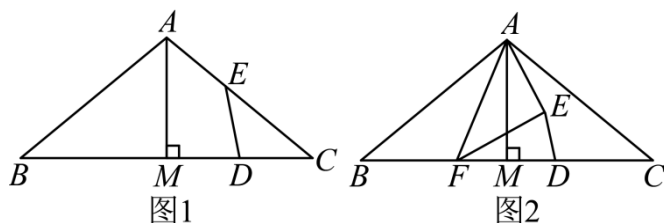


与旋转有关的探究题(专题训练)

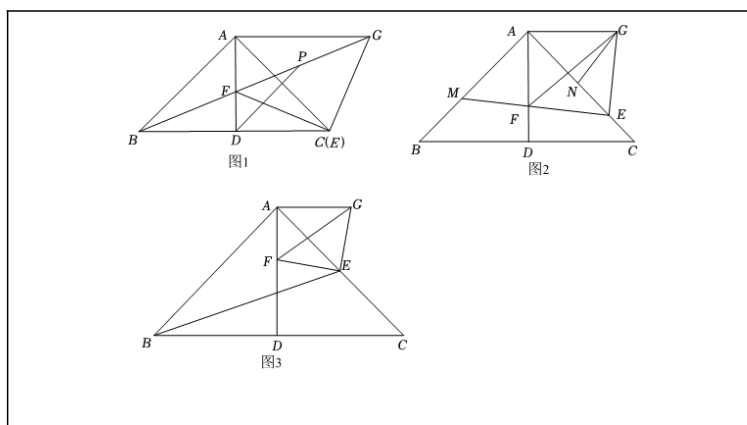
题目 1 (2023·北京·统考中考真题) 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = \angle C = \alpha$ ($0^\circ < \alpha < 45^\circ$), $AM \perp BC$ 于点 M , D 是线段 MC 上的动点 (不与点 M, C 重合), 将线段 DM 绕点 D 顺时针旋转 2α 得到线段 DE .



- (1) 如图1, 当点 E 在线段 AC 上时, 求证: D 是 MC 的中点;
- (2) 如图2, 若在线段 BM 上存在点 F (不与点 B, M 重合) 满足 $DF = DC$, 连接 AE, EF , 直接写出 $\angle AEF$ 的大小, 并证明.

题目 2 (2022·重庆市B卷) 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = AC = 2\sqrt{2}$, D 为 BC 的中点, E, F 分别为 AC, AD 上任意一点, 连接 EF , 将线段 EF 绕点 E 顺时针旋转 90° 得到线段 EG , 连接 FG, AG .

- (1) 如图1, 点 E 与点 C 重合, 且 GF 的延长线过点 B , 若点 P 为 FG 的中点, 连接 PD , 求 PD 的长;
- (2) 如图2, EF 的延长线交 AB 于点 M , 点 N 在 AC 上, $\angle AGN = \angle AEG$ 且 $GN = MF$, 求证: $AM + AF = \sqrt{2}AE$;
- (3) 如图3, F 为线段 AD 上一动点, E 为 AC 的中点, 连接 BE , H 为直线 BC 上一动点, 连接 EH , 将 $\triangle BEH$ 沿 EH 翻折至 $\triangle ABC$ 所在平面内, 得到 $\triangle B'EH$, 连接 $B'G$, 直接写出线段 $B'G$ 的长度的最小值.



题目 3 (2023·四川自贡·统考中考真题) 如图1, 一大一小两个等腰直角三角形叠放在一起, M, N 分别是斜边 DE, AB 的中点, $DE=2, AB=4$.

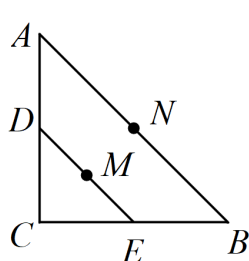


图1

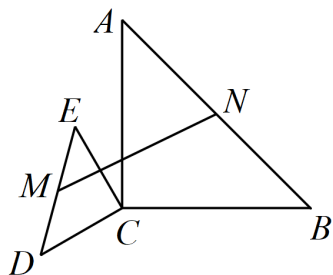


图2

- (1) 将 $\triangle CDE$ 绕顶点 C 旋转一周, 请直接写出点 M, N 距离的最大值和最小值;
- (2) 将 $\triangle CDE$ 绕顶点 C 逆时针旋转 120° (如图2), 求 MN 的长.

