上海市杨浦区交大附中2023-2024学年下学期高三5月段考试卷数学试题

注意事项：

1．答题前，考生先将自己的姓名、准考证号码填写清楚，将条形码准确粘贴在条形码区域内。

2．答题时请按要求用笔。

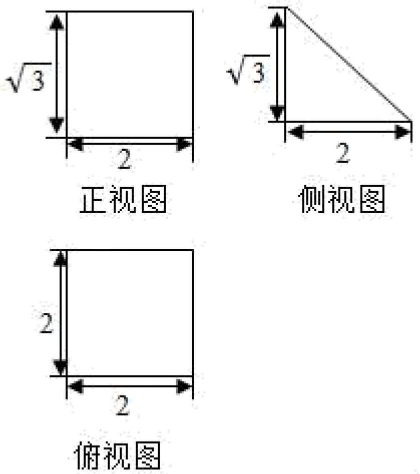
3．请按照题号顺序在答题卡各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试卷上答题无效。

4．作图可先使用铅笔画出，确定后必须用黑色字迹的签字笔描黑。

5．保持卡面清洁，不要折暴、不要弄破、弄皱，不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．如图是一个几何体的三视图,则该几何体的体积为(　　)

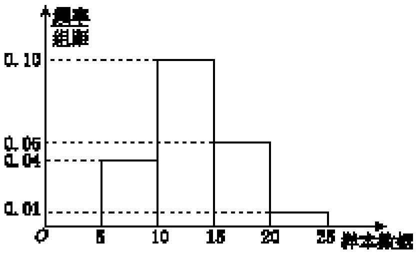


A．$2\sqrt{3}$　　B．$4\sqrt{3}$　　C．$\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　D．$\frac{4\sqrt{3}}{3}$

2．根据党中央关于“精准”脱贫的要求，我市某农业经济部门派四位专家对三个县区进行调研，每个县区至少派一位专家，则甲，乙两位专家派遣至同一县区的概率为（　　）

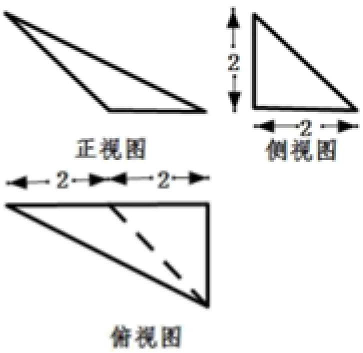
A．$\frac{1}{6}$　　B．$\frac{1}{4}$　　C．$\frac{1}{3}$　　D．$\frac{1}{2}$

3．某个小区住户共200户，为调查小区居民的7月份用水量，用分层抽样的方法抽取了50户进行调查，得到本月的用水量(单位：m^3)的频率分布直方图如图所示，则小区内用水量超过15 m^3的住户的户数为( )



A．10　　B．50　　C．60　　D．140

4．某几何体的三视图如图所示，则该几何体中的最长棱长为（　　）



A．$3\sqrt{2}$　　B．$2\sqrt{5}$　　C．$2\sqrt{6}$　　D．$2\sqrt{7}$

5．已知三棱锥 **$P-ABC$** 的顶点都在球 **O** 的球面上，$PA=\sqrt{2}$，$PB=\sqrt{14}$，**$AB=4$**，**$CA=CB=\sqrt{10}$**，面 **$PAB\perp$** 面 **ABC**，则球 **O** 的表面积为（　　）

A．$\dfrac{10\pi}{3}$　　B．$\dfrac{25\pi}{6}$　　C．$\dfrac{40\pi}{9}$　　D．$\dfrac{50\pi}{3}$

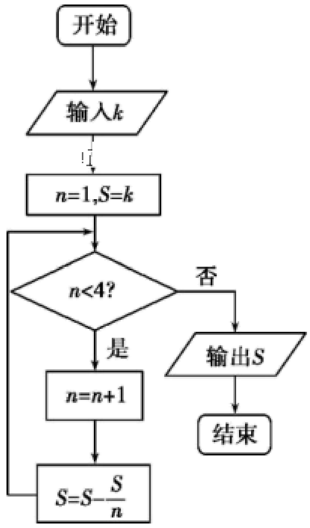
6．若 AB 为过椭圆 $\dfrac{x^2}{169}+\dfrac{y^2}{25}=1$ 中心的弦，F_1 为椭圆的焦点，则$\triangle F_1AB$ 面积的最大值为（　　）

A．20　　B．30　　C．50　　D．60

7．设 F_1,F_2 分别是双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左右焦点若双曲线上存在点 P，使 $\angle F_1PF_2=60^\circ$，且 $|PF_1|=2|PF_2|$，则双曲线的离心率为（　　）

