极植点偏移问题

解答题

1．(2024·湖北仙桃田家炳实验高级中学高三月考)已知函数 $f(x)=(x-2)\ln x+x-1$.

(1)求曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(1，f(1))$ 处的切线方程；

(2)已知 $x=x_0$ 是函数 $y=f(x)$ 的极值点，若 $f(x_1)=f(x_2)$，$x_1\neq x_2$，x_1，$x_2\in \mathbf{R}$，求证：$x_1+x_2>2x_0$(极值点是指函数取极值时对应的自变量的值).

1 2 3 4 5 6

解　(1)由 $f(x)=(x-2)\ln x+x-1$，

得 $f'(x)=\ln x+\dfrac{x-2}{x}+1$，

所以 $f'(1)=0$，而 $f(1)=0$，所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(1，f(1))$ 处的切线方程为 $y=0$.

(2)证明：由(1)，得 $f'(x)=\ln x+\dfrac{x-2}{x}+1=\ln x+2-\dfrac{2}{x}$，

令 $g(x)=\ln x+2-\dfrac{2}{x}$，$x>0$，

则 $g'(x)=\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}>0$ 在 $(0，+\infty)$ 上恒成立，即 $g(x)=\ln x+2-\frac{2}{x}$ 在 $(0，+\infty)$ 上单调递增，而由 $g(1)=0$，知当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，

所以函数 $f(x)$ 在 $(0，1)$ 上单调递减，在 $(1，+\infty)$ 上单调递增，即 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值．

因为 $f(x_1)=f(x_2)$，$x_1\neq x_2$，x_1，$x_2\in\mathbf{R}$，不妨设 $0<x_1<1<x_2$，

令 $h(x)=f(x)-f(2-x)$，$0<x<1$，则

解

1 2 3 4 5 6

$h'(x)=f'(x)+f'(2-x)=\ln x+2-\frac{2}{x}+\ln(2-x)+2-\frac{2}{2-x}=\ln x(2-x)+4-\frac{4}{x(2-x)}$.

因为 $0<x<1$，所以 $0<x(2-x)<1$，

即有 $\ln x(2-x)<0$，$4-\frac{4}{x(2-x)}<0$，

所以 $h'(x)<0$，即函数 $h(x)=f(x)-f(2-x)$在$(0,1)$上单调递减，而 $h(1)=f(1)-f(1)=0$，

所以 $h(x)>h(1)=0$ 在$(0,1)$上恒成立，即 $f(x)>f(2-x)$在$(0,1)$上恒成立，有 $f(x_1)>f(2-x_1)$在$(0,1)$上恒成立，又 $f(x_1)=f(x_2)$，所以 $f(x_2)>f(2-x_1)$，

因为 $0<x_1<1<x_2$ 且 $2-x_1>1$，而函数 $f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增，所以 $x_2>2-x_1$，

即 $x_1+x_2>2$，而 $x_0=1$，

所以 $x_1+x_2>2x_0$ 得证.

2．(2023·福建福州高三模拟)已知函数 $f(x)=\frac{m}{x}+\ln x$.

(1)讨论函数 $f(x)$的单调性；

(2)若$\frac{1}{4}<m<\frac{1}{\mathrm{e}}$，求证：函数 $g(x)=\frac{x}{\ln x}+\frac{x}{m}\mathrm{e}^{-\frac{m}{x}}$有两个零点 x_1，x_2且$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}>2\mathrm{e}$.

1 2 3 4 5 6

解　(1)$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=-\frac{m}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{x-m}{x^2}$，当$m\leqslant 0$时，$f'(x)>0$，$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增；

当$m>0$时，由$f'(x)=\frac{x-m}{x^2}=0$，得$x=m$，当$0<x<m$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，当$x>m$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增.

综上，当$m\leqslant 0$时，$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增；当$m>0$时，$f(x)$在$(0,m)$上单调递减，在$(m,+\infty)$上单调递增.