题目 4 (湖南省郴州市 2021 年中考数学试卷) 如图1, 在等腰直角三角形 ABC 中, $\angle BAC=90^\circ$. 点 E, F 分别为 AB, AC 的中点, H 为线段 EF 上一动点 (不与点 E, F 重合), 将线段 AH 绕点 A 逆时针方向旋转 90° 得到 AG , 连接 GC, HB .

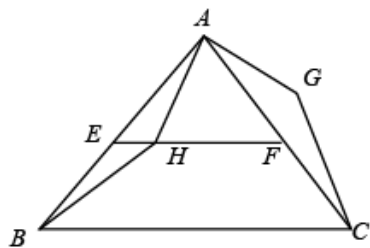


图1

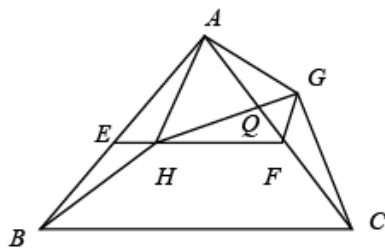
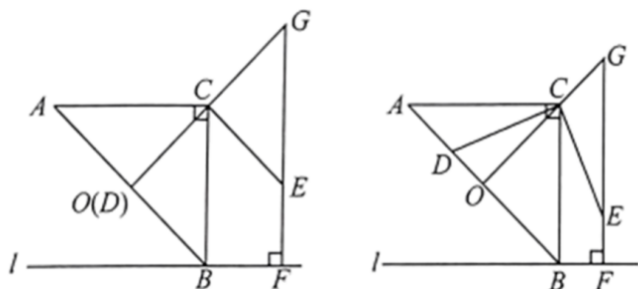


图2

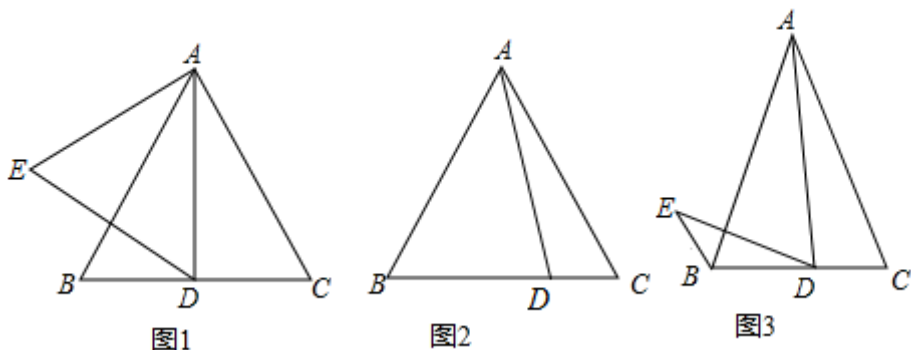
- (1) 证明: $\triangle AHB \cong \triangle AGC$;
- (2) 如图2, 连接 GF, HC , AF 交 AF 于点 Q .
 - ① 证明: 在点 H 的运动过程中, 总有 $\angle HFG=90^\circ$;
 - ② 若 $AB=AC=4$, 当 EH 的长度为多少时, $\triangle AQG$ 为等腰三角形?

题目 5 (2023·辽宁·统考中考真题) 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $CA = CB$, 点 O 为 AB 的中点, 点 D 在直线 AB 上 (不与点 A, B 重合), 连接 CD , 线段 CD 绕点 C 逆时针旋转 90° , 得到线段 CE , 过点 B 作直线 $l \perp BC$, 过点 E 作 $EF \perp l$, 垂足为点 F , 直线 EF 交直线 OC 于点 G .



- (1) 如图, 当点 D 与点 O 重合时, 请直接写出线段 AD 与线段 EF 的数量关系;
- (2) 如图, 当点 D 在线段 AB 上时, 求证: $CG + BD = \sqrt{2}BC$;
- (3) 连接 DE , $\triangle CDE$ 的面积记为 S_1 , $\triangle ABC$ 的面积记为 S_2 , 当 $EF:BC = 1:3$ 时, 请直接写出 $\frac{S_1}{S_2}$ 的值.

题目 6 (2021·四川中考真题) 在等腰 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, 点 D 是 BC 边上一点 (不与点 B, C 重合), 连结 AD .