A．$\sqrt{3}$　　B．2　　C．$\sqrt{5}$　　D．$\sqrt{6}$

8．我国古代数学著作《九章算术》中有如下问题："今有器中米，不知其数，前人取半，中人三分取一，后人四分取一，余米一斗五升(注：一斗为十升).问，米几何？"下图是解决该问题的程序框图，执行该程序框图，若输出的 ***S*=15**(单位：升)，则输入的 ***k*** 的值为（　　）



A．45 **B．60** **C．75** **D．100**

9．已知命题 $\boldsymbol{p}$：“$a>b$”是“$2^a>2^b$”的充要条件；$q:\exists x\in\mathbf{R}$，$|x+1|\le x$，则（　　）

A． $(\neg p)\vee q$ 为真命题　　**B．** $p\vee q$ 为真命题

C． $p\wedge q$ 为真命题　　**D．** $p\wedge(\neg q)$ 为假命题

10．在 ΔABC 中，角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c，若 $a=1$，$c=2\sqrt{3}$，$b\sin A=a\sin\left(\frac{\pi}{3}-B\right)$，则 $\sin C=$（　　）

A． $\frac{\sqrt{3}}{7}$　　**B．** $\frac{\sqrt{21}}{7}$　　**C．** $\frac{\sqrt{21}}{12}$　　**D．** $\frac{\sqrt{57}}{19}$

11．已知函数 $f(x)=\begin{cases}|\ln x|,0<x\le e^2\\ e^2+2-x,\ x>e^2\end{cases}$，存在实数 $x_1<x_2<x_3$，使得 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$，则 $\frac{f(x_1)}{x_2}$ 的最大值为（　　）

A． $\frac{1}{e}$　　**B．** $\frac{1}{\sqrt{e}}$　　**C．** $\frac{1}{2\sqrt{e}}$　　**D．** $\frac{1}{e^2}$

12．已知角 a 的终边经过点 $P(-4m,3m)(m\ne 0)$，则 $2\sin a+\cos a$ 的值是（　　）

A．1 或 -1　　**B．** $\frac{2}{5}$ 或 $-\frac{2}{5}$　　**C．1** 或 $-\frac{2}{5}$　　**D．** -1 或 $\frac{2}{5}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．某市公租房源位于 A、B、C 三个小区，每位申请人只能申请其中一个小区的房子，申请其中任意一个小区的房子是等可能的，则该市的任意 5 位申请人中，恰好有 2 人申请 A 小区房源的概率是______．(用数字作答)

14．已知椭圆 **C**：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的左、右焦点分别为 F_1，F_2，椭圆的焦距为 $2c$，过 **C** 外一点 $P(c,2c)$作线段 PF_1，PF_2 分别交椭圆 **C** 于点 **A**、**B**，若$|PA|=|AF_1|$，则 $\frac{|PF_2|}{|BF_2|}=$_____.

15．已知平面向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$，$\vec{a}=(\sqrt{3},1)$，且 $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{3}$，则 $|\vec{b}|=$____

16．已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数，满足 $a_1=1$，$a_{k+1}-a_k=a_i$．$(i\le k,k=1,2,3,\cdots,n-1)$，若 $\{a_n\}$ 是等比数列，数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=$_______.

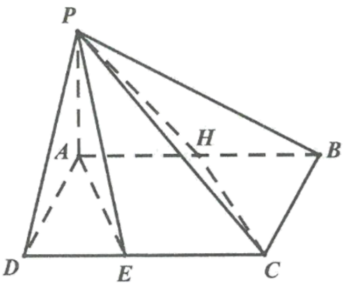
三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（12 分）已知函数 $f(x)=\ln x$．

（1）设 $g(x)=\frac{f(x)}{x^2}$，求函数 $g(x)$ 的单调区间，并证明函数 $g(x)$ 有唯一零点.

（2）若函数 $h(x)=e^x-af(x-1)$ 在区间 $\left(1,1+e^{-a}\right)$ 上不单调，证明：$\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}>a$．

18．（12 分）如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为矩形，侧面 $PAB\perp$ 底面 $ABCD$，H 为棱 AB 的中点，E 为棱 DC 上任意一点，且不与 D 点、C 点重合．$AB=2$，$AD=PA=1$，$PH=\sqrt{2}$．



（1）求证：平面 $APE\perp$ 平面 $ABCD$；

（2）是否存在点 E 使得平面 APE 与平面 PHC 所成的角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$？若存在，求出点 E 的位置；若不存在，请说明理由.

19．（12 分）设函数 $f(x)=e^x-ax-1$（$a\in R$）．

（1）讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（2）若关于 x 的方程 $\ln(ax+a+1)=x+1$ 有唯一的实数解，求 a 的取值范围.

20．（12 分）在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=\cos\theta,\\ y=\sin\theta.\end{cases}$ 以 O 为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，设点 A 在曲线 $C_2:\rho\sin\theta=1$ 上，点 B 在曲线 $C_3:\theta=-\frac{\pi}{6}(\rho>0)$ 上，且 $\triangle AOB$ 为正三角形.