1 2 3 4 5 6

解

(2)证明：当 $x\in(1，+\infty)$时，因为$\frac{1}{4}<m<\frac{1}{\mathrm{e}}$，

所以 $g(x)=\frac{x}{\ln x}+\frac{x}{m}\mathrm{e}^{-\frac{m}{x}}>0$，$g(x)$无零点.

当 $x\in(0，1)$时，由 $g(x)=\frac{x}{\ln x}+\frac{x}{m}\mathrm{e}^{-\frac{m}{x}}=0$，

得$\frac{x}{\ln x}=-\frac{x}{m}\mathrm{e}^{-\frac{m}{x}}$，即$\frac{\mathrm{e}^{\ln x}}{\ln x}=\frac{\mathrm{e}^{-\frac{m}{x}}}{-\frac{m}{x}}$，

设 $h(x)=\frac{\mathrm{e}^{x}}{x}$，则有 $h(\ln x)=h\left(-\frac{m}{x}\right)$，

1 2 3 4 5 6

解

因为 $h'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}<0$ 在$(-\infty,0)$上恒成立，

所以 $h(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减，当 $x\in(0,1)$时，$\ln x<0$，$-\frac{m}{x}<0$，

所以 $h(\ln x)=h\left(-\frac{m}{x}\right)$等价于 $\ln x=-\frac{m}{x}$，

即 $f(x)=\frac{m}{x}+\ln x=0$，所以 $g(x)$的零点与 $f(x)$在$(0,1)$上的零点相同．若 $\frac{1}{4}<m<\frac{1}{e}$，由(1)知 $f(x)$在$(0,m)$上单调递减，在$(m,+\infty)$上单调递增，

又 $f(m)=1+\ln m<1+\ln \frac{1}{e}=0$，$f\left(\frac{m}{4}\right)=4+\ln m-\ln 4>4+\ln \frac{1}{4}-\ln 4=4(1-\ln 2)>0$，$f(1)=m>0$，

所以 $f(x)$ 在 $\left(\frac{m}{4}, m\right)$ 和 $(m, 1)$ 上各有一个零点，即 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上有两个零点.

综上，$g(x)$ 有两个零点 x_1，x_2.

不妨设 $\frac{m}{4}<x_1<m<x_2<1$，则 $f(x_1)=\frac{m}{x_1}+\ln x_1=0$，$f(x_2)=\frac{m}{x_2}+\ln x_2=0$，两式相减，得 $\frac{m(x_2-x_1)}{x_1x_2}+\ln \frac{x_1}{x_2}=0$，

设 $t=\frac{x_1}{x_2}(0<t<1)$，则 $x_1=tx_2$，代入上式，解得 $x_2=\frac{m(t-1)}{t\ln t}$，$x_1=\frac{m(t-1)}{\ln t}$，

所以$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{(t+1)\ln t}{m(t-1)}$，

因为$\frac{1}{4}<m<\frac{1}{e}$，所以 $e<\frac{1}{m}<4$，因此要证$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{(t+1)\ln t}{m(t-1)}>2e$，只需证$\frac{(t+1)\ln t}{t-1}>2$，

1 2 3 4 5 6

解

即证 $\ln t-\frac{2(t-1)}{t+1}<0(0<t<1)$，

设 $u(t)=\ln t-\frac{2(t-1)}{t+1}(0<t<1)$，则 $u'(t)=\frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0$，所以 $u(t)$在 $(0，1)$上单调递增，$u(t)<u(1)=0$，即 $\ln t-\frac{2(t-1)}{t+1}<0$，

所以$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}>2e$.

3．(2023·吉林长春高三模拟)已知函数 $f(x)=\frac{2}{x}+a\ln x(a\in\mathbf{R})$.

(1)求函数 $f(x)$ 的单调区间；

(2)若函数 $g(x)=2x-f(x)$ 有两个极值点 x_1，x_2，且 $x_1\in(1,\mathrm{e}]$(e 为自然对数的底数，且 e=2.71828…)，求 $g(x_1)-g(x_2)$ 的取值范围.

