

四川省苍溪中学 2022-2023 学年高三零诊考试数学试题试卷

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号、考场号和座位号填写在试题卷和答题卡上。用 2B 铅笔将试卷类型 (B) 填涂在答题卡相应位置上。将条形码粘贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”。
2. 作答选择题时, 选出每小题答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑; 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案。答案不能答在试题卷上。
3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答, 答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上; 如需改动, 先划掉原来的答案, 然后再写上新答案; 不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。
4. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后, 请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

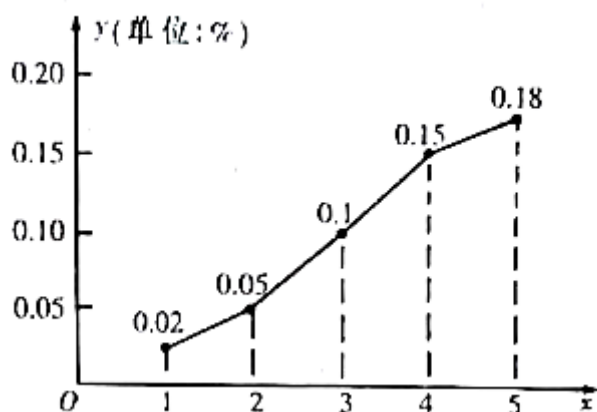
1. 已知 $|2\vec{a} + \vec{b}| = 2$, $\vec{a} \cdot \vec{b} \in [-4, 0]$, 则 $|\vec{a}|$ 的取值范围是 ()

- A. $[0, 1]$ B. $[\frac{1}{2}, 1]$ C. $[1, 2]$ D. $[0, 2]$

2. 将函数 $f(x) = \cos x$ 的图象先向右平移 $\frac{5}{6}\pi$ 个单位长度, 在把所得函数图象的横坐标变为原来的 $\frac{1}{\omega}$ ($\omega > 0$) 倍, 纵坐标不变, 得到函数 $g(x)$ 的图象, 若函数 $g(x)$ 在 $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ 上没有零点, 则 ω 的取值范围是 ()

- A. $(0, \frac{2}{9}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{8}{9}]$ B. $(0, \frac{2}{9}]$
C. $(0, \frac{2}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$ D. $(0, 1]$

3. 5G 网络是一种先进的高频传输技术, 我国的 5G 技术发展迅速, 已位居世界前列. 华为公司 2019 年 8 月初推出了一款 5G 手机, 现调查得到该款 5G 手机上市时间 x 和市场占有率 y (单位: %) 的几组相关对应数据. 如图所示的折线图中, 横轴 1 代表 2019 年 8 月, 2 代表 2019 年 9 月……, 5 代表 2019 年 12 月, 根据数据得出 y 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y} = 0.042x + \hat{a}$. 若用此方程分析并预测该款手机市场占有率的变化趋势, 则最早何时该款 5G 手机市场占有率能超过 0.5% (精确到月) ()



- A. 2020 年 6 月 B. 2020 年 7 月 C. 2020 年 8 月 D. 2020 年 9 月

4. 如图 1, 《九章算术》中记载了一个“折竹抵地”问题: 今有竹高一丈, 末折抵地, 去本三尺, 问折者高几何?

意思是:有一根竹子,原高一丈(1丈=10尺),现被风折断,尖端落在地上,竹尖与竹根的距离三尺,问折断处离地面的高为()尺.

