第12章　机械振动基础

※ 引　言

※ 单自由度系统的自由振动

※ 计算固有频率的能量法

※ 单自由度系统的有阻尼自由振动

※ 单自由度系统的无阻尼受迫振动

※ 单自由度系统的有阻尼受迫振动

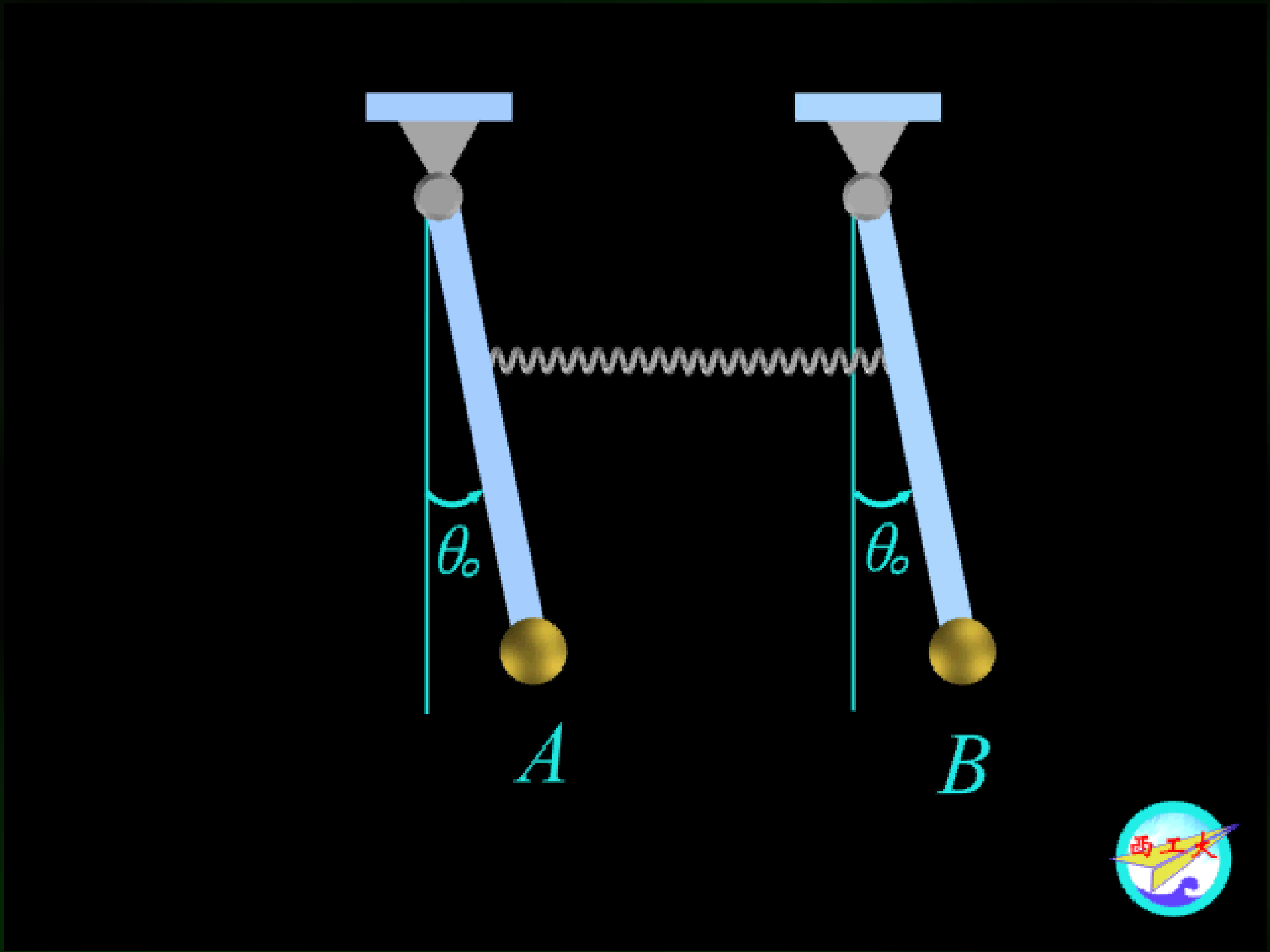
※ 结论与讨论

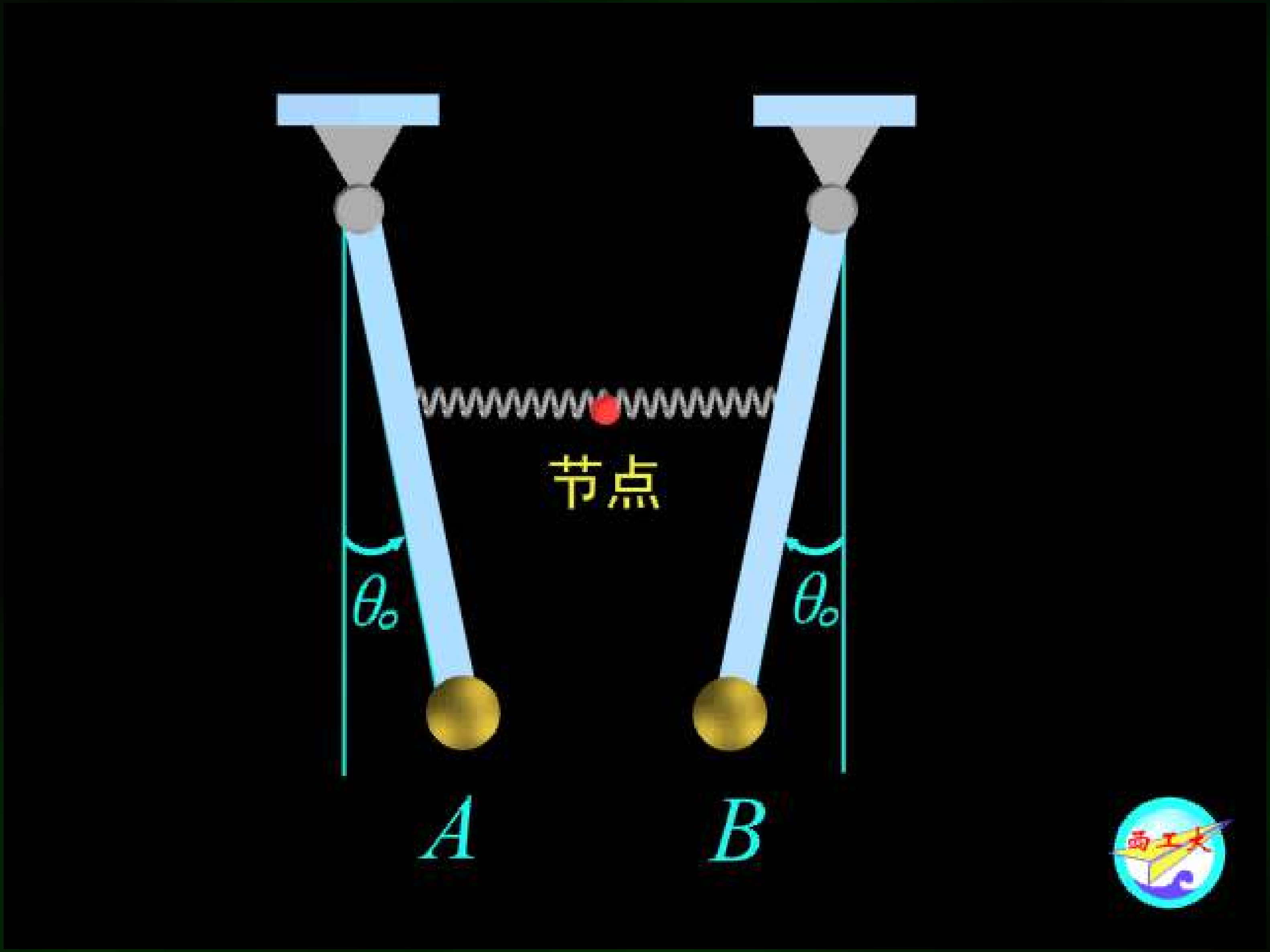
引　　言

振动是一种运动形态，是指物体在平衡位置附近作往复运动。

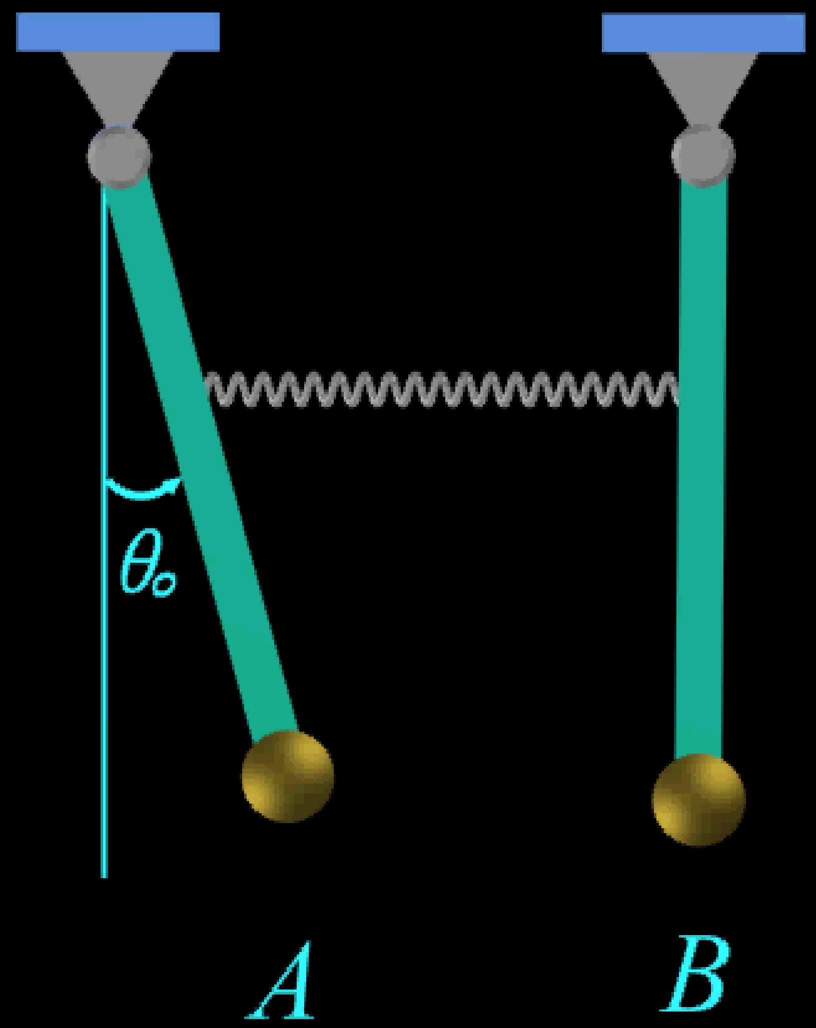
物理学知识的深化和扩展－物理学中研究质点的振动；工程力学研究系统的振动，以及工程构件和工程结构的振动。

振动属于动力学第二类问题－已知主动力求运动。


θ_0
θ_0
A
B
西工大



节点
θ_o
θ_o
A
B


θ_o
A
B

振动问题的研究方法—与分析其他动力学问题相类似：

- 选择合适的广义坐标；
- 分析运动；
- 分析受力；
- 选择合适的动力学定理；
- 建立运动微分方程；
- 求解运动微分方程，利用初始条件确定积分常数。

与分析其他动力学问题不同的是：一般情形下，都选择平衡位置作为广义坐标的原点。

研究振动问题所用的动力学定理：

- 矢量动力学基础中的—
  动量定理；
  动量矩定理；
  动能定理；
  达朗伯原理。

振动问题的分类

按激励特性划分：

- 自由振动—没有外部激励，或者外部激励除去后，系统自身的振动。