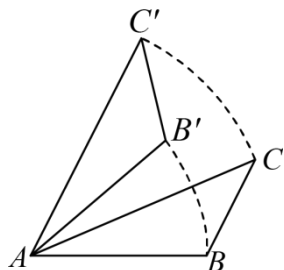
- (1) 如图 1, 若 $\angle C = 60^\circ$, 点 D 关于直线 AB 的对称点为点 E , 连结 AE, DE , 则 $\angle BDE =$ _____;
- (2) 若 $\angle C = 60^\circ$, 将线段 AD 绕点 A 顺时针旋转 60° 得到线段 AE , 连结 BE .
 - ① 在图 2 中补全图形;
 - ② 探究 CD 与 BE 的数量关系, 并证明;
- (3) 如图 3, 若 $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DE} = k$, 且 $\angle ADE = \angle C$, 试探究 BE, BD, AC 之间满足的数量关系, 并证明.

题目 7 (2023·四川乐山·统考中考真题) 在学习完《图形的旋转》后,刘老师带领学生开展了一次数学探究活动

【问题情境】

刘老师先引导学生回顾了华东师大版教材七年级下册第121页“探索”部分内容:

如图,将一个三角形纸板 $\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针旋转 θ 到达 $\triangle AB'C'$ 的位置,那么可以得到: $AB = AB'$, $AC = AC'$, $BC = B'C'$; $\angle BAC = \angle B'AC'$, $\angle ABC = \angle AB'C'$, $\angle ACB = \angle AC'B'$ ()

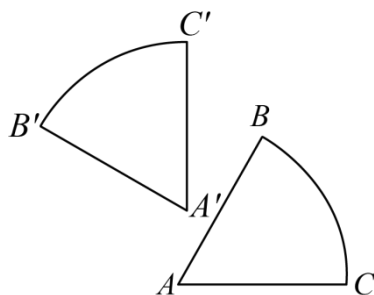


刘老师进一步谈到:图形的旋转蕴含于自然界的运动变化规律中,即“变”中蕴含着“不变”,这是我们解决图形旋转的关键;故数学就是一门哲学.

【问题解决】

(1) 上述问题情境中“()”处应填理由: _____;

(2) 如图,小王将一个半径为4cm,圆心角为 60° 的扇形纸板 ABC 绕点 O 逆时针旋转 90° 到达扇形纸板 $A'B'C'$ 的位置.

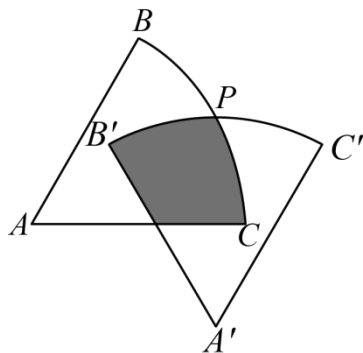


①请在图中作出点 O ;

②如果 $BB' = 6\text{cm}$,则在旋转过程中,点 B 经过的路径长为 _____;

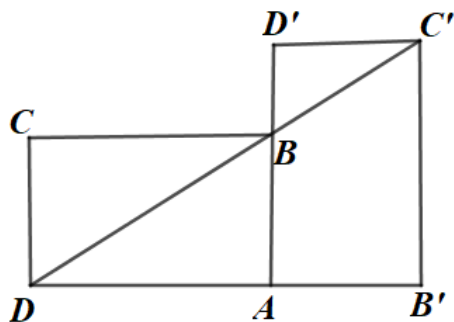
【问题拓展】

小李突发奇想,将与(2)中完全相同的两个扇形纸板重叠,一个固定在墙上,使得一边位于水平位置,另一个在弧的中点处固定,然后放开纸板,使其摆动到竖直位置时静止,此时,两个纸板重叠部分的面积是多少呢?如图所示,请你帮助小李解决这个问题.

