}{x_1^2} - \frac{y_0^2}{x_0^2}}{1 - \frac{y_1^2}{x_1^2} - \frac{y_0^2}{x_0^2}},$$

$$\because \frac{x_1^2}{4} - \frac{y_1^2}{2} = 1, \frac{x_0^2}{4} - \frac{y_0^2}{2} = 1, \therefore k_{QG} \cdot k_{GP} = \frac{2 \cdot \frac{x_1^2}{2} - 2 \cdot \frac{x_0^2}{2}}{x_1^2 - x_0^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{k}{\frac{k}{2}} = 1, \text{ 则 } k_{GP} = \frac{1}{k}, \text{ 则}$$

$k_{GP} \cdot k_{PQ} = 1$ ， $\angle QPG = 90^\circ$ ，故 B 正确；

对 C：与直线 AN 平行且与曲线 C 相切且切点在第一象限的切线方程为

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}x - m, m > 0,$$

$$\text{联立 } \begin{cases} y = \frac{\sqrt{2}}{2}x - m \\ \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1 \end{cases} \text{ 得 } x^2 - \sqrt{2}mx - m^2 - 2 = 0, \text{ 由 } D = 2m^2 - 4(m^2 - 2) = 0 \text{ 得 } m = 2,$$

$$\therefore \text{切线为 } y = \frac{\sqrt{2}}{2}x - 2, \text{ 两平行直线的距离为 } d = \frac{|2\sqrt{2} - 4|}{\sqrt{2^2 + 2^2}} = \frac{(2 - \sqrt{2})\sqrt{6}}{3},$$

此时 $\triangle PAN$ 面积最大，最大值为 $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{6} \cdot \frac{(2 - \sqrt{2})\sqrt{6}}{3} = 2 - \sqrt{2}$ ，故 C 错误；

对 D：设直线 PQ 得方程为 $y = kx (k \neq 0)$ ， $\frac{y}{x} = \frac{kx}{x^2 + 2y^2} = \frac{1}{4}$ ，解得 $\begin{cases} x_0 = \frac{2}{\sqrt{2k^2 - 1}} \\ y_0 = \frac{2k}{\sqrt{2k^2 - 1}} \end{cases}$ ，

则直线 PG： $y = \frac{1}{k}x - \frac{x_0}{k} = \frac{1}{k}x - \frac{k_2 - 1}{k}x_0$ ，

联立直线 PG 与曲线 C 的方程可得 $2 - k_2 x^2 - 4x_0 k_2 - 1 x = 2x_0^2 k_2 - 1^2 - 4 = 0$ ，则

$$x_0 = x_G = \frac{4x_0 k_2 - 1}{k_2 - 2}，$$

$$S_{\triangle PQG} = \frac{1}{2} |y_0| |x_0 - x_G| = \frac{8 - k_2 - 1}{k_2 - 2} \cdot \frac{1}{k} = \frac{8 - k - \frac{1}{k}}{2 - k - \frac{1}{k}}，$$

令 $t = k + \frac{1}{k} \geq 2$ ，则 $S_{\triangle PQG} = \frac{8t}{2t^2 - 1} = \frac{8}{2t - \frac{1}{2t}}$ ， $\because y = 2t - \frac{1}{2t}$ 在 $(\sqrt{2}, +\infty)$ 上单调递增，故 $y = 2t - \frac{1}{2t} \geq \frac{3}{2}$ ，即 $t \geq \frac{\sqrt{2} + 1}{2}$ ，

上单调递增，故 $y = 2t - \frac{1}{2t} \geq \frac{3}{2}$ ，

即 $S_{\triangle PQG} = \frac{8}{2t - \frac{1}{2t}} \leq \frac{16}{9}$ ，当且仅当 $k = 1$ 时等号成立，故 D 正确，

故选：BD

12. $3 - 3i$ （答案不唯一）

【分析】设 $z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}$ ，根据条件化简可得 a 的取值范围，即可得解.

【详解】设 $z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}$ ，

因为 $(1 - i)z = (1 - i)a + bi = a - b + (a + b)i \in \mathbb{R}$ ，

所以 $a - b = 0$ ，则 $z = a + ai$ ，

又因为 $|z| = \sqrt{a^2 + (a)^2} = \sqrt{2a^2} = 4$ ，

所以 $a^2 = 8$ ，解得 $a = 2\sqrt{2}$ 或 $a = -2\sqrt{2}$

即只需满足 $a = 2\sqrt{2}$ 或 $a = -2\sqrt{2}$ ，复数 $z = a + ai$ 都满足条件①②.

故答案为： $3 - 3i$ （答案不唯一）

13. 12

【分析】由 $(a - b)^n$ 的二项展开式的通项 $T_{r+1} = C_n^r a^n r b^r$ ，可知 $(1 - 2x)^6$ 展开式的二项式系数为

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/378072055141007004>