- 受迫振动—系统在作为时间函数的外部激励下发生的振动，这种外部激励不受系统运动的影响。

- 自激振动—系统由系统本身运动所诱发和控制的激励下发生的振动。

- 参激振动—激励源为系统本身含随时间变化的参数，这种激励所引起的振动。

按系统特性或运动微分方程类型划分：

- **线性振动**—系统的运动微分方程为线性方程的振动。

$$m\ddot{y} + ky = 0$$

$$m_{eq}\ddot{\theta} + k_{eq}\theta = F_0\sin(\omega t)$$

- **非线性振动**—系统的刚度呈非线性特性时，将得到非线性运动微分方程，这种系统的振动称为非线性振动。

按系统的自由度划分：

- **单自由度振动**—一个自由度系统的振动。
- **多自由度振动**—两个或两个以上自由度系统的振动。
- **连续系统振动**—连续弹性体的振动。这种系统具有无穷多个自由度。

§12-1　单自由度系统的自由振动

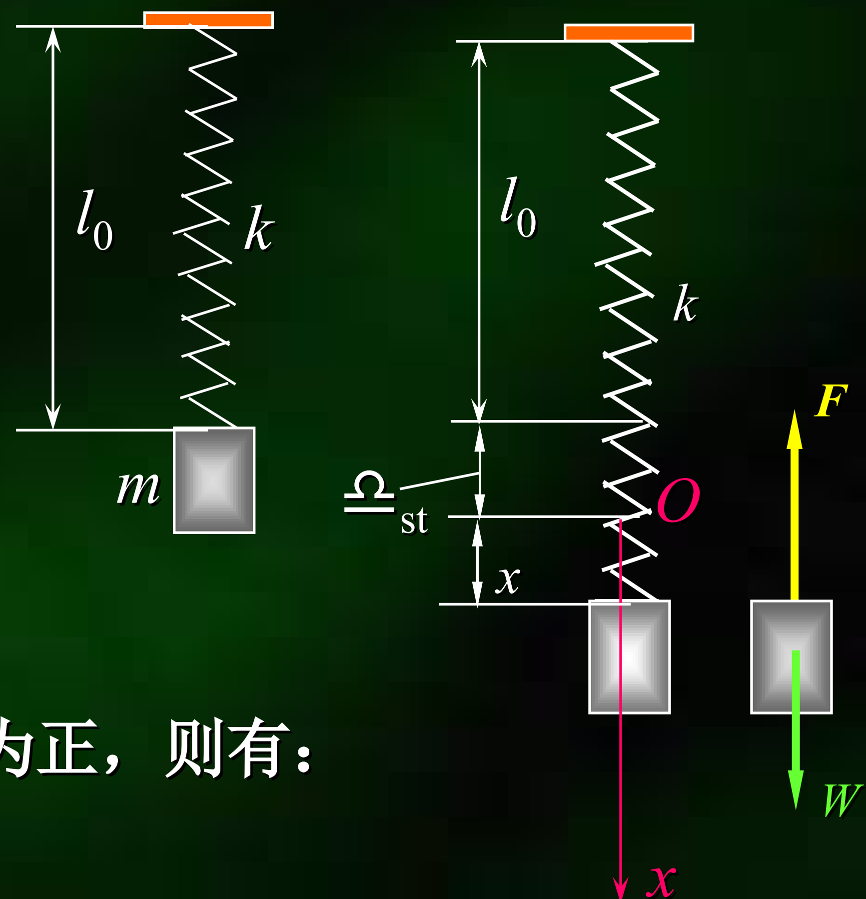
1.自由振动微分方程

l_0——弹簧原长；

k——弹簧刚性系数；

δ_{st}——弹簧的静变形；

$$W = k\delta_{st} \Rightarrow \delta_{st} = W / k$$



取静平衡位置为坐标原点，*x* 向下为正，则有：

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = W - F = W - k(x+\delta_{st})$$

