知识点26 导数的概念及运算（P3-19）

知识点27 导数的几何意义（P20-36）

01

知识点26 导数的概念及运算

教材知识萃取

1.导数的概念

a.函数$f(x)$在$x=x_0$处的导数：如果当$\Delta x\to 0$时，平均变化率① $\frac{\Delta y}{\Delta x}$无限趋近于

—

个确定的值，即$\frac{\Delta y}{\Delta x}$有极限，则称$y=f(x)$在$x=x_0$处可导，并把这个确定的值叫做$y=f(x)$在$x=x_0$处的导数（也称为瞬时变化率），记作$f'(x_0)$或$y'|_{x=x_0}$，即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

教材知识萃取

b.函数$f(x)$的导函数:从求函数$y=f(x)$在$x=x_0$处导数的过程可以看到，当$x=x_0$时，$f'(x_0)$是一个唯一确定的数．这样，当x变化时，$y=f'(x)$就是x的函数，我们称它为$y=f(x)$的导函数（简称导数）.$y=f(x)$的导函数有时也记作y'，即$f'(x)=y'=$②$\underline{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}}$.

说明 函数$y=f(x)$的导数$f'(x)$反映了函数$f(x)$的瞬时变化趋势，其大小$|f'(x)|$反映了变化的快慢，$|f'(x)|$越大，函数在相应范围内变化得越快.

教材知识萃取

辨析比较

$f'(x)$与$f'(x_0)$，$[f(x_0)]'$的区别与联系：$f'(x)$是一个函数，$f'(x_0)$是函数$f'(x)$在x_0处的函数值（常数），不一定为0，$[f(x_0)]'$是函数值$f(x_0)$的导数，且$[f(x_0)]'=0$.

教材知识萃取

2.导数的运算

（1）基本初等函数的导数公式

基本初等函数	导函数
(	
	$\alpha x^{\alpha-1}$ R
	f(x) cos x sin x
	f(x) = cos x
	$a^x \ln a$
	a > 0

特别地，若$f(x)=\mathrm{e}^x$,则$f'(x)=\mathrm{e}^x$;若$f(x)=\ln x$,则$f'(x)=\frac{1}{x}$;若$f(x)=\frac{1}{x}$,则

$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$.

教材知识萃取

（2）导数的四则运算法则

若$f'(x)$，$g'(x)$存在，则

i. $[f(x)\pm g(x)]'=$⑧$\underline{f'(x)\pm g'(x)}$；

ii. $[f(x)\cdot g(x)]'=$⑨$\underline{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)}$；

iii. $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]'=$⑩$\underline{\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}}(g(x)\neq 0)$；

iv. $[cf(x)]'=$⑪$\underline{cf'(x)}$.

教材知识萃取

规律总结

奇函数的导数是偶函数，偶函数的导数是奇函数，周期函数的导数还是周期函数.

（3）复合函数的导数

复合函数$y=f(g(x))$的导数和函数$y=f(u)$，$u=g(x)$的导数间的关系为$y'_x=$⑫<u>$y'_u \cdot u'_x$</u>，即y对x的导数等于y对u的导数与u对x的导数的乘积.

注意 （1）要分清每一步的求导是哪个变量对哪个变量的求导，不能混淆.

（2）对于含有参数的函数，要分清哪个字母是变量，哪个字母是参数，参数是常量，其导数为零.

教材知识萃取

方法技巧

1.导数运算的技巧

连乘形式	先展开化为多项式的形式，再求导
分式形式	观察函数的结构特征，先化为整式函数或较为简单的分式函数，再求导
对数形式	先化为和、差的形式，再求导
根式形式	先化为分数指数幂的形式，再求导
三角形式	先利用三角函数公式转化为和或差的形式，再求导
复合形式	先确定复合关系，由外向内逐层求导，必要时可换元

教材知识萃取

2.对解析式形如$f(x)=f'(x_0)g(x)+h(x)$（x_0为常数）的函数求值问题，解题思路：先求导数$f'(x)$,然后令$x=x_0$,解关于$f'(x_0)$的方程，即可得到$f'(x_0)$的值，进而得到$f(x)$,$f'(x)$再进行求解.