（1）求点 A，B 的极坐标；

（2）若点 P 为曲线 C_1 上的动点，M 为线段 AP 的中点，求 $|BM|$ 的最大值.

21.（12 分）在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=2+2\cos\alpha \\ y=2\sin\alpha \end{cases}$（$\alpha$ 为参数）.以坐标原点 O 为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，直线 l 的极坐标方程为 $\rho\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

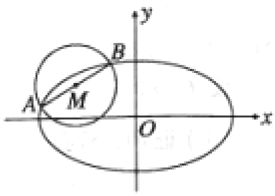
（1）求曲线 C 的普通方程和直线 l 的直角坐标方程；

（2）设点 $M(0,1)$，若直线 l 与曲线 C 相交于 A、B 两点，求 $|MA|+|MB|$ 的值

22.（10 分）已知椭圆 $\mathrm{E}:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的半焦距为 c，原点 O 到经过两点 $(c,0)$，$(0,b)$ 的直线的距离为 $\dfrac{1}{2}c$.

（Ⅰ）求椭圆 E 的离心率；

（Ⅱ）如图，AB 是圆 $\mathrm{M}:(x+2)^2+(y-1)^2=\dfrac{5}{2}$ 的一条直径，若椭圆 E 经过 A，B 两点，求椭圆 E 的方程.



参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

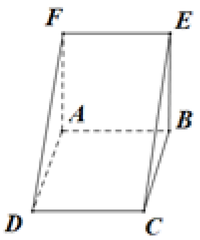
1、A

【解析】

根据三视图可得几何体为直三棱柱，根据三视图中的数据直接利用公式可求体积.

【详解】

由三视图可知几何体为直三棱柱，直观图如图所示：



其中，底面为直角三角形，$AD=2$，$AE=\sqrt{3}$，高为$AB=2$.

∴该几何体的体积为$V=\dfrac{1}{2}\times 2\times\sqrt{3}\times 2=2\sqrt{3}$

故选：**A.**

【点睛】

本题考查三视图及棱柱的体积，属于基础题.

2、**A**

【解析】

每个县区至少派一位专家，基本事件总数$n=36$，甲，乙两位专家派遣至同一县区包含的基本事件个数$m=6$，由此能求出甲，乙两位专家派遣至同一县区的概率.

【详解】

派四位专家对三个县区进行调研，每个县区至少派一位专家

基本事件总数：$n=C_4^2A_3^3=36$

甲，乙两位专家派遣至同一县区包含的基本事件个数：$m=C_2^2C_3^1A_2^2=6$

$\therefore$ 甲，乙两位专家派遣至同一县区的概率为：$p=\dfrac{m}{n}=\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$

本题正确选项：A

【点睛】

本题考查概率的求法，考查古典概型等基础知识，考查运算求解能力，是基础题.

3、**C**

【解析】

从频率分布直方图可知，用水量超过**15m³**的住户的频率为$(0.05+0.01)\times 5=0.3$，即分层抽样的**50**户中有**0.3×50=15**户住户的用水量超过**15**立方米

所以小区内用水量超过**15**立方米的住户户数为$\dfrac{15}{50}\times 200=60$，故选**C**

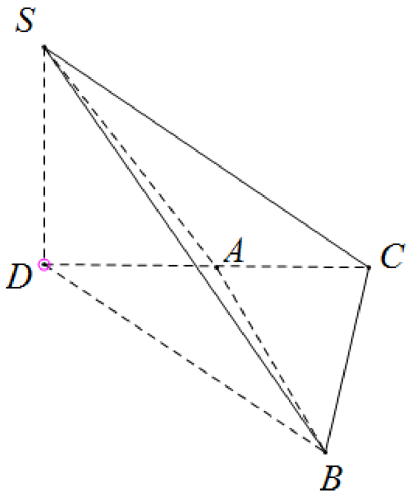
4、**C**

【解析】

根据三视图，可得该几何体是一个三棱锥$S-ABC$，并且平面**SAC**$\perp$平面**ABC**，$AC\perp BC$，过**S**作$SD\perp AC$，连接**BD**，$AD=2, AC=2, BC=2, SD=2$，再求得其它的棱长比较下结论.

【详解】

如图所示：



由三视图得：该几何体是一个三棱锥$S-ABC$，且平面**SAC**$\perp$ 平面**ABC**，$AC\perp BC$，

过**S**作$SD\perp AC$，连接**BD**，则$AD=2, AC=2, BC=2, SD=2$，

所以$BD=\sqrt{DC^2+BC^2}=\sqrt{20}$，$SB=\sqrt{SD^2+BD^2}=2\sqrt{6}$，$SA=\sqrt{SD^2+AD^2}=2\sqrt{2}$，

$SC=\sqrt{SD^2+AC^2}=2\sqrt{5}$，

该几何体中的最长棱长为$2\sqrt{6}$.