$$= -kx$$

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \omega_n^2 x = 0$$

$x = C_1 \cos \omega_n t + C_2 \sin \omega_n t \quad C_1, C_2 \Rightarrow$ 积分常数

令： $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \tan \theta = C_1 / C_2$

$$x = A \sin(\omega_n t + \theta)$$

A——振幅；

ω_n——固有频率；

（$\omega_n + \theta$）——相位；

θ——初相位。

周期 $T = \dfrac{2\pi}{\omega_n}$

$$\omega_n = 2\pi \frac{1}{T} = 2\pi f$$

物理学基础的扩展

单自由度线性系统无阻尼自由振动微分方程

$$m\ddot{x}+kx=0$$

这一方程，可以扩展为广义坐标的形式

$$m_{\mathrm{eq}}\ddot{q}+k_{\mathrm{eq}}q=0$$

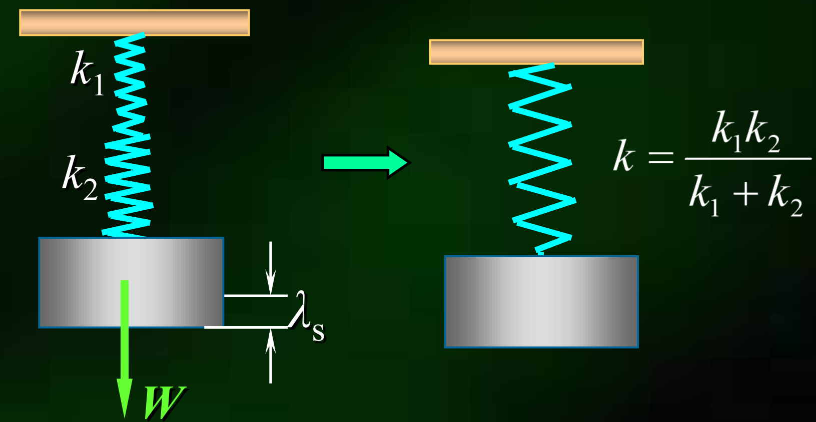
k_{eq}—等效刚度：使系统在广义坐标方向产生单位位移，需要在这一坐标方向施加的力或力矩。

m_{eq}—等效质量：使系统在广义坐标方向产生单位加速度，需要在这一坐标方向施加的力或力矩。

串联弹簧与并联弹簧的等效刚度

1. 串联情形

设弹簧刚度系数分别为k_1和k_2，在W重力作用下，两弹簧的总静变形λ_s等于单个弹簧的静变形之和，有



$$\lambda_s=\lambda_{1s}+\lambda_{2s}$$

由于弹簧是串连的，每个弹簧受的力W相等，于是

$$\lambda_{1s}=\frac{W}{k_1},\qquad \lambda_{2s}=\frac{W}{k_2}$$

得 $$\lambda_s=W\left(\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}\right)=W\frac{k_1+k_2}{k_1k_2}$$

固有频率

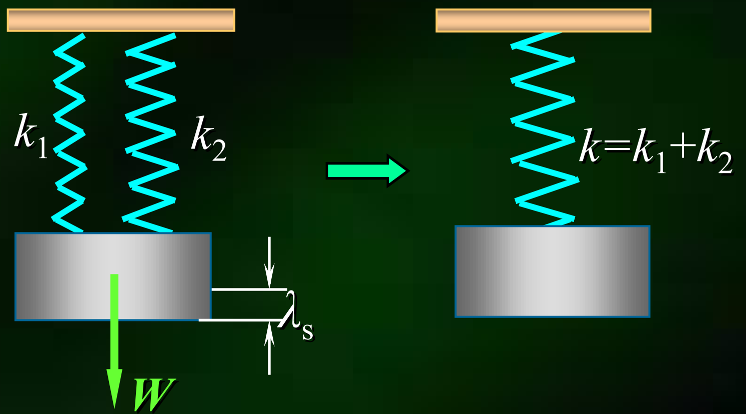
$$\omega_0=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1k_2}{m(k_1+k_2)}}$$

上式说明串联弹簧的等效刚度系数为

$$k^*=\frac{1}{\dfrac{1}{k_1}+\dfrac{1}{k_2}}=\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}$$

2. 并联情形

设弹簧刚度系数分别为k_1和k_2，在W重力作用下，静变形为λ_s，有



$$W = k_1\lambda_s + k_2\lambda_s = (k_1 + k_2)\lambda_s$$

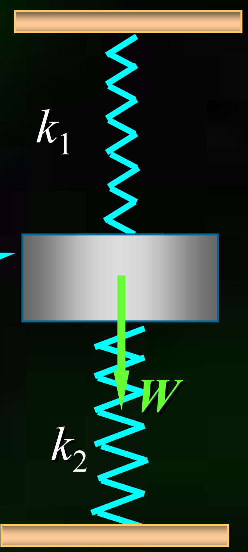
固有频率

$$\omega_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$$

上式说明并联弹簧的等效刚度系数为

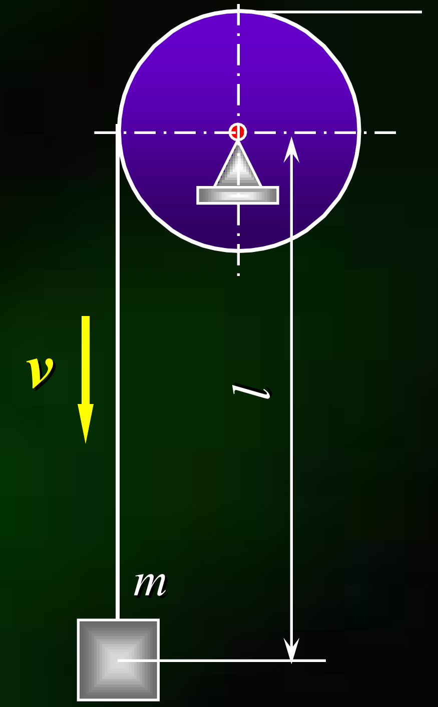
$$k^* = k_1 + k_2$$

这种弹簧同样也是属于并联的情况



例题 1

提升重物系统中，钢丝绳的横截面积$A=2.89\times10^{-4}\mathrm{m}^2$，材料的弹性模量$E=200\mathrm{GPa}$。重物的质量$m=6000\mathrm{kg}$，以匀速 $v=0.25\mathrm{m/s}$ 下降。当重物下降到 $l=25\mathrm{m}$ 时，钢丝绳上端突然被卡住。