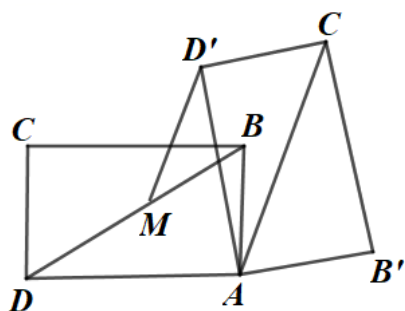


题目 8 (2021·浙江嘉兴市·中考真题) 小王在学习浙教版九上课本第 72 页例 2 后, 进一步开展探究活动: 将一个矩形 $ABCD$ 绕点 A 顺时针旋转 α ($0^\circ < \alpha \leq 90^\circ$), 得到矩形 $AB'C'D'$

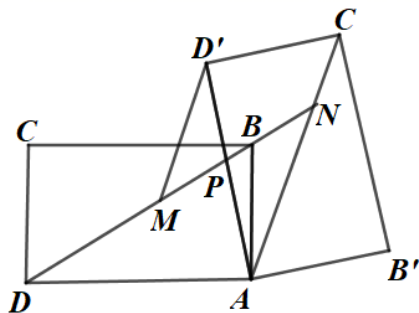
[探究 1] 如图 1, 当 $\alpha = 90^\circ$ 时, 点 C' 恰好在 DB 延长线上. 若 $AB = 1$, 求 BC 的长.



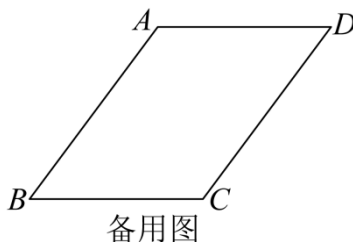
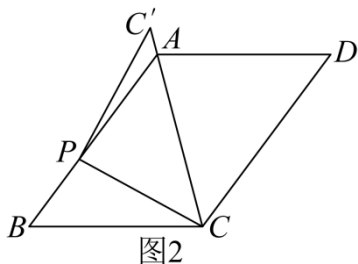
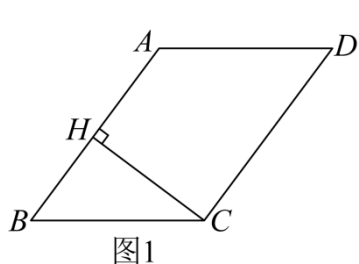
[探究 2] 如图 2, 连结 AC' , 过点 D' 作 $D'M \parallel AC'$ 交 BD 于点 M . 线段 $D'M$ 与 DM 相等吗? 请说明理由.



[探究 3] 在探究 2 的条件下, 射线 DB 分别交 AD' , AC' 于点 P , N (如图 3), MN , PN 存在一定的数量关系, 并加以证明.

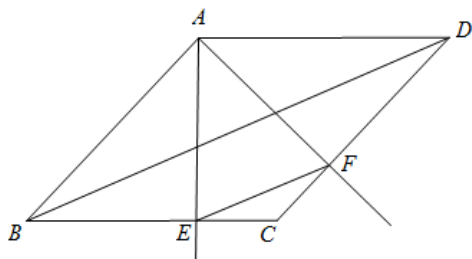


题目 9 (2023·浙江绍兴·统考中考真题) 在平行四边形 $ABCD$ 中 (顶点 A, B, C, D 按逆时针方向排列), $AB = 12, AD = 10, \angle B$ 为锐角, 且 $\sin B = \frac{4}{5}$.



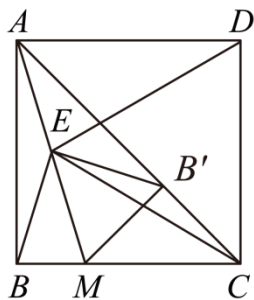
- (1) 如图1, 求 AB 边上的高 CH 的长.
- (2) P 是边 AB 上的一动点, 点 C, D 同时绕点 P 按逆时针方向旋转 90° 得点 C', D' .
 - ① 如图2, 当点 C' 落在射线 CA 上时, 求 BP 的长.
 - ② 当 $\triangle AC'D'$ 是直角三角形时, 求 BP 的长.

题目 10 (2021·浙江中考真题) 如图, 在菱形 $ABCD$ 中, $\angle ABC$ 是锐角, E 是 BC 边上的动点, 将射线 AE 绕点 A 按逆时针方向旋转, 交直线 CD 于点 F .



- (1) 当 $AE \perp BC, \angle EAF = \angle ABC$ 时,
 - ① 求证: $AE = AF$;
 - ② 连结 BD, EF , 若 $\frac{EF}{BD} = \frac{2}{5}$, 求 $\frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\text{菱形} ABCD}}$ 的值;
- (2) 当 $\angle EAF = \frac{1}{2} \angle BAD$ 时, 延长 BC 交射线 AF 于点 M , 延长 DC 交射线 AE 于点 N , 连结 AC, MN , 若 $AB = 4, AC = 2$, 则当 CE 为何值时, $\triangle AMN$ 是等腰三角形.