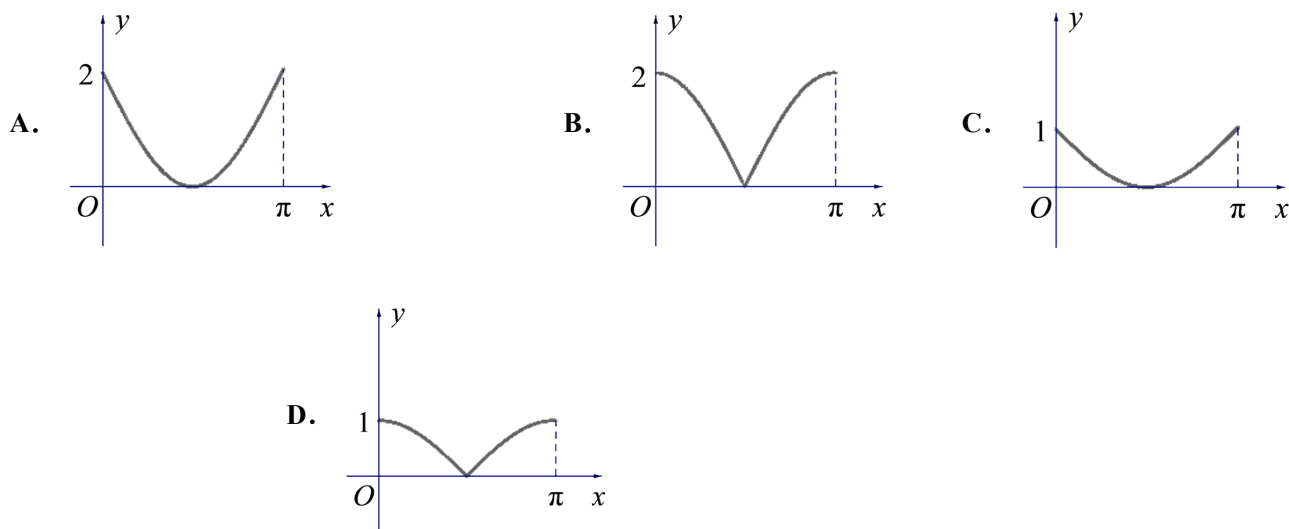
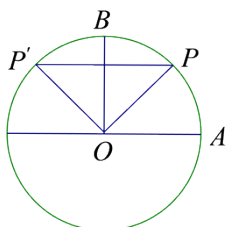


- A. 5.45 B. 4.55 C. 4.2 D. 5.8

5. 若函数 $y = 2\sin(2x + \varphi)$ ($|\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的图象经过点 $(\frac{\pi}{12}, 0)$, 则函数 $f(x) = \sin(2x - \varphi) + \cos(2x - \varphi)$ 图象的一条对称轴的方程可以为()

- A. $x = -\frac{\pi}{24}$ B. $x = \frac{37\pi}{24}$ C. $x = \frac{17\pi}{24}$ D. $x = -\frac{13\pi}{24}$

6. 如图,圆 O 的半径为1, A, B 是圆上的定点, $OB \perp OA$, P 是圆上的动点, 点 P 关于直线 OB 的对称点为 P' , 角 x 的始边为射线 OA , 终边为射线 OP , 将 $|\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP'}|$ 表示为 x 的函数 $f(x)$, 则 $y = f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上的图像大致为()



7. 已知集合 $A = \{x \in \mathbb{N} \mid y = \sqrt{4-x}\}$, $B = \{x \mid x = 2n, n \in \mathbb{Z}\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $[0, 4]$ B. $\{0, 2, 4\}$ C. $\{2, 4\}$ D. $[2, 4]$

8. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点为 F , O 为坐标原点, 以 OF 为直径的圆与双曲线 C 的一条渐近线交于点 O 及点 $A\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, 则双曲线 C 的方程为 ()

- A. $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ B. $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{6} = 1$ C. $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ D. $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{2} = 1$

9. “ $\alpha \neq \beta$ ” 是 “ $\cos \alpha \neq \cos \beta$ ” 的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