教材素材变式

1. [多选] [人A选必二P81练习第1题变式] 下列求导错误的是(**ABD**)

A. $(\log_2 3)' = \frac{1}{3\ln 2}$　　B. $[\ln(2x)]' = \frac{1}{2x}$　　C. $(\sin^2 x)' = \sin 2x$　　D. $\left(\frac{\cos x}{x}\right)' = \frac{\cos x + \sin x}{x^2}$

【解析】对于A：$(\log_2 3)' = 0$，故A错误.对于B：$[\ln(2x)]' = (\ln 2 + \ln x)' = (\ln 2)' + (\ln x)' = \frac{1}{x}$，（【另解】可直接用复合函数求导法则,得$[\ln(2x)]' = 2 \cdot \frac{1}{2x} = \frac{1}{x}$）故B错误.对于C：$(\sin^2 x)' = 2\sin x\cos x = \sin 2x$，故C正确.对于D：$\left(\frac{\cos x}{x}\right)' = \frac{(\cos x)'x - x'\cos x}{x^2} = \frac{-\sin x \cdot x - \cos x}{x^2}$，故D错误.故选ABD.

2. [人A选必二P81习题5.2第3题变式] 已知函数$f(x)=\begin{cases} x^3, x<0, \\ \ln x, 0<x<1, \end{cases}$若$f'(a)=3$，则$a=$__$-1$或$\frac{1}{3}$__ .

【解析】 由题意得$f'(x)=\begin{cases} 3x^2, x<0, \\ \frac{1}{x}, 0<x<1. \end{cases}$ 当$a<0$时，$3a^2=3$，解得$a=-1$或$a=1$（舍去）；当$0<a<1$时，$\frac{1}{a}=3$，得$a=\frac{1}{3}$. 综上可知，$a=-1$或$a=\frac{1}{3}$.

3. [人B选必三P91习题6-1C第2题变式] 已知函数$f(x)=2f'(3)x-\frac{2}{9}x^2+\ln x$($f'(x)$是$f(x)$的导函数），则$f(1)=$（ D）

A.$-\frac{20}{9}$ B.$-\frac{11}{9}$ C.$\frac{7}{9}$ D.$\frac{16}{9}$

【解析】第1步：求$f'(x)$

由题意得$f'(x)=2f'(3)-\frac{4}{9}x+\frac{1}{x}$，

第2步：求$f'(3)$

$\therefore f'(3)=2f'(3)-\frac{4}{3}+\frac{1}{3}$，得$f'(3)=1$，

第3步：求$f(x)$，从而得值

$\therefore f(x)=2x-\frac{2}{9}x^2+\ln x$，$\therefore f(1)=2-\frac{2}{9}=\frac{16}{9}$，故选D．

变式探究

已知函数$f(x)=\sin\alpha\cos x$，且$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$，则$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=$__$\frac{\sqrt{3}}{2}$__.

【解析】 易得$f'(x)=-\sin\alpha\sin x$，（注意：$\sin\alpha$ 为常数，其导数为0）所以$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\alpha=1$，所以$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\alpha\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. [人A选必二P70习题5.1第2题变式]随着科学技术的发展，放射性同位素技术已经广泛应用于医学、航天等众多领域，并取得了显著的经济效益.假设在放射性同位素钍234的衰变过程中，其含量N（单位：贝克）与时间t（单位：天）满足函数关系$N(t)=N_0 2^{-\frac{t}{24}}$，其中$N_0$为$t=0$时钍234的含量.已知$t=24$时，钍234含量的瞬时变化率为$-8\ln 2$，则$N(96)=$(　C)

A.12　　B.$12\ln 2$　　C.24　　D.$24\ln 2$

【解析】由$N(t)=N_0 2^{-\frac{t}{24}}$,得$N'(t)=N_0 2^{-\frac{t}{24}}\times\ln\ 2\times\left(-\frac{1}{24}\right)$. $\because N'(24)=N_0\times 2^{-\frac{24}{24}}\times\ln\ 2\times\left(-\frac{1}{24}\right)=-8\ln\ 2$，

$\therefore N_0=2\times 8\times 24=384$，$\therefore N(t)=384\times 2^{-\frac{t}{24}}$，$\therefore N(96)=384\times 2^{-\frac{96}{24}}=384\times 2^{-4}=24$，故选C.