题目 11 (2023·四川南充·统考中考真题) 如图, 正方形 $ABCD$ 中, 点 M 在边 BC 上, 点 E 是 AM 的中点, 连接 ED, EC .



- (1) 求证: $ED = EC$;
- (2) 将 BE 绕点 E 逆时针旋转, 使点 B 的对应点 B' 落在 AC 上, 连接 MB' . 当点 M 在边 BC 上运动时 (点 M 不与 B, C 重合), 判断 $\triangle CMB'$ 的形状, 并说明理由.
- (3) 在 (2) 的条件下, 已知 $AB = 1$, 当 $\angle DEB' = 45^\circ$ 时, 求 BM 的长.

题目 12 在等腰 $\triangle ABC$ 中, $AC = BC$, $\triangle ADE$ 是直角三角形, $\angle DAE = 90^\circ$, $\angle ADE = \frac{1}{2} \angle ACB$, 连接 BD , BE , 点 F 是 BD 的中点, 连接 CF .

(1) 当 $\angle CAB = 45^\circ$ 时.

①如图 1, 当顶点 D 在边 AC 上时, 请直接写出 $\angle EAB$ 与 $\angle CBA$ 的数量关系是 _____. 线段 BE 与线段 CF 的数量关系是 _____;

②如图 2, 当顶点 D 在边 AB 上时, (1) 中线段 BE 与线段 CF 的数量关系是否仍然成立? 若成立, 请给予证明, 若不成立, 请说明理由;

学生经过讨论, 探究出以下解决问题的思路, 仅供大家参考:

思路一: 作等腰 $\triangle ABC$ 底边上的高 CM , 并取 BE 的中点 N , 再利用三角形全等或相似有关知识来解决问题;

思路二: 取 DE 的中点 G , 连接 AG, CG , 并把 $\triangle CAG$ 绕点 C 逆时针旋转 90° , 再利用旋转性质、三角形全等或相似有关知识来解快问题.

(2) 当 $\angle CAB = 30^\circ$ 时, 如图 3, 当顶点 D 在边 AC 上时, 写出线段 BE 与线段 CF 的数量关系, 并说明理由.

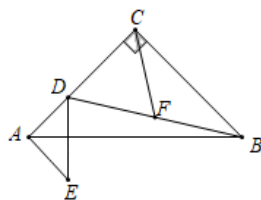


图1

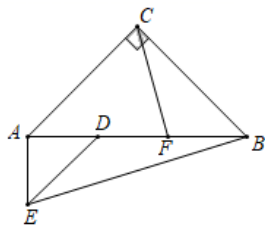


图2

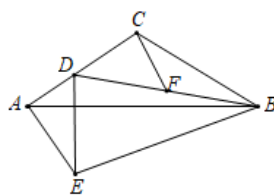


图3

题目 13 (2023·江苏扬州·统考中考真题)【问题情境】

在综合实践活动课上,李老师让同桌两位同学用相同的两块含 30° 的三角板开展数学探究活动,两块三角板分别记作 $\triangle ADB$ 和 $\triangle A'D'C$, $\angle ADB = \angle A'D'C = 90^\circ$, $\angle B = \angle C = 30^\circ$, 设 $AB = 2$.

【操作探究】

如图1,先将 $\triangle ADB$ 和 $\triangle A'D'C$ 的边 AD 、 $A'D'$ 重合,再将 $\triangle A'D'C$ 绕着点 A 按顺时针方向旋转,旋转角为 α ($0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$), 旋转过程中 $\triangle ADB$ 保持不动, 连接 BC .

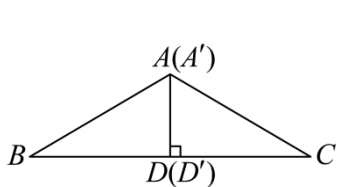


图1

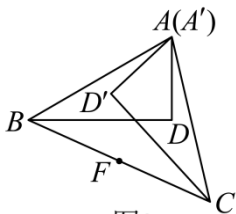
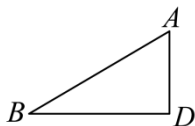