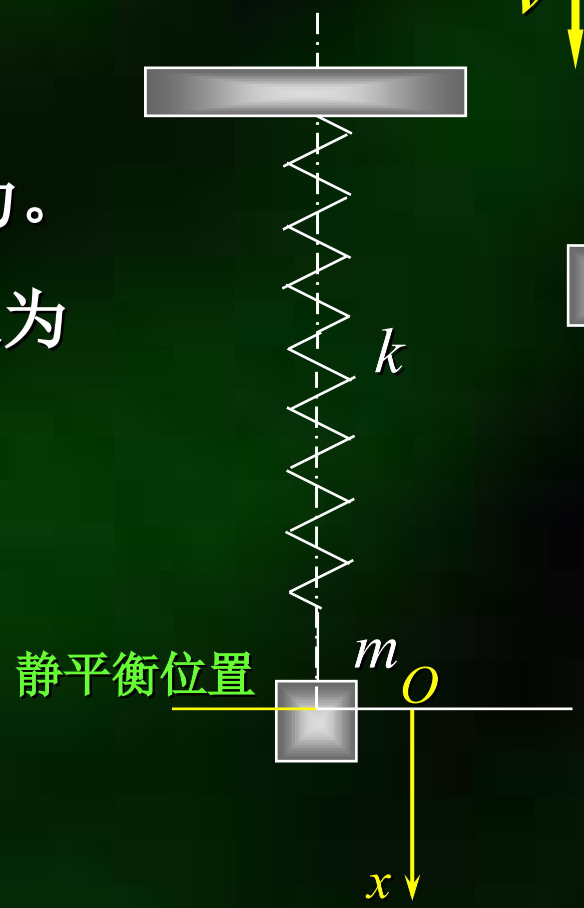


求：（1）重物的振动规律；

（2）钢丝绳承受的最大张力。

解：钢丝绳－重物系统可以简化为弹簧－物块系统,弹簧的刚度为

$$k=\frac{EA}{l}=2.312\times10^{6}\ \mathrm{N/m}$$



设钢丝绳被卡住的瞬时$t=0$，这时重物的位置为初始平衡位置；以重物在铅垂方向的位移x作为广义坐标，则系统的振动方程为

$$m\ddot{x}+kx=0$$

$m\ddot{x} + kx = 0$ 方程的解为

$$x = A\sin(\omega_n t + \theta) \qquad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = 19.63\text{s}^{-1}$$

利用初始条件 $x(0) = 0, \qquad \dot{x}(0) = v(0) = v$

求得 $\theta = 0$

$$A = \frac{v}{\omega_n} = 0.0127\text{m}$$

$$x = 0.0127\sin 19.63\, t$$

（2）钢丝绳承受的最大张力。

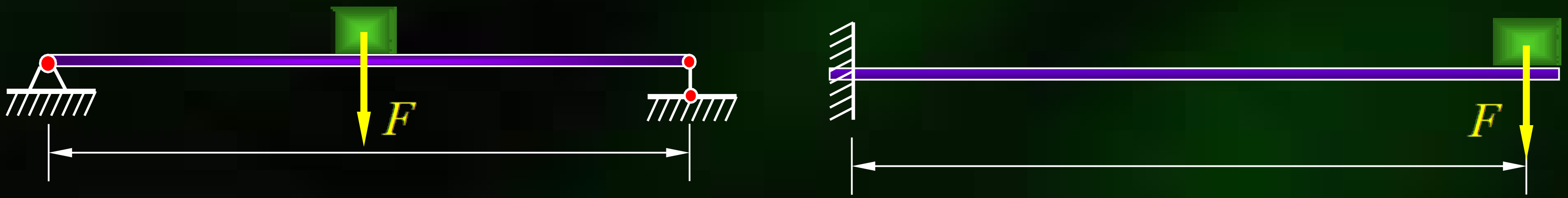
取重物为研究对象

$$W - F_T = m\ddot{x} = -mA\omega_n^2 \sin \omega_n t$$

$$F_T = W + mA\omega_n^2 \sin \omega_n t$$

$$F_{T\max} = W + mA\omega_n^2 = m(g + A\omega_n^2) = 88.2\text{kN}$$

例题2 如图表示一简支梁和悬臂梁各有一集中载荷，重量为F，位置如图所示。已知梁的跨度为l，材料的弹性模量为E，截面惯性矩为J，不计梁的质量，求梁的固有频率。



解：简支梁中点和悬臂梁端点的静挠度分别为

$$\delta_{简st}=\frac{l^2}{48EJ}F \quad 和 \quad \delta_{悬st}=\frac{l^2}{3EJ}F$$

相当的弹簧系数分别为

$$k_{简}=\frac{48EJ}{l^2} \quad 和 \quad k_{悬}=\frac{3EJ}{l^2}$$

则固有频率分别为

$$\omega_{简0}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{48EJg}{Fl^2}}$$

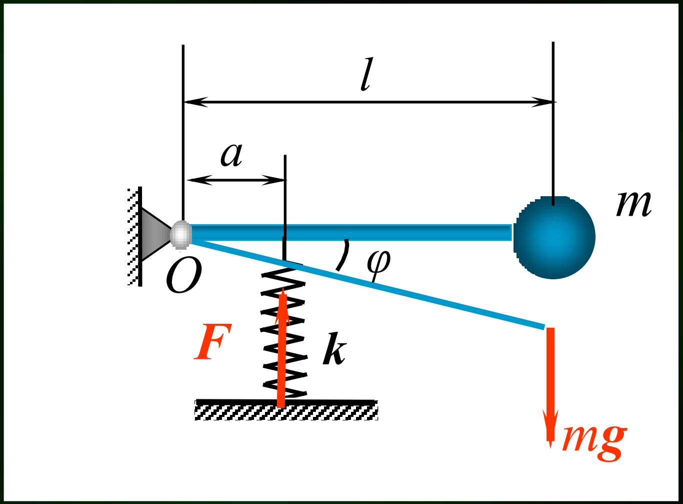
和

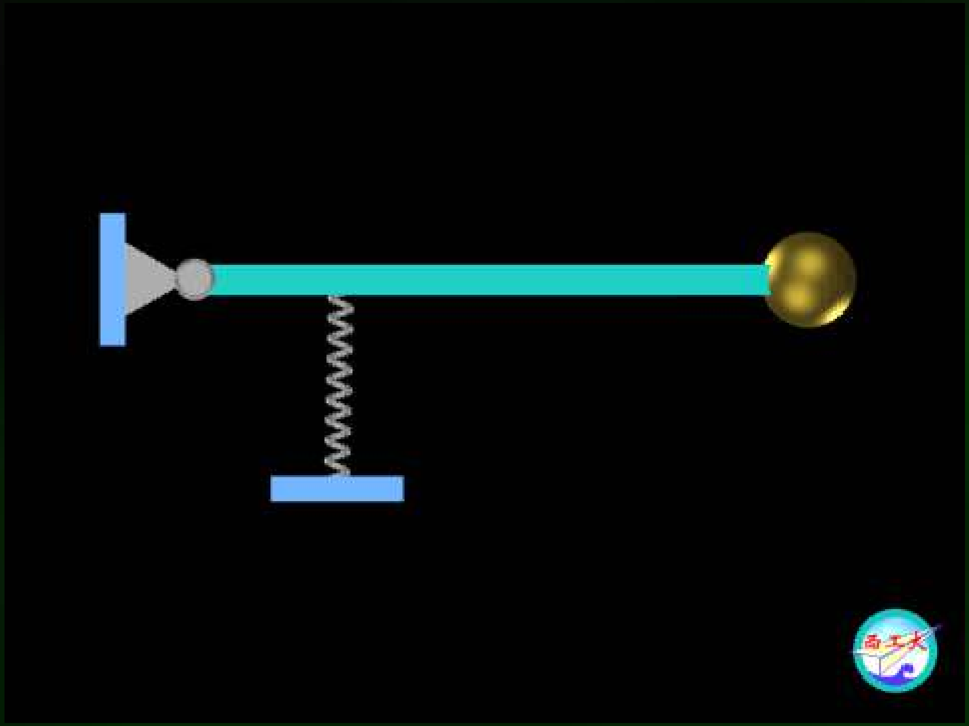
$$\omega_{悬0}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3EJg}{Fl^2}}$$