解　(1)由题意知，函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=-\frac{2}{x^2}+\frac{a}{x}=\frac{ax-2}{x^2}$，

当 $a\leqslant 0$ 时，对任意的 $x>0$，$f'(x)<0$，

故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减；

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，解得 $x=\frac{2}{a}$，

所以当 $x\in\left(0,\ \frac{2}{a}\right)$时，$f'(x)<0$；

当 $x\in\left(\frac{2}{a},\ +\infty\right)$时，$f'(x)>0$；

此时函数 $f(x)$的单调递减区间为$\left(0,\ \frac{2}{a}\right)$，单调递增区间为$\left(\frac{2}{a},\ +\infty\right)$.

综上，当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$的单调递减区间为$(0,\ +\infty)$，无单调递增区间；

当 $a>0$ 时，函数 $f(x)$的单调递减区间为$\left(0,\ \frac{2}{a}\right)$，单调递增区间为$\left(\frac{2}{a},\ +\infty\right)$.

1 2 3 4 5 6

解

(2)由题意知，$g(x)=2x-f(x)=2x-\frac{2}{x}-a\ln x$，函数 $g(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，$g'(x)=2+\frac{2}{x^2}-\frac{a}{x}=\frac{2x^2-ax+2}{x^2}$，

当 $a\leqslant 0$ 时，对任意的 $x>0$，$g'(x)>0$，故 $g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，没有极值点；

当 $0<a\leqslant 4$ 时，$\Delta=a^2-16\leqslant 0$，$g'(x)\geqslant 0$ 且 $g'(x)$不恒为零，故 $g(x)$在 **R** 上单调递增，没有极值点；

当 $a>4$ 时，令 $g'(x)=0$，

解得 $x_1=\dfrac{a+\sqrt{a^2-16}}{4}$，$x_2=\dfrac{a-\sqrt{a^2-16}}{4}$，

则 $x_1>x_2>0$，

当 $x\in(0，x_2)$时，$g'(x)>0$；当 $x\in(x_2，x_1)$时，$g'(x)<0$；

当 $x\in(x_1，+\infty)$时，$g'(x)>0$，

此时，函数 $g(x)$ 的单调递增区间为 $\left(0,\dfrac{a-\sqrt{a^2-16}}{4}\right)$，$\left(\dfrac{a+\sqrt{a^2-16}}{4},+\infty\right)$，单调递减区间为 $\left(\dfrac{a-\sqrt{a^2-16}}{4},\dfrac{a+\sqrt{a^2-16}}{4}\right)$.

综上，当 $a>4$ 时，$g(x)$有两个极值点 x_1，x_2，且 $x_1+x_2=\frac{a}{2}$，$x_1x_2=1$，

所以 $g(x_1)-g(x_2)=2x_1-\frac{2}{x_1}-a\ln x_1-\left(2x_2-\frac{2}{x_2}-a\ln x_2\right)=4\left(x_1-\frac{1}{x_1}\right)-a\ln\frac{x_1}{x_2}=4\left(x_1-\frac{1}{x_1}\right)-4\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)\ln x_1$，

设 $h(t)=4\left(t-\frac{1}{t}\right)-4\left(t+\frac{1}{t}\right)\ln t$，

其中 $t\in(1，e]$，

所以 $h'(t)=4\left(1+\frac{1}{t^2}\right)-4\left[\left(1-\frac{1}{t^2}\right)\ln t+\left(t+\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t}\right]=\frac{4（1-t^2）\ln t}{t^2}$，

1 2 3 4 5 6

解

又 $t\in(1，e]$，可知 $h'(t)<0$，

所以 $h(t)$在$(1，e]$上单调递减．

所以 $h(e)\leqslant h(t)<h(1)$，即 $-\dfrac{8}{e}\leqslant h(t)<0$，

所以 $g(x_1)-g(x_2)$的取值范围为$\left[-\dfrac{8}{e}，0\right)$．

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：
https://d.book118.com/385103334023012002