

直线与圆锥曲线的位置关系

考纲原文

- (1) 了解圆锥曲线的简单应用.
- (2) 理解数形结合的思想.



一、直线与圆锥曲线的位置关系

1. 曲线的交点

在平面直角坐标系 xOy 中, 给定两条曲线 C_1, C_2 , 已知它们的方程为 $C_1: f(x, y) = 0, C_2: g(x, y) = 0$,

求曲线 C_1, C_2 的交点坐标, 即求方程组 $\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$ 的实数解.

方程组有几组实数解, 这两条曲线就有几个交点. 若方程组无实数解, 则这两条曲线没有交点.

2. 直线与圆锥曲线的交点个数的判定

设直线 $l: Ax + By + C = 0$, 圆锥曲线 $C: f(x, y) = 0$, 把二者方程联立得到方程组, 消去 $y(x)$ 得到一个关于 $x(y)$ 的方程 $ax^2 + bx + c = 0(ay^2 + by + c = 0)$.

(1) 当 $a \neq 0$ 时,

$\Delta > 0 \Leftrightarrow$ 方程有两个不同的实数解, 即直线与圆锥曲线有两个交点;

$\Delta = 0 \Leftrightarrow$ 方程有两个相同的实数解, 即直线与圆锥曲线有一个交点;

$\Delta < 0 \Leftrightarrow$ 方程无实数解, 即直线与圆锥曲线无交点.

(2) 当 $a=0$ 时, 方程为一次方程, 若 $b \neq 0$, 方程有一个解, 此时直线与圆锥曲线有一个交点;

若 $b=0, c \neq 0$, 方程无解, 此时直线与圆锥曲线没有交点.

3. 直线与圆锥曲线的位置关系

直线与圆锥曲线相交时, 直线与椭圆有两个公共点, 与双曲线、抛物线有一个或两个公共点.

(1) 直线与椭圆有两个交点 $\Leftrightarrow$ 相交; 直线与椭圆有一个交点 $\Leftrightarrow$ 相切; 直线与椭圆没有交点 $\Leftrightarrow$ 相离.

(2) 直线与双曲线有两个交点 $\Leftrightarrow$ 相交.

当直线与双曲线只有一个公共点时, 除了直线与双曲线相切外, 还有可能是直线与双曲线相交, 此时直线与双曲线的渐近线平行.

直线与双曲线没有交点 $\Leftrightarrow$ 相离.

(3) 直线与抛物线有两个交点 $\Leftrightarrow$ 相交.

当直线与抛物线只有一个公共点时, 除了直线与抛物线相切外, 还有可能是直线与抛物线相交, 此时直线与抛物线的对称轴平行或重合.

直线与抛物线没有交点 $\Leftrightarrow$ 相离.

二、圆锥曲线中弦的相关问题

1. 弦长的求解

(1) 当弦的两端点坐标易求时, 可直接利用两点间的距离公式求解;

(2) 当直线的斜率存在时, 斜率为 k 的直线 l 与圆锥曲线 C 相交于 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 两个不同的点,

$$\text{则弦长 } |AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{1 + k^2} |x_1 - x_2| = \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}} |y_1 - y_2| \quad (k \neq 0).$$

(3) 当弦过焦点时, 可结合焦半径公式求解弦长.

2. 中点弦问题

(1) AB 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的弦, $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 弦中点 $M(x_0, y_0)$, 则 AB 所在直线

的斜率为 $k = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}$, 弦 AB 的斜率与弦中点 M 和椭圆中心 O 的连线的斜率之积为定值 $-\frac{b^2}{a^2}$.

(2) AB 为双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的弦, $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 弦中点 $M(x_0, y_0)$, 则 AB 所在

直线的斜率为 $k = \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}$, 弦 AB 的斜率与弦中点 M 和双曲线中心 O 的连线的斜率之积为定值 $\frac{b^2}{a^2}$.

(3) 在抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 中, 以 $M(x_0, y_0)$ 为中点的弦所在直线的斜率 $k = \frac{p}{y_0}$.



考向一 直线与圆锥曲线位置关系的判断及应用

1. 判断直线与圆锥曲线的交点个数时,可直接求解相应方程组得到交点坐标,也可利用消元后的一元二次方程根的判别式来确定,需注意利用判别式的前提是二次项系数不为0.
2. 依据直线与圆锥曲线的交点个数求参数时,联立方程并消元,得到一元方程,此时注意观察方程的二次项系数是否为0,若为0,则方程为一次方程;若不为0,则将方程解的个数转化为判别式与0的大小关系求解.

典例引领

典例 1 已知椭圆 $x^2 + 4y^2 = 4$, 直线 $l: y = x + m$.

(1) 若 l 与椭圆有一个公共点, 求 m 的值;

(2) 若 l 与椭圆相交于 P, Q 两点, 且 $|PQ|$ 等于椭圆的短轴长, 求 m 的值.

【解析】 (1) 联立直线与椭圆的方程, 得 $\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 4 \\ y = x + m \end{cases}$, 即 $5x^2 + 8mx + 4m^2 - 4 = 0$,

由于直线 l 与椭圆有一个公共点, 则 $\Delta = 80 - 16m^2 = 0$,

所以 $m = \pm \sqrt{5}$.

(2) 设 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$,

由(1)知: $x_1 + x_2 = -\frac{8m}{5}$, $x_1 x_2 = \frac{4m^2 - 4}{5}$,

则 $|PQ| = \sqrt{1+k^2} |x_1 - x_2| = \frac{4\sqrt{2}}{5} \sqrt{5-m^2} = 2$.

解得: $m = \pm \frac{\sqrt{30}}{4}$.

典例 2 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 $F(1, 0)$, 抛物线 $E: x^2 = 2py (p > 0)$ 的焦点为 M .

(1) 若过点 M 的直线 l 与抛物线 C 有且只有一个交点, 求直线 l 的方程;

(2) 若直线 MF 与抛物线 C 交于 A, B 两点, 求 $\triangle OAB$ 的面积.

【解析】 (1) 由题意知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 $F(1, 0)$, 抛物线 $E: x^2 = 2py (p > 0)$ 的焦点为 M ,

所以 $p = 2$, $M(0, 1)$,

则抛物线 C 的方程为 $y^2 = 4x$, 抛物线 E 的方程为 $x^2 = 4y$.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/385104100011012020>