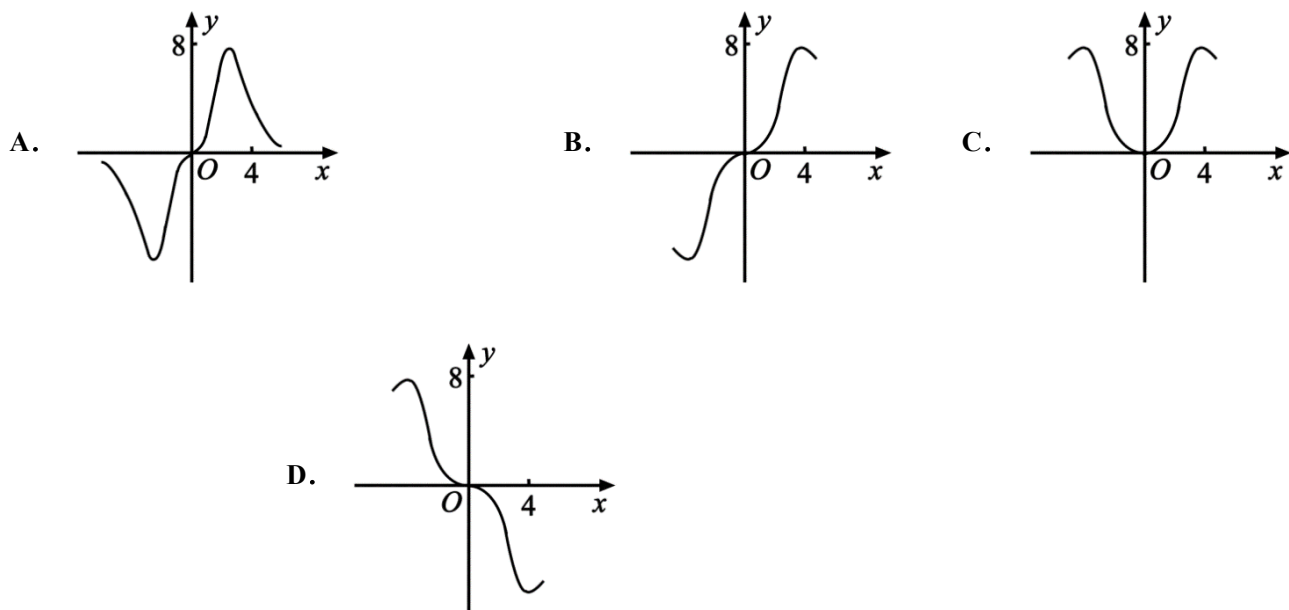
10. 已知集合 $A = \{x | x^2 < 1\}$, $B = \{x | \ln x < 1\}$, 则

- A. $A \cap B = \{x | 0 < x < e\}$ B. $A \cap B = \{x | x < e\}$
C. $A \cup B = \{x | 0 < x < e\}$ D. $A \cup B = \{x | -1 < x < e\}$

11. 甲、乙、丙、丁四人通过抓阄的方式选出一人周末值班 (抓到“值”字的人值班). 抓完阄后, 甲说: “我没抓到.” 乙说: “丙抓到了.” 丙说: “丁抓到了.” 丁说: “我没抓到.” 已知他们四人中只有一人说了真话, 根据他们的说法, 可以断定值班的人是 ()

- A. 甲 B. 乙 C. 丙 D. 丁

12. 函数 $y = \frac{2x^3}{2^x + 2^{-x}}$ 在 $[-6, 6]$ 的图像大致为



二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 已知函数 $f(x) = \log_2 x$ ，在区间 $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ 上随机取一个数 x_0 ，则使得 $f(x_0) \geq 0$ 的概率为_____.

14. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = -\frac{1}{4} + \lambda a_n$ 且 $a_1 = \frac{1}{4}$ ，设 $f(x) = e^x - e^{2-x} + 1$ ，则

$f(\log_2 a_1) + f(\log_2 a_2) + \dots + f(\log_2 a_7)$ 的值等于_____.

15. 一个村子里一共有 n 个人，其中一个人是谣言制造者，他编造了一条谣言并告诉了另一个人，这个人又把谣言告诉了第三个人，如此等等. 在每一次谣言传播时，谣言的接受者都是在其余 $n-1$ 个村民中随机挑选的，当谣言传播 $k(k \geq 2)$ 次之后，还没有回到最初的造谣者的概率是_____.

16. 已知正方形 $ABCD$ 边长为3，空间中的动点 P 满足 $PA = 2$ ， $PC = 2PD$ ，则三棱锥 $A-PCD$ 体积的最大值是_____.

