华师一附中 2024 届高三数学《立体几何每日一题》

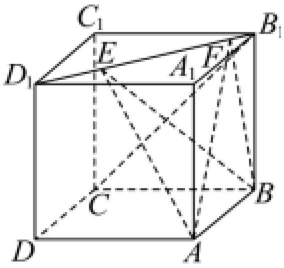
一、单选题

1．一个封闭的圆台容器（容器壁厚度忽略不计）的上底面半径为 2，下底面半径为 12，母线与底面所成的角为 60°．在圆台容器内放置一个可以任意转动的正方体，则此正方体棱长的最大值是（　）

A．$4\sqrt{3}$　　B．8　　C．9　　D．$4\sqrt{6}$

二、多选题

2．如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，线段 B_1D_1 上有两个动点 E，F（E 在 F 的左边）且 $EF=\sqrt{2}$，下列说法错误的是（　）



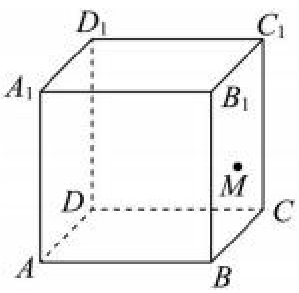
A．当 E，F 运动时，存在点 E，F 使得 $AE\perp CF$

B．当 E，F 运动时，存在点 E，F 使得 $AE//BF$

C．当 E 运动时，二面角 $E-AB-C$ 最小值为 45°

D．当 E，F 运动时，二面角 $A-EF-B$ 的余弦值为定值 $\frac{1}{3}$．

3．已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 4，M 是侧面 BCC_1B_1 内任一点，则下列结论中正确的是（　）



A．若 M 满足 $A_1M\perp B_1D$，则 M 点的轨迹是一条线段

B．若 M 到棱 C_1D_1 的距离等于到 AB 的距离的 2 倍，则 M 点的轨迹是圆的一部分

C．若 M 到棱 C_1D_1 的距离与到 AB 的距离之和为 6，则 M 点的轨迹的离心率为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

D．若M到棱C_1D_1的距离比到AB的距离大 2，则M点的轨迹的离心率为$\sqrt{2}$

4．在棱长为 1 的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，点P满足$\overrightarrow{CP}=\lambda\overrightarrow{CD}+\mu\overrightarrow{CC_1}$，其中$\lambda\in[0,1]$，

$\mu \in [0,1]$，则下列说法正确的是(　　)

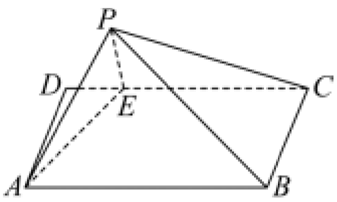
A．若 $\mu=\frac{1}{2}$，则 P 点轨迹所在直线与平面 A_1CD 平行

B．若 $\lambda+\mu=1$，则 $A_1C \perp BP$

C．若 $\lambda=\mu$，则 $\left|\overrightarrow{DP}\right|+\left|\overrightarrow{A_1P}\right|$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{2}$

D．若 BP 与平面 CC_1D_1D 所成角的大小为 $\frac{\pi}{4}$，则 $\lambda\mu$ 的最大值为 $\frac{1}{2}$

5．如图，已知矩形 $ABCD$ 中，$AB=2$，$BC=\sqrt{3}$．点 E 为线段 CD 上一动点（不与点 D 重合），将 $\triangle ADE$ 沿 AE 向上翻折到 $\triangle APE$，连接 PB，PC．设 $DE=x\left(0<x<2\right)$，二面角 $P-AE-B$ 的大小为 $\theta\left(0<\theta<\pi\right)$，则下列说法正确的有(　　)



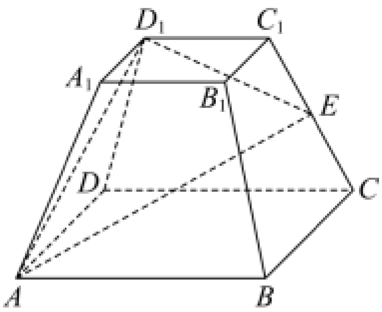
A．若 $x=1$，$\theta=\frac{\pi}{2}$，则 $\cos\angle PAB=\frac{\sqrt{3}}{4}$