图2

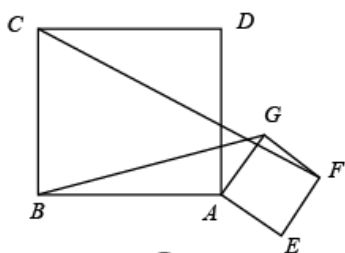


备用图

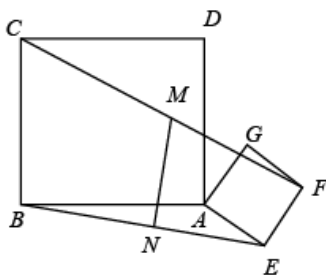
- (1) 当 $\alpha = 60^\circ$ 时, $BC =$ _____; 当 $BC = 2\sqrt{2}$ 时, $\alpha =$ _____ $^\circ$;
- (2) 当 $\alpha = 90^\circ$ 时, 画出图形, 并求两块三角板重叠部分图形的面积;
- (3) 如图2, 取 BC 的中点 F , 将 $\triangle A'D'C$ 绕着点 A 旋转一周, 点 F 的运动路径长为 _____.

题目 14 (2021·江苏中考真题) 已知正方形 $ABCD$ 与正方形 $AEFG$, 正方形 $AEFG$ 绕点 A 旋转一周.

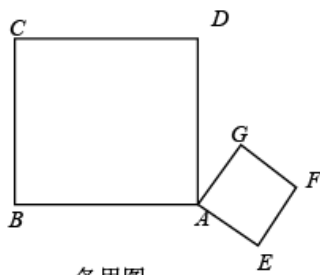
- (1) 如图①, 连接 BG 、 CF , 求 $\frac{CF}{BG}$ 的值;
- (2) 当正方形 $AEFG$ 旋转至图②位置时, 连接 CF 、 BE , 分别取 CF 、 BE 的中点 M 、 N , 连接 MN 、试探究: MN 与 BE 的关系, 并说明理由;
- (3) 连接 BE 、 BF , 分别取 BE 、 BF 的中点 N 、 Q , 连接 QN , $AE = 6$, 请直接写出线段 QN 扫过的面积.



图①



图②



备用图

题目 15 (2023·湖南·统考中考真题)(1)[问题探究]

如图1,在正方形 $ABCD$ 中,对角线 AC 、 BD 相交于点 O . 在线段 AO 上任取一点 P (端点除外),连接 PD 、 PB .

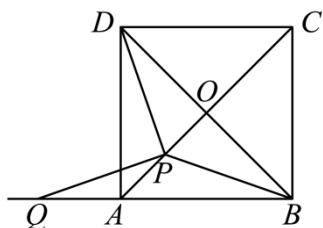


图1

- ①求证: $PD = PB$;
- ②将线段 DP 绕点 P 逆时针旋转,使点 D 落在 BA 的延长线上的点 Q 处. 当点 P 在线段 AO 上的位置发生变化时, $\angle DPQ$ 的大小是否发生变化? 请说明理由;
- ③探究 AQ 与 OP 的数量关系,并说明理由.

(2)[迁移探究]

如图2,将正方形 $ABCD$ 换成菱形 $ABCD$,且 $\angle ABC = 60^\circ$,其他条件不变. 试探究 AQ 与 CP 的数量关系,并说明理由.

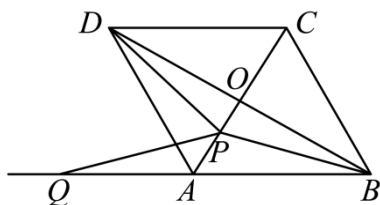
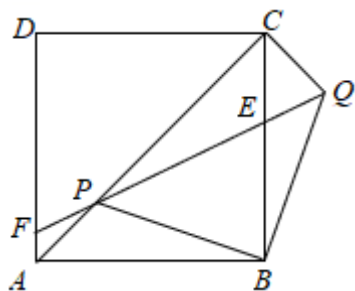


图2

题目 16 如图,正方形 $ABCD$ 中, P 是对角线 AC 上的一个动点(不与 A 、 C 重合),连结 BP ,将 BP 绕点 B 顺时针旋转 90° 到 BQ ,连结 QP 交 BC 于点 E , QP 延长线与边 AD 交于点 F .

- (1) 连结 CQ ,求证: $AP = CQ$;
- (2) 若 $AP = \frac{1}{4}AC$,求 $CE:BC$ 的值;
- (3) 求证: $PF = EQ$.