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12分) 在平面直角坐标系 xOy 中，有一个微型智能机器人（大小不计）只能沿着坐标轴的正方向或负方向行进，且每一步只能行进1个单位长度，例如：该机器人在点 $(1,0)$ 处时，下一步可行进到 $(2,0)$ 、 $(0,0)$ 、 $(1,1)$ 、 $(1,-1)$ 这四个点中的任一位置. 记该机器人从坐标原点 O 出发、行进 n 步后落在 y 轴上的不同走法的种数为 $L(n)$.

(1) 分别求 $L(1)$ 、 $L(2)$ 、 $L(3)$ 的值；

(2) 求 $L(n)$ 的表达式.

18. (12分) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 和等比数列 $\{b_n\}$ 满足： $a_1 = b_1 = 1$ ， $a_n \in \mathbb{N}^*$ ， $a_2 + a_4 + a_9 = 3b_3$ ， $3b_5 = a_5 - 30$.

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

(II) 求数列 $\left\{\frac{a_n^2}{b_n - b_{n+1}}\right\}$ 的前 n 项和 T_n .

19. (12分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 与 x 轴负半轴交于 $A(-2,0)$ ，离心率 $e = \frac{1}{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程；

(2) 设直线 $l: y = kx + m$ 与椭圆 C 交于 $M(x_1, y_1)$ ， $N(x_2, y_2)$ 两点，连接 AM, AN 并延长交直线 $x=4$ 于

$E(x_3, y_3)$ ， $F(x_4, y_4)$ 两点，若 $\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} = \frac{1}{y_3} + \frac{1}{y_4}$ ，直线 MN 是否恒过定点，如果是，请求出定点坐标，如果不是，

请说明理由.

20. (12分) 某生物研究小组准备探究某地区蜻蜓的翼长分布规律，据统计该地区蜻蜓有 A, B

两种，且这两种的个体数量大致相等，记 A 种蜻蜓和 B 种蜻蜓的翼长（单位： mm ）分别为随机变量 X, Y ，其中 X 服从正态分布 $N(45, 25)$ ， Y 服从正态分布 $N(55, 25)$ 。

（Ⅰ）从该地区的蜻蜓中随机捕捉一只，求这只蜻蜓的翼长在区间 $[45, 55]$ 的概率；

（Ⅱ）记该地区蜻蜓的翼长为随机变量 Z ，若用正态分布 $N(\mu_0, \sigma_0^2)$ 来近似描述 Z 的分布，请你根据（Ⅰ）中的结果，求参数 μ_0 和 σ_0 的值（精确到 0.1）；

（Ⅲ）在（Ⅱ）的条件下，从该地区的蜻蜓中随机捕捉 3 只，记这 3 只中翼长在区间 $[42.2, 57.8]$ 的个数为 W ，求 W 的分布列及数学期望（分布列写出计算表达式即可）。

注：若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，则 $P(\mu - 0.64\sigma \leq X \leq \mu + 0.64\sigma) \approx 0.4773$ ， $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0.6827$ ，

$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.9546$ 。

21.（12 分）在平面直角坐标系 xOy 中， M 为直线 $y = x - 2$ 上动点，过点作 M 抛物线 $C: x^2 = y$ 的两条切线 MA ， MB ，切点分别为 A, B ， N 为 AB 的中点。

（1）证明： $MN \perp x$ 轴；

（2）直线 AB 是否恒过定点？若是，求出这个定点的坐标；若不是，请说明理由。

22.（10 分）在① $\sqrt{3}(b \cos C - a) = c \sin B$ ；② $2a + c = 2b \cos C$ ；③ $b \sin A = \sqrt{3}a \sin \frac{A+C}{2}$ 这三个条件中任选一个，补充在下面问题中的横线上，并解答相应的问题。

在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，且满足_____， $b = 2\sqrt{3}$ ， $a + c = 4$ ，求 $\triangle ABC$ 的面积。

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、D

【解析】

设 $\vec{m} = 2\vec{a} + \vec{b}$ ，可得 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{m} - 2\vec{a}^2 \in [-4, 0]$ ，构造 $(\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{m})^2 \leq 2 + \frac{1}{16}\vec{m}^2$ ，结合 $|\vec{m}| = 2$ ，可得

$\left| \vec{a} - \frac{1}{4} \vec{m} \right| \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right]$, 根据向量减法的模长不等式可得解.