例题3

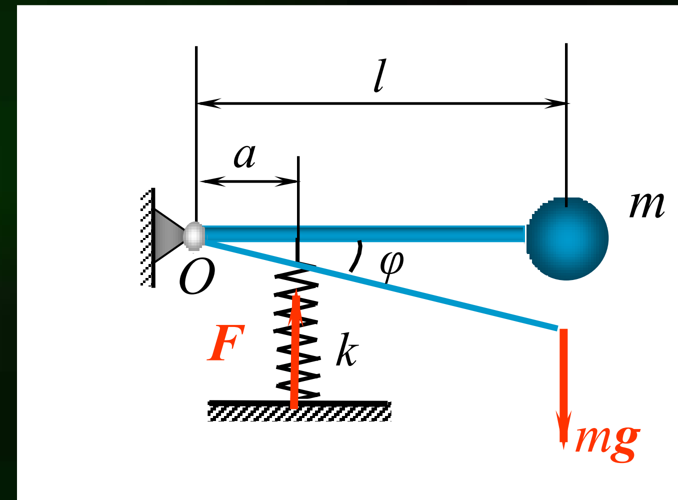
图示结构中，杆在水平位置处于平衡，若k、m、a、l 等均为已知。

求： 系统微振动的固有频率





解： 取静平衡位置为其坐标原点，由动量矩定理，得



$$J_O\frac{d^2\varphi}{dt^2}=mgl\cos\varphi-Fa\cos\varphi$$

$$F=k(\delta_{st}+a\sin\varphi)$$

考虑到微转角则 $\cos\varphi\approx1,\quad \sin\varphi\approx\varphi$

在静平衡位置处，有 $mgl=k\delta_{st}a$

$$J_O\frac{d^2\varphi}{dt^2}=mgl-k(\delta_{st}+a\varphi)a$$

$$=-ka^2\varphi$$

$$J_O\ddot{\varphi}+ka^2\varphi=0$$

$$\omega_n=a\sqrt{\frac{k}{J_O}}=\frac{a}{l}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

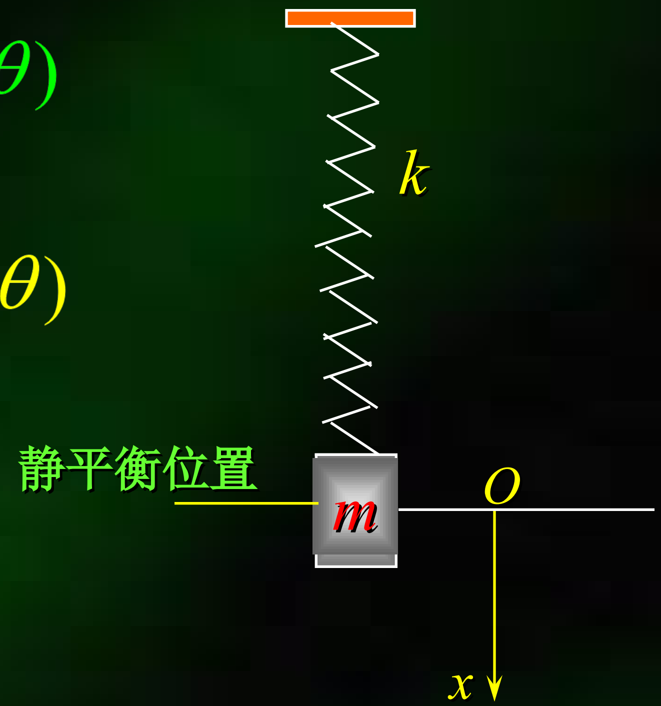
§12-2　计算固有频率的能量法

$$x = A\sin(\omega_n t + \theta)$$

$$v = \dot{x} = A\omega_n \cos(\omega_n t + \theta)$$

物块的动能为

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega_n^2 A^2 \cos^2(\omega_n t + \theta)$$



取静平衡位置为零势能点，有

$$V = \frac{1}{2}k[(x+\delta_{st})^2 - \delta_{st}^2] - mgx$$

在静平衡位置处，有　$k\delta_{st} = mg$

$$V = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega_n t + \theta)$$

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \omega_n^2 A^2 \cos^2(\omega_n t + \theta)$$

$$V = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega_n t + \theta)$$

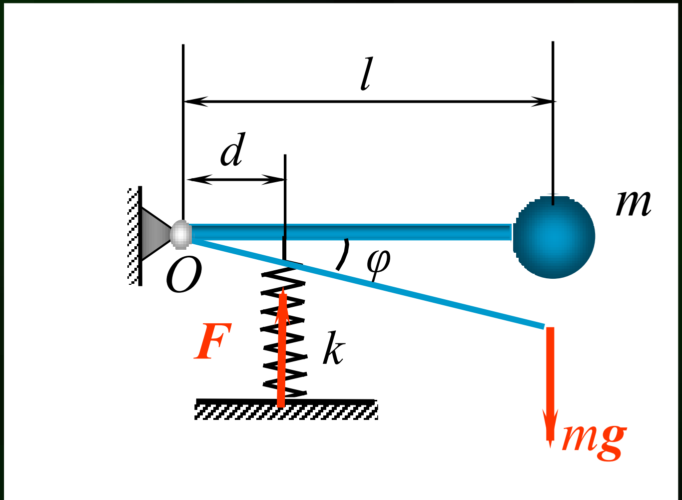
物块在平衡位置处，其动能最大 $T_{\max} = \frac{1}{2} m \omega_n^2 A^2$

物块在偏离平衡位置的极端处，其势能最大 $V_{\max} = \frac{1}{2} k A^2$

无阻尼自由振动系统是保守系统，系统的机械能守恒

$$T_{\max} = V_{\max} \Longrightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

例 题 5　　由能量法解 例题4



解： 设OA杆作自由振动时，其摆角 φ 的变化规律为

$$\varphi = A\sin(\omega_n t + \theta)$$

系统的最大动能为

$$T_{\max} = \frac{1}{2} m (l \dot{\varphi}_{\max})^2 = \frac{1}{2} m l^2 A^2 \omega_n^2$$

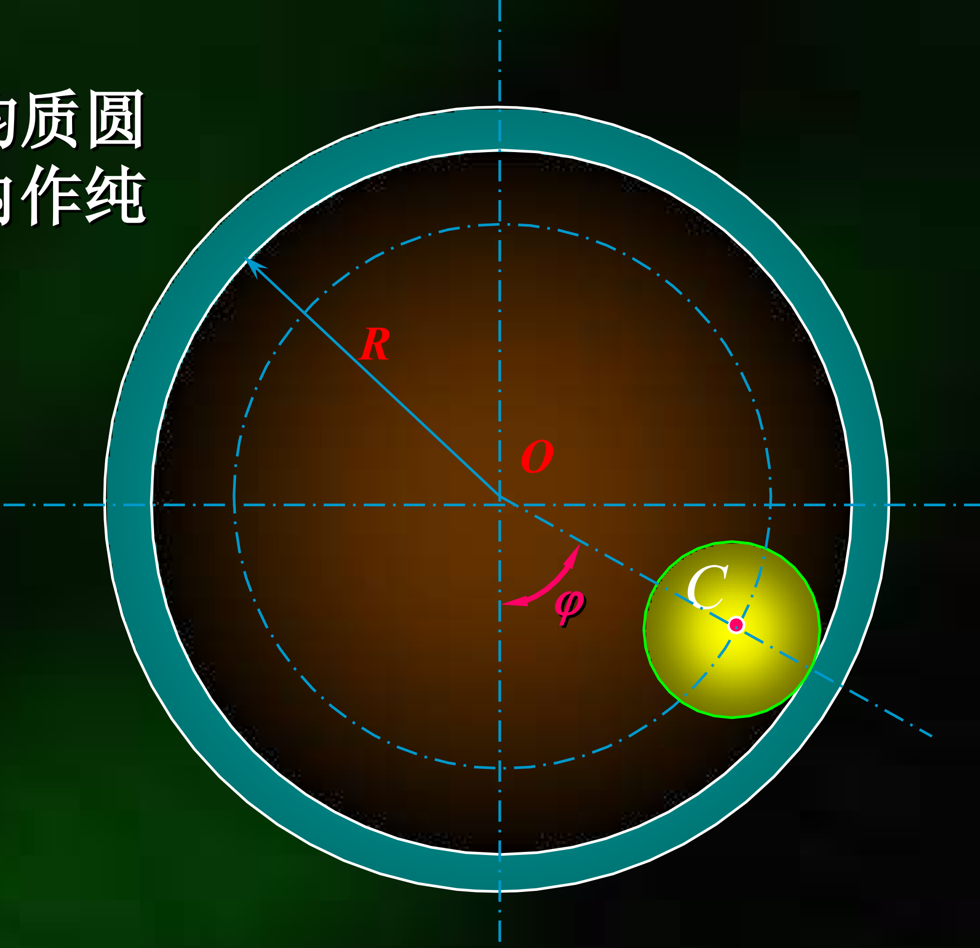
系统的最大势能为

$$V_{\max} = \frac{1}{2} k (a \varphi_{\max})^2 = \frac{1}{2} k a^2 A^2$$

由机械能守恒定律有

$$T_{\max} = V_{\max} \Longrightarrow \omega_n = \frac{a}{l}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