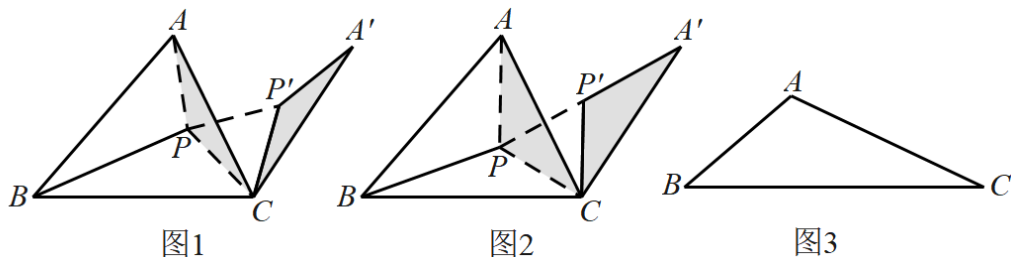


题目 17 (2023·湖北随州·统考中考真题)1643年,法国数学家费马曾提出一个著名的几何问题:给定不在同一条直线上的三个点 A, B, C , 求平面上到这三个点的距离之和最小的点的位置, 意大利数学家和物理学家托里拆利给出了分析和证明, 该点也被称为“费马点”或“托里拆利点”, 该问题也被称为“将军巡营”问题.

(1) 下面是该问题的一种常见的解决方法, 请补充以下推理过程: (其中①处从“直角”和“等边”中选择填空, ②处从“两点之间线段最短”和“三角形两边之和大于第三边”中选择填空, ③处填写角度数, ④处填写该三角形的某个顶点)

当 $\triangle ABC$ 的三个内角均小于 120° 时,

如图1, 将 $\triangle APC$ 绕点 C 顺时针旋转 60° 得到 $\triangle A'P'C$, 连接 PP' ,

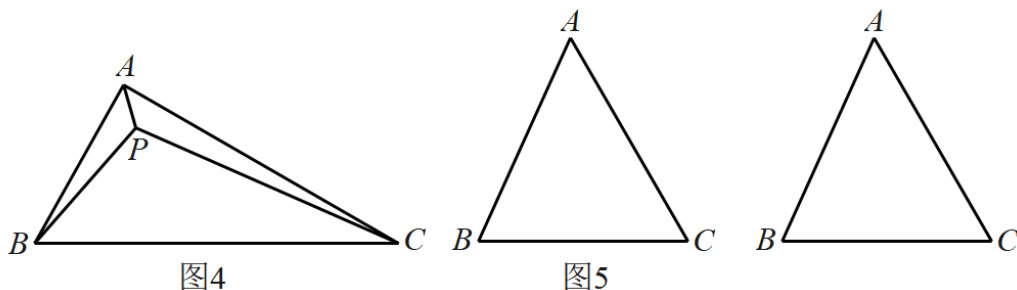


由 $PC = P'C$, $\angle PCP' = 60^\circ$, 可知 $\triangle PCP'$ 为 _____ 三角形, 故 $PP' = PC$, 又 $P'A' = PA$, 故 $PA + PB + PC = PA' + PB + PP' \geq A'B$,

由 _____ 可知, 当 B, P, P', A 在同一条直线上时, $PA + PB + PC$ 取最小值, 如图2, 最小值为 $A'B$, 此时的 P 点为该三角形的“费马点”, 且有 $\angle APC = \angle BPC = \angle APB =$ _____;

已知当 $\triangle ABC$ 有一个内角大于或等于 120° 时, “费马点”为该三角形的某个顶点. 如图3, 若 $\angle BAC \geq 120^\circ$, 则该三角形的“费马点”为 _____ 点.

(2) 如图4, 在 $\triangle ABC$ 中, 三个内角均小于 120° , 且 $AC = 3$, $BC = 4$, $\angle ACB = 30^\circ$, 已知点 P 为 $\triangle ABC$ 的“费马点”, 求 $PA + PB + PC$ 的值;



(3) 如图5, 设村庄 A, B, C 的连线构成一个三角形, 且已知 $AC = 4\text{km}$, $BC = 2\sqrt{3}\text{km}$, $\angle ACB = 60^\circ$. 现欲建一中转站 P 沿直线向 A, B, C 三个村庄铺设电缆, 已知由中转站 P 到村庄 A, B, C 的铺设成本分别为 a 元/km, a 元/km, $\sqrt{2}a$ 元/km, 选取合适的 P 的位置, 可以使总的铺设成本最低为 _____ 元. (结果用含 a 的式子表示)

题目 18 如图1,在等腰直角三角形 ADC 中, $\angle ADC = 90^\circ$, $AD = 4$. 点 E 是 AD 的中点,以 DE 为边作正方形 $DEFG$,连接 AG , CE . 将正方形 $DEFG$ 绕点 D 顺时针旋转,旋转角为 α ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$).