【详解】

设 $\vec{m} = 2\vec{a} + \vec{b}$, 则 $|\vec{m}| = 2$,

$$\vec{b} = \vec{m} - 2\vec{a}, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{m} - 2\vec{a}^2 \in [-4, 0],$$

$$\therefore \left(\vec{a} - \frac{1}{4} \vec{m} \right)^2 = \vec{a}^2 - \frac{1}{2} \vec{a} \cdot \vec{m} + \frac{1}{16} \vec{m}^2 \leq 2 + \frac{1}{16} \vec{m}^2$$

$$|\vec{m}|^2 = 4, \text{ 所以可得: } \frac{\vec{m}^2}{8} = \frac{1}{2},$$

$$\text{配方可得 } \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \vec{m}^2 \leq 2 \left(\vec{a} - \frac{1}{4} \vec{m} \right)^2 \leq 4 + \frac{1}{8} \vec{m}^2 = \frac{9}{2},$$

$$\text{所以 } \left| \vec{a} - \frac{1}{4} \vec{m} \right| \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right],$$

$$\text{又 } \left| \vec{a} \right| - \left| \frac{1}{4} \vec{m} \right| \leq \left| \vec{a} - \frac{1}{4} \vec{m} \right| \leq \left| \vec{a} \right| + \left| \frac{1}{4} \vec{m} \right|$$

$$\text{则 } |\vec{a}| \in [0, 2].$$

故选: D.

【点睛】

本题考查了向量的运算综合, 考查了学生综合分析, 转化划归, 数学运算的能力, 属于中档题.

2、A

【解析】

根据 $y = A \cos(\omega x + \varphi)$ 的图象变换规律, 求得 $g(x)$ 的解析式, 根据定义域求出 $\omega x - \frac{5\pi}{6}$ 的范围, 再利用余弦函数的图象和性质, 求得 ω 的取值范围.

【详解】

函数 $f(x) = \cos x$ 的图象先向右平移 $\frac{5}{6}\pi$ 个单位长度,

可得 $y = \cos\left(x - \frac{5\pi}{6}\right)$ 的图象,

再将图象上每个点的横坐标变为原来的 $\frac{1}{\omega}$ ($\omega > 0$) 倍(纵坐标不变),

得到函数 $g(x) = \cos\left(\omega x - \frac{5\pi}{6}\right)$ 的图象,

$$\therefore \text{周期 } T = \frac{2\pi}{\omega},$$

若函数 $g(x)$ 在 $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ 上没有零点,

$$\therefore \frac{\omega\pi}{2} - \frac{5\pi}{6} < \omega x - \frac{5\pi}{6} < \frac{3\omega\pi}{2} - \frac{5\pi}{6},$$

$$\therefore \left(\frac{3\omega\pi}{2} - \frac{5\pi}{6} \right) - \left(\frac{\omega\pi}{2} - \frac{5\pi}{6} \right) \leq \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega},$$

$$\therefore \omega^2 \leq 1, \text{ 解得 } 0 < \omega \leq 1,$$

$$\text{又 } \begin{cases} -\frac{\pi}{2} + k\pi \leq \frac{\omega\pi}{2} - \frac{5\pi}{6} \\ \frac{\pi}{2} + k\pi \geq \frac{3\omega\pi}{2} - \frac{5\pi}{6} \end{cases}, \text{ 解得 } \frac{3\omega}{2} - \frac{4}{3} \leq k \leq \frac{\omega}{2} - \frac{1}{3},$$

$$\text{当 } k=0 \text{ 时, 解 } \frac{2}{3} \leq \omega \leq \frac{8}{9},$$

$$\text{当 } k=-1 \text{ 时, } 0 < \omega \leq 1, \text{ 可得 } 0 < \omega \leq \frac{2}{9},$$

$$\therefore \omega \in (0, \frac{2}{9}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{8}{9}].$$

故答案为: A.