例 题 6 半径为r、质量为 m的均质圆柱体，在半径为 R 的刚性圆槽内作纯滚动 。



求： 微振动固有频率。

解： 设摆角 φ 的变化规律为

$$\varphi = A\sin(\omega_n t + \theta)$$

系统的最大动能为

$$T_{\max} = \frac{3}{4}m(R-r)^2\dot{\varphi}^2_{\max}$$

$$= \frac{3}{4}m(R-r)^2A^2\omega_n^2$$

取平衡位置处为零势能点，则系统的势能为

$$V = mg(R-r)(1-\cos\varphi)$$

$$= 2mg(R-r)\sin^2\frac{\varphi}{2}$$

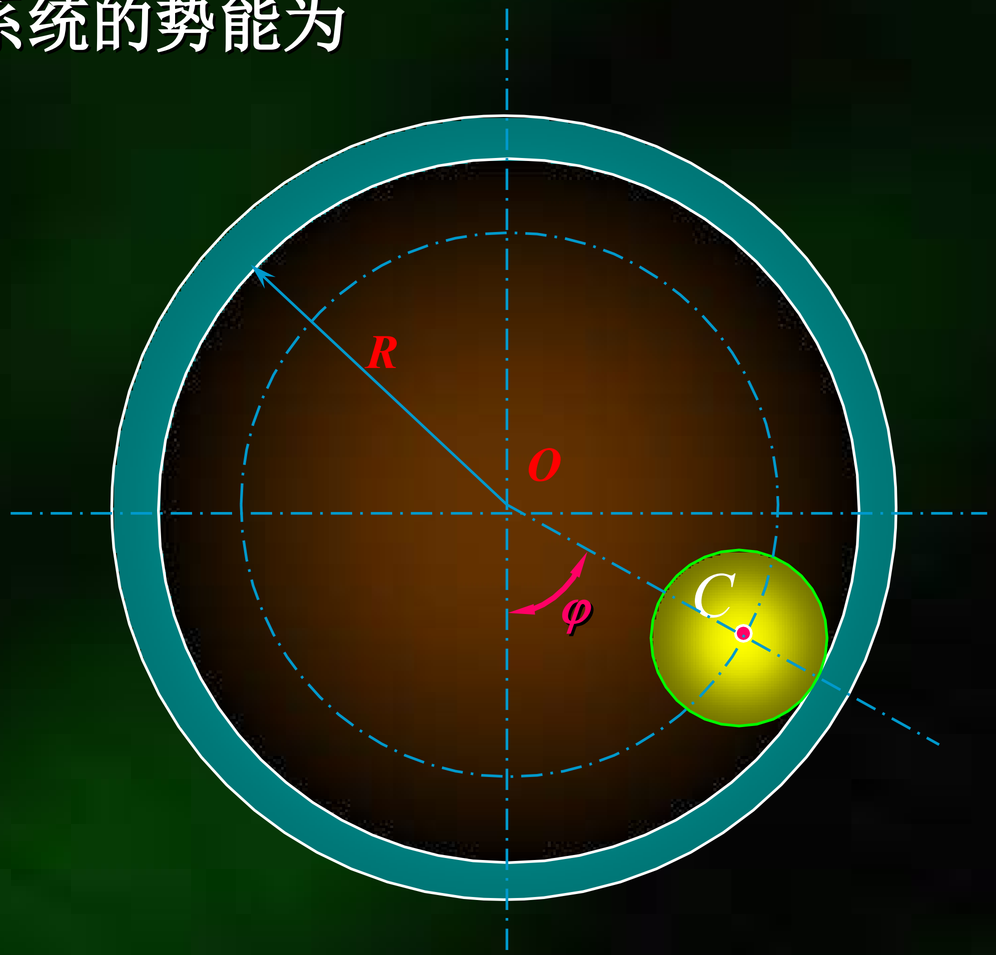
考虑到微振动时,有

$\sin\varphi \approx \varphi$

$$V = \frac{1}{2}mg(R-r)\varphi^2$$

$$\therefore \quad V_{\max} = \frac{1}{2}mg(R-r)A^2$$

前面已经得出 $T_{\max} = \frac{3}{4}m(R-r)^2A^2\omega_n^2$



由机械能守恒定律有

$$T_{\max} = V_{\max}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{2g}{3(R-r)}}$$

§12-3 单自由度系统有阻尼自由振动

1. 阻 尼

阻尼—系统中存在的各种阻力：干摩擦力，润滑表面阻力，液体或气体等介质的阻力、材料内部的阻力。

物体运动沿润滑表面的阻力与速度的关系

$$F_c = -cv$$

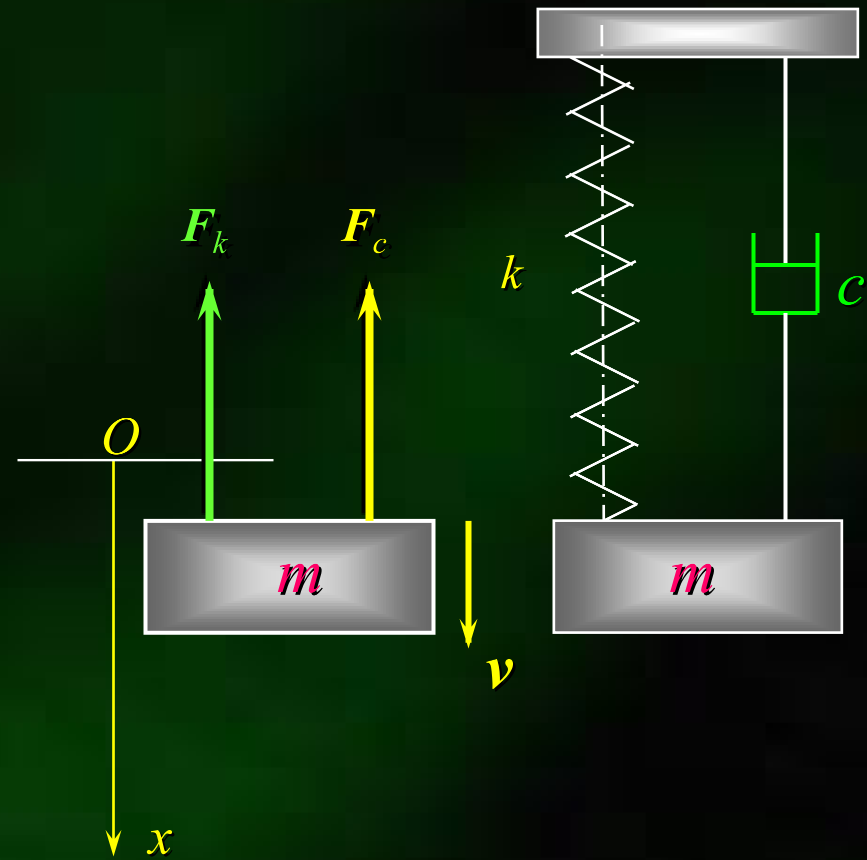
c—粘性阻尼系数或粘阻系数

2. 振动微分方程

取平衡位置为坐标原点，在建立此系统的振动微分方程时，可以不再计入重力的影响。

$F_k = -kx \Rightarrow$ 弹性恢复力

$F_c = -c\dot{x} \Rightarrow$ 粘性阻尼力



物块的运动微分方程为

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - c\frac{dx}{dt}$$

令： $\omega_n^2 = \dfrac{k}{m}$， $n = \dfrac{c}{2m}$ $\Rightarrow$ $$\frac{d^2x}{dt^2} + 2n\frac{dx}{dt} + \omega_n^2 x = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2n\frac{dx}{dt}+\omega_n^2x=0$$