故选：**C**

【点睛】

本题主要考查三视图还原几何体，还考查了空间想象和运算求解的能力，属于中档题.

5、**D**

【解析】

由题意画出图形，找出$\triangle PAB$外接圆的圆心及三棱锥$P-BCD$的外接球心O，通过求解三角形求出三棱锥$P-BCD$的外接球的半径，则答案可求.

【详解】

如图；设AB的中点为D；

$\because PA=\sqrt{2}$，$PB=\sqrt{14}$，$AB=4$，

$\therefore \triangle PAB$ 为直角三角形，且斜边为 AB，故其外接圆半径为：$r=\frac{1}{2}AB=AD=2$；

设外接球球心为 O；

∵$CA=CB=\sqrt{10}$，面 PAB⊥面 ABC，

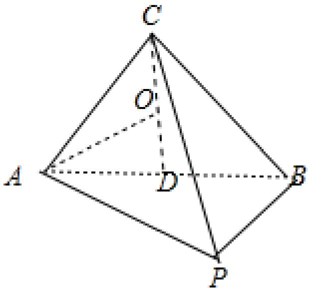
∴$CD\perp AB$ 可得 CD⊥面 PAB；且 $DC=\sqrt{CA^2-AD^2}=\sqrt{6}$.

∴O 在 CD 上；

故有：$AO^2=OD^2+AD^2\Rightarrow R^2=(\sqrt{6}-R)^2+r^2\Rightarrow R=\frac{5}{\sqrt{6}}$；

∴球 O 的表面积为：$4\pi R^2=4\pi\times\left(\frac{5}{\sqrt{6}}\right)^2=\frac{50\pi}{3}$.

故选：D.



【点睛】

本题考查多面体外接球表面积的求法，考查数形结合的解题思想方法，考查思维能力与计算能力，属于中档题.

6、D

【解析】

先设 A 点的坐标为(x,y)，根据对称性可得$B(-x,-y)$，在表示出ΔF_1AB面积，由图象遏制，当点 A 在椭圆的顶点时，此时ΔF_1AB面积最大，再结合椭圆的标准方程，即可求解.

【详解】

由题意，设 A 点的坐标为(x,y)，根据对称性可得$B(-x,-y)$，

则ΔF_1AB的面积为$S=\frac{1}{2}\times|OF|\times|2y|=c|y|$，

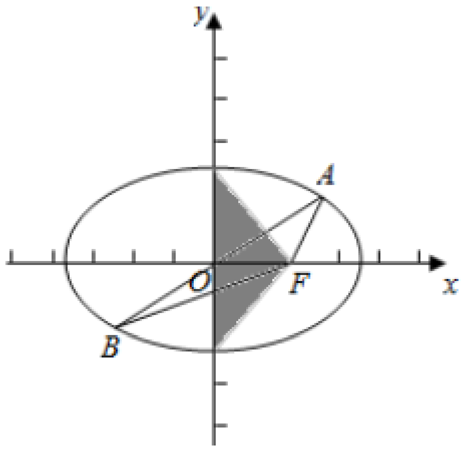
当$|y|$最大时，ΔF_1AB的面积最大，

由图象可知，当点 A 在椭圆的上下顶点时，此时ΔF_1AB的面积最大，

又由$\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1$，可得椭圆的上下顶点坐标为$(0,-5),(0,5)$，

所以ΔF_1AB的面积的最大值为$S=cb=\sqrt{169-25}\times 5=60$.

故选：***D***.



【点睛】

本题主要考查了椭圆的标准方程及简单的几何性质，以及三角形面积公式的应用，着重考查了数形结合思想，以及化归与转化思想的应用.

7、**A**

【解析】

由$|PF_1|=2|PF_2|$及双曲线定义得$|PF_1|$和$|PF_2|$（用a表示），然后由余弦定理得出a,c的齐次等式后可得离心率.

【详解】

由题意$\because|PF_1|=2|PF_2|$，$\therefore$由双曲线定义得$|PF_1|-|PF_2|=2a$，从而得$|PF_1|=4a$，$|PF_2|=2a$，

在ΔPF_1F_2中，由余弦定理得$(2c)^2=(4a)^2+(2a)^2-2\times4a\times2a\cos60^\circ$，化简得$e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{3}$.

故选：**A**.

【点睛】

本题考查求双曲线的离心率，解题关键是应用双曲线定义用a表示出P到两焦点的距离，再由余弦定理得出a,c的齐次式.

8、**B**

【解析】

根据程序框图中程序的功能，可以列方程计算.

【详解】

由题意$S\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{4}=15$，$S=60$.

故选：**B**.

【点睛】

本题考查程序框图，读懂程序的功能是解题关键.