【点睛】

本题考查函数 $y=A\cos(\omega x+\varphi)$ 的图象变换及零点问题, 此类问题通常采用数形结合思想, 构建不等关系式, 求解可得, 属于较难题.

3、C

【解析】

根据图形, 计算出 $\bar{x}, \bar{y}$, 然后解不等式即可.

【详解】

$$\text{解: } \bar{x} = \frac{1}{5} \times (1+2+3+4+5) = 3, \quad \bar{y} = \frac{1}{5} \times (0.02+0.05+0.1+0.15+0.18) = 0.1$$

点 $(3, 0.1)$ 在直线 $\hat{y} = 0.042x + \hat{a}$ 上

$$0.1 = 0.042 \times 3 + \hat{a}, \quad \hat{a} = -0.026$$

$$\hat{y} = 0.042x - 0.026$$

$$\text{令 } \hat{y} = 0.042x - 0.026 > 0.5$$

$$x \geq 13$$

因为横轴 1 代表 2019 年 8 月, 所以横轴 13 代表 2020 年 8 月,

故选：C

【点睛】

考查如何确定线性回归直线中的系数以及线性回归方程的实际应用，基础题.

4、B

【解析】



如图，已知 $AC + AB = 10$ ， $BC = 3$ ， $AB^2 - AC^2 = BC^2 = 9$

$\therefore (AB + AC)(AB - AC) = 9$ ，解得 $AB - AC = 0.9$ ，

$$\therefore \begin{cases} AB + AC = 10 \\ AB - AC = 0.9 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} AB = 5.45 \\ AC = 4.55 \end{cases}.$$

$\therefore$ 折断后的竹干高为 4.55 尺

故选 B.

5、B

【解析】

由点 $\left(\frac{\pi}{12}, 0\right)$ 求得 φ 的值，化简 $f(x)$ 解析式，根据三角函数对称轴的求法，求得 $f(x)$ 的对称轴，由此确定正确选项.

【详解】

$$\text{由题可知 } 2\sin\left(2 \times \frac{\pi}{12} + \varphi\right) = 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}. \varphi = -\frac{\pi}{6}$$

$$\text{所以 } f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{5\pi}{12}\right)$$

$$\text{令 } 2x + \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{得 } x = \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{令 } k = 3, \text{ 得 } x = \frac{37\pi}{24}$$

故选：B

【点睛】

本小题主要考查根据三角函数图象上点的坐标求参数，考查三角恒等变换，考查三角函数对称轴的求法，属于中档题.

6、B

【解析】

根据图象分析变化过程中在关键位置及部分区域,即可排除错误选项,得到函数图象,即可求解.

【详解】

由题意,当 $x=0$ 时, P 与 A 重合,则 P' 与 B 重合,

所以 $|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OP'}| = |\overrightarrow{BA}| = 2$,故排除 C,D 选项;

当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OP'}| = |P'P| = 2\sin(\frac{\pi}{2}-x) = 2\cos x$, 由图象可知选 B.

故选: **B**

【点睛】

本题主要考查三角函数的图像与性质,正确表示函数的表达式是解题的关键,属于中档题.

7、 **B**

【解析】

计算 $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, 再计算交集得到答案

【详解】

$A = \{x \in N \mid y = \sqrt{4-x}\} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $B = \{x \mid x = 2n, n \in Z\}$ 表示偶数,

故 $A \cap B = \{0, 2, 4\}$.

故选: **B**.

【点睛】

本题考查了集合的交集,意在考查学生的计算能力.

8、 **C**

【解析】

根据双曲线方程求出渐近线方程: $y = \frac{b}{a}x$, 再将点 $A\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 代入可得 $b = \frac{\sqrt{3}}{3}a$, 连接 FA , 根据圆的性质可得

$\frac{\sqrt{c^2-3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 从而可求出 c , 再由 $c^2 = a^2 + b^2$ 即可求解.

【详解】

由双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$,

则渐近线方程: $y = \pm \frac{b}{a}x$,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/386002141125010105>