设其解为

$$x=e^{rt}$$

本征方程 $r^2+2nr+\omega_n^2=0$

本征值

$$r_1=-n+\sqrt{n^2-\omega_n^2}$$

$$r_2=-n-\sqrt{n^2-\omega_n^2}$$

其通解为

$$x=C_1e^{r_1t}+C_2e^{r_2t}$$

本征值与运动微分方程的通解的形式与阻尼比有关。

3. 小阻尼情形

当 $n< \omega_n$ 时，阻尼系数 $c<2\sqrt{mk}$，这时阻尼较小，称为小阻尼情形。其两个根为共轭复数，即：

$$r_1=-n+\mathrm{i}\sqrt{\omega_n^2-n^2}$$

$$r_2=-n-\mathrm{i}\sqrt{\omega_n^2-n^2}$$

其方程的解为

$$x=Ae^{-nt}\sin(\sqrt{\omega_n^2-n^2}t+\theta)$$

或

$$x=Ae^{-nt}\sin(\omega_d t+\theta)\quad 其中:\omega_d=\sqrt{\omega_n^2-n^2}$$

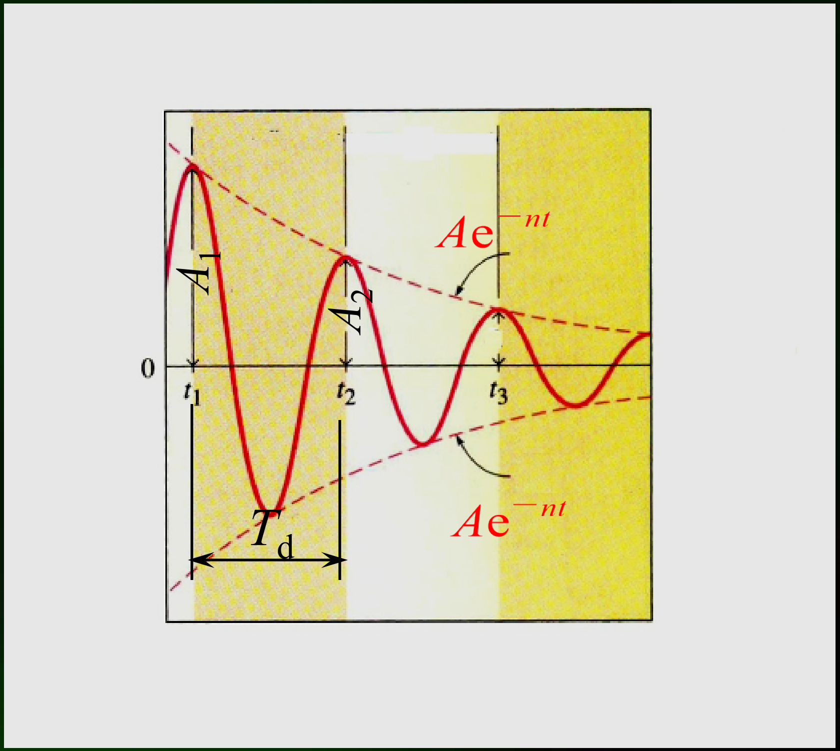
利用初始条件

$$x(0)=0,\qquad \dot{x}(0)=v(0)=v_0$$

求得

$$A=\sqrt{x_0^2+\frac{(v_0+nx_0)^2}{\omega_\mathrm{n}^2-n^2}}\qquad \tan\theta=\frac{x_0\sqrt{\omega_\mathrm{n}^2-n^2}}{v_0+nx_0}$$

$$x = Ae^{-nt}\sin(\omega_d t + \theta)$$



衰减振动的周期：

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_n^2 - n^2}}$$

引入阻尼比：

$$\xi = \frac{n}{\omega_n} = \frac{c}{2\sqrt{mk}}$$

得有阻尼自由振动和相应的无阻尼自由振动间的关系：

$$T_d = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_n^2 - n^2}} = \frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{T}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

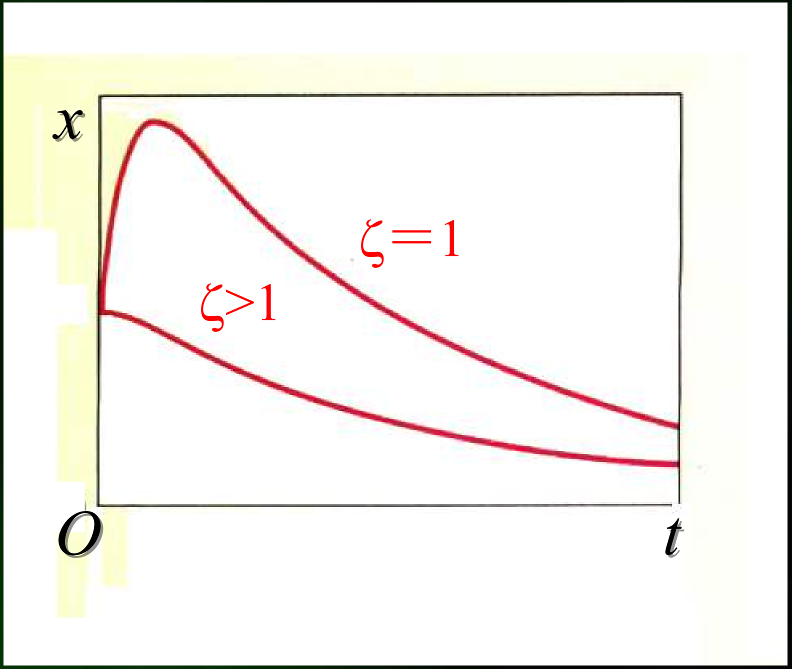
$$f_d = f\sqrt{1-\xi^2}$$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

大阻尼(ζ>1)情形

$$r_{1,2}=-n\pm\sqrt{n^2-\omega_n^2}$$

$$x=-e^{-nt}\left(C_1\mathrm{e}^{\sqrt{n^2-\omega_n^2}\,t}+C_2\mathrm{e}^{\sqrt{n^2-\omega_n^2}\,t}\right)$$