B．若 $x=1$，则存在 θ，使得 $PB \perp$ 平面 PAE

C．若 $x=\frac{3}{2}$，则直线 PB 与平面 ABC 所成角的正切值的最大值为 $\frac{3}{4}$

D．点 A 到平面 PBC 的距离的最大值为 $\sqrt{3}$，当且仅当 $x=2$ 且 $\cos\theta=\frac{3}{4}$ 时取得该最大值

6．已知四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的下底面和上底面分别是边长为 4 和 2 的正方形，则(　　)



A．侧棱 CC_1 上一点 E，满足 $\frac{C_1E}{C_1C}=\frac{1}{3}$，则 A_1B // 平面 AD_1E

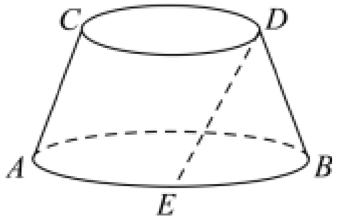
B．若 E 为 CC_1 的中点，过 A，D_1，E 的平面把四棱台分成两部分时，较小部分与较大部分的体积之比为 3:5

---.　---.　1 ---.　---.

C． $DA + BB_1 + {}_2DC = DA_1$

D．设DB_1与面AD_1C的交点为O，则$\frac{DO}{OB1}=\frac{2}{1}$

7．如图，已知圆台的上底面半径为1，下底面半径为2，母线长为2，AB，CD分别为上、下底面的直径，AC，BD为圆台的母线，E为弧AB的中点，则（　）



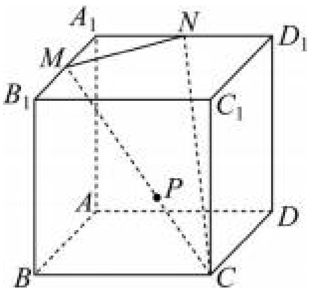
A．圆台的体积为$\sqrt{3}\pi$

B．直线AC与下底面所成的角的大小为$\frac{\pi}{3}$

C．异面直线AC和DE所成的角的大小为$\frac{\pi}{4}$

D．圆台外接球的表面积为12π

8．如图，在棱长为2的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，M、N分别是棱A_1B_1、A_1D_1的中点，点P在线段CM上运动，以下四个命题中正确的是（　）



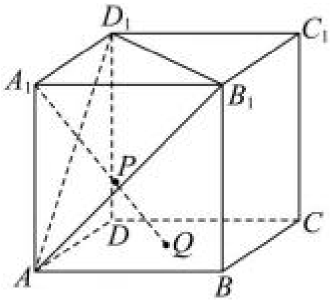
A．平面CMN截正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$所得的截面图形是五边形

B．直线B_1D_1到平面CMN的距离是$\frac{\sqrt{2}}{2}$

C．存在点P，使得$\angle B_1PD_1=90^\circ$

D．$\triangle PDD_1$面积的最小值是$\frac{4\sqrt{5}}{5}$

9．如图，在棱长为2的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，点P在平面AB_1D_1内且$A_1P=\sqrt{2}$，延长A_1P交平面$ABCD$于点Q，则以下结论正确的是（　）



A．线段CQ长度的最小值为$\frac{3\sqrt{2}}{2}$

B．点P到BC_1的距离的最大值为 2

C．直线A_1P与BD所成的角的余弦值的最大值为$\frac{\sqrt{3}}{3}$

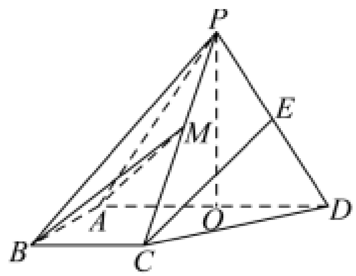
D．直线A_1P与平面$ABCD$所成的角正弦值的最大值为$\frac{2\sqrt{2}}{3}$

三、填空题

10．在三棱锥$P-ABC$中，平面$PAB\perp$平面ABC，$AB\perp BC$，$\triangle PAB$为等边三角形，$AB=BC=2$，则该三棱锥外接球的表面积为__________.

四、解答题

11．如图，四棱锥$P-ABCD$中，侧面PAD为等边三角形，线段AD的中点为O且$PO\perp$底面$ABCD$，$AB=BC=\frac{1}{2}AD=1$，$\angle BAD=\angle ABC=\frac{\pi}{2}$，$E$是$PD$的中点.

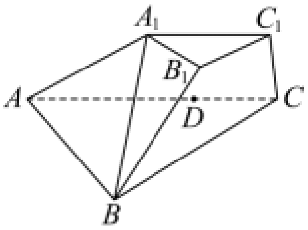


(1)证明：$CE//$平面PAB；

(2)求点E到平面PAB的距离；

(3)点M在棱PC上，且直线BM与底面$ABCD$所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{6}}{4}$，求平面MAB与平面ABD夹角的余弦值.