临界阻尼(ζ=1)情形

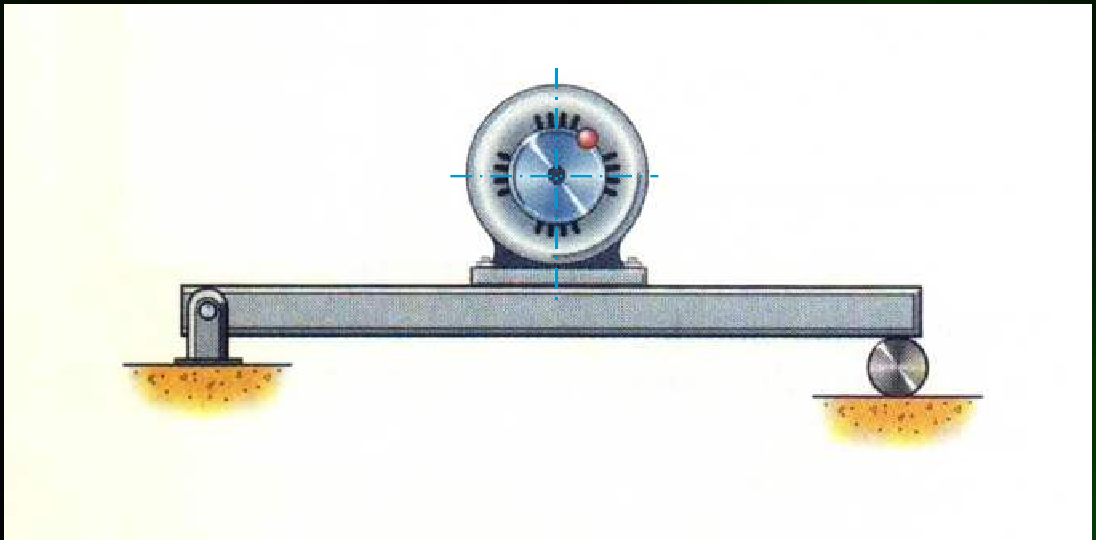
$$r_1=r_2=-n$$

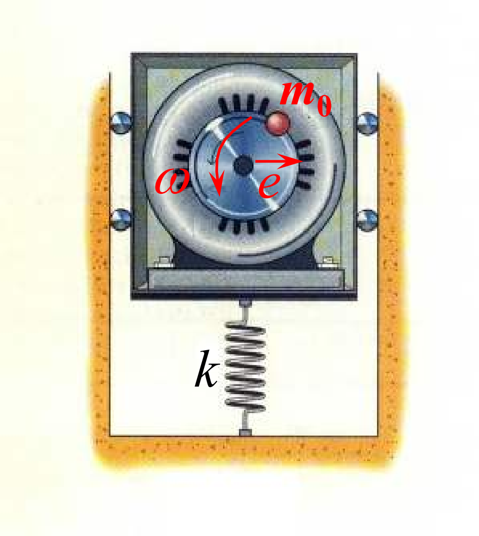
$$x=e^{-nt}(C_1+C_2t)$$

这两种情形下，运动不再是周期型的，而是按负指数衰减

§12-4 单自由度系统无阻尼受迫振动

受迫振动 *系统在外界激励下产生的振动。*





激励形式 外界激励一般为时间的函数，可以是周期函数，也可以是非周期函数。

简谐激励是最简单的激励。一般的周期性激励可以通过傅里叶级数展开成简谐激励的叠加。

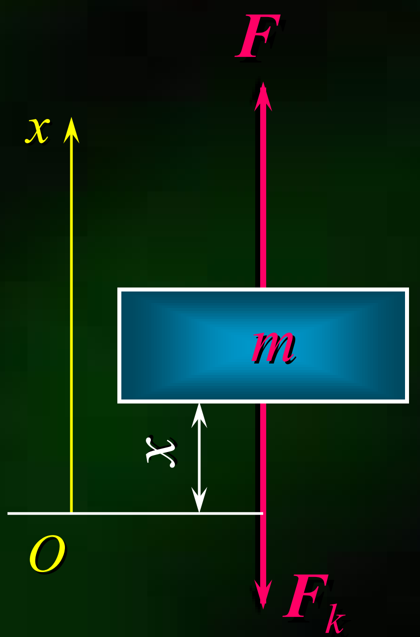
1. 振动微分方程

$F = H\sin(\omega t+\varphi) \Rightarrow$ 简谐激振力

$H \Rightarrow$ 力幅

$\omega \Rightarrow$ 激振力的圆频率

$\varphi \Rightarrow$ 激振力的初相位



振动微分方程

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx + H\sin(\omega t+\varphi)$$

令：$$\left.\begin{aligned}\omega_n^2 &= \frac{k}{m}\\ h &= \frac{H}{m}\end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_n^2 x = h\sin(\omega t+\varphi)}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_n^2 x = h\sin(\omega t+\varphi)$$

微分方程的解为： $x = x_1 + x_2 \quad x_1 \Rightarrow$ 通解; $\quad x_2 \Rightarrow$ 特解.

$$x_1 = A\sin(\omega_n t+\theta)$$

$$x_2 = b\sin(\omega t+\varphi)$$

将 x_2 代入微分方程，得

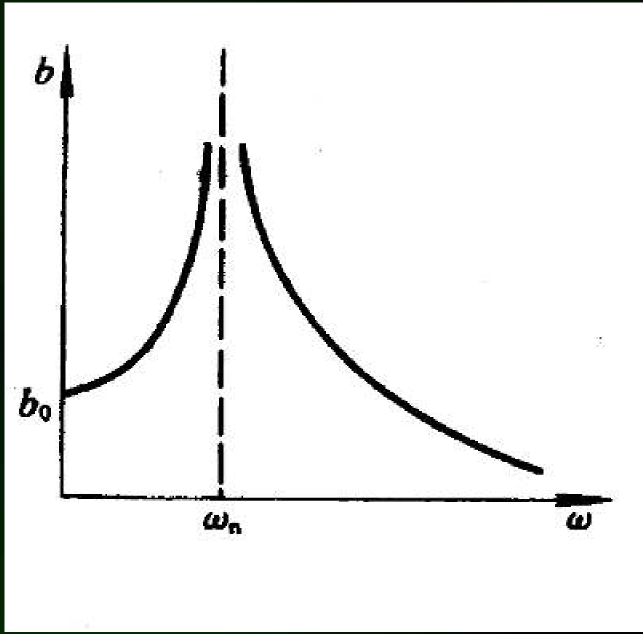
$$-b\omega^2\sin(\omega t+\varphi)+b\omega_n^2\sin(\omega t+\varphi)=h\sin(\omega t+\varphi)$$

解得 $$b=\frac{h}{\omega_n^2-\omega^2}$$

$$x = A\sin(\omega_n t+\theta)+\frac{h}{\omega_n^2-\omega^2}\sin(\omega t+\varphi)$$

2. 受迫振动的振幅

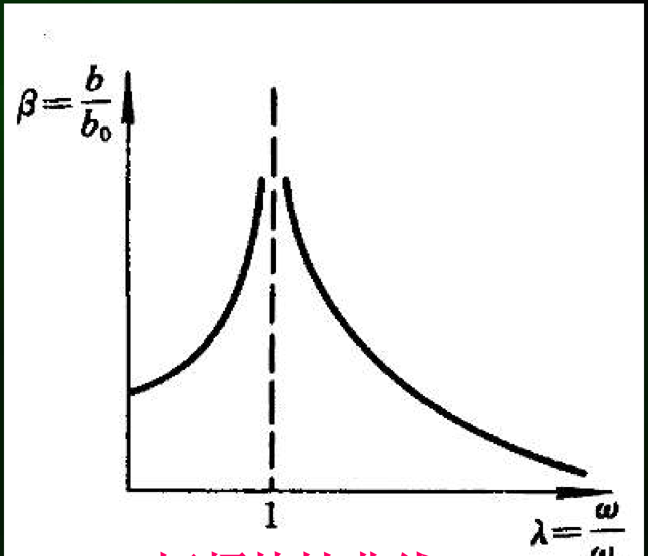
$$b = \frac{h}{\omega_n^2 - \omega^2}$$



（1）若$\omega \to 0$　$b_0 = \frac{h}{\omega_n^2} = \frac{H}{k}$

（2）若$0 < \omega < \omega_n$　振幅b随着频率ω单调上升，$\omega \to \omega_n, b \to \infty$.

（3）若$\omega > \omega_n$　振幅b随着频率ω增大而减小，$\omega \to \infty, b \to 0$.



幅频特性曲线