12．如图，三棱台$ABC-A_1B_1C_1$中，$A_1C_1=2$，$AC=3$，D为线段AC上靠近C的三等分点

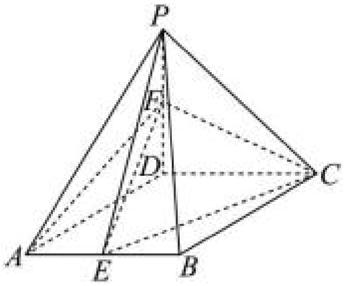


A_1
C_1
B_1
A
C
D
B

(1)在线段 BC 上求一点 E，使 $A_1B//$ 平面 C_1DE，并求 $\frac{BE}{BC}$ 的值：

(2)若 $AA_1=AB=2$，$\angle A_1AC=\angle BAC=\frac{\pi}{3}$，点 A_1 到平面 ABC 的距离为 $\frac{3}{2}$，且点 A_1 在底面 ABC 的射影落在 $\triangle ABC$ 内部，求直线 B_1D 与平面 ACC_1A_1 所成角的正弦值.

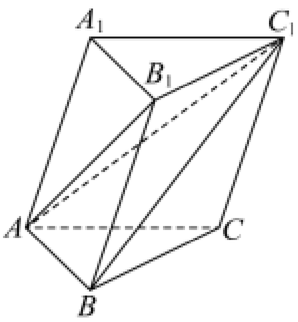
13．如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是平行四边形，E，F 分别为 AB，PD 上的点，且 $\frac{BE}{CD}+\frac{PF}{PD}=1$.



(1)证明：$AF//$ 平面 PCE；

(2)若 $PD\perp$ 平面 $ABCD$，E 为 AB 的中点，$PD=AD=CD$，$\angle BAD=60^\circ$，求二面角 $P-CE-F$ 的正切值.

14．如图，在斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$\triangle ABC$ 是边长为 2 的正三角形，且四棱锥 $A-BCC_1B_1$ 的体积为 2.



(1)求三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的高；

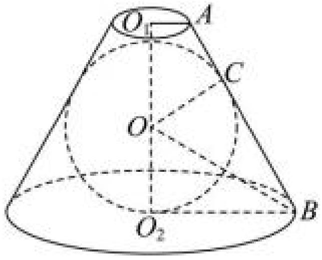
(2)若 $AA_1=2$，平面 $ABC\perp$ 平面 BCC_1B_1，$\angle B_1BC$ 为锐角，求平面 ABC_1 与平面 AB_1C_1 的夹角的余弦值.

华师一附中 2024 届高三数学《立体几何每日一题》参考答案

1．B

【分析】根据题意可求出圆台内能放置的最大球的半径，使正方体外接于球即可求出正方体的最大棱长.

【详解】如下图所示：



根据题意可知$O_1A = 2, O_2B = 12$；又母线与底面所成的角为 60°，即$\angle ABO_2 = 60^\circ$，易得

$O_1O_2 = 10\sqrt{3}$；

设圆台内能放置的最大球的球心为 O，且与底面和母线分别切于O_2, C两点，

所以可知球的半径$R = OO_2 = 4\sqrt{3}$，此时球的直径为$2R = 8\sqrt{3} < O_1O_2 = 10\sqrt{3}$，

即此时球与圆台上底面不相切，因此圆台内能放置的最大球的直径为 $8\sqrt{3}$；

若放置一个可以任意转动的正方体，要求正方体棱长最大，需要正方体的中心与球心重合，

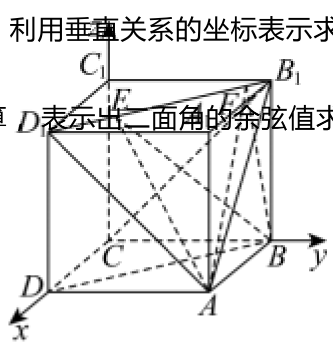
且该球是正方体的外接球，

设正方体的最大棱长为 a，满足$\sqrt{3}a = 2R$，解得$a = 8$.

故选：B

2．ABD

【分析】利用垂直关系的坐标表示求解选项 A；利用平行关系求解选项 B；利用空间向量的坐标运算，表示出二面角的余弦值求解选项 C,D.



【详解】