(1) 如图2,在旋转过程中,

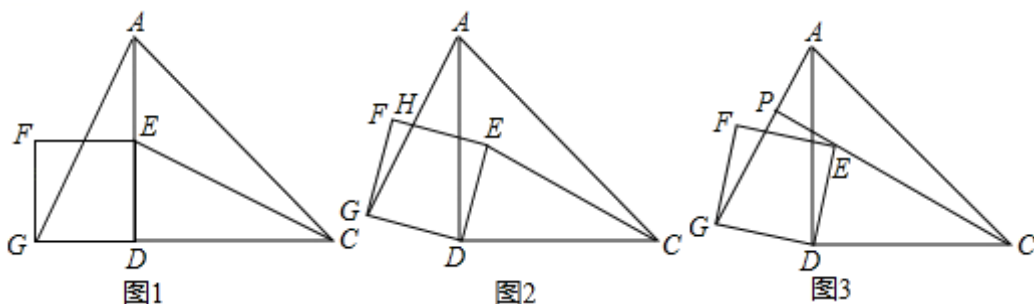
①判断 $\triangle AGD$ 与 $\triangle CED$ 是否全等,并说明理由;

②当 $CE = CD$ 时, AG 与 EF 交于点 H ,求 GH 的长.

(2) 如图3,延长 CE 交直线 AG 于点 P .

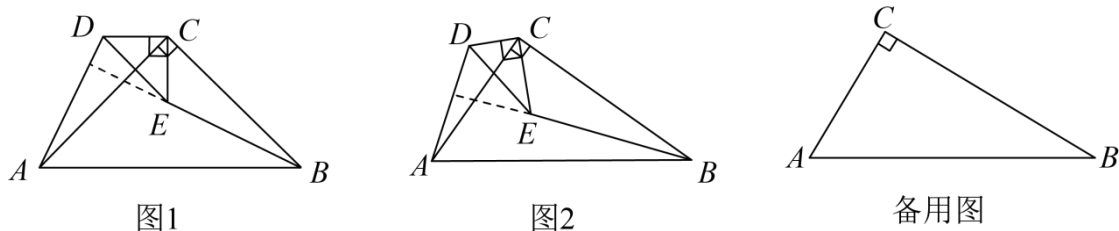
①求证: $AG \perp CP$;

②在旋转过程中,线段 PC 的长度是否存在最大值? 若存在,求出最大值;若不存在,请说明理由.



题目 19 (2023·湖北黄冈·统考中考真题)【问题呈现】

$\triangle CAB$ 和 $\triangle CDE$ 都是直角三角形, $\angle ACB = \angle DCE = 90^\circ$, $CB = mCA$, $CE = mCD$, 连接 AD , BE , 探究 AD , BE 的位置关系.



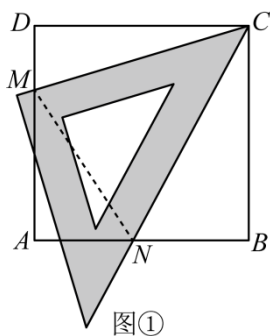
(1) 如图1,当 $m = 1$ 时,直接写出 AD , BE 的位置关系: _____;

(2) 如图2,当 $m \neq 1$ 时,(1)中的结论是否成立? 若成立,给出证明;若不成立,说明理由.

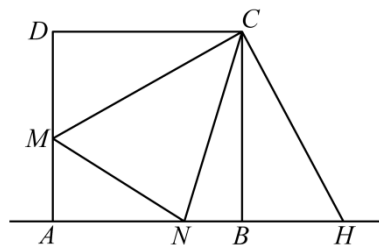
【拓展应用】

(3) 当 $m = \sqrt{3}$, $AB = 4\sqrt{7}$, $DE = 4$ 时,将 $\triangle CDE$ 绕点 C 旋转,使 A, D, E 三点恰好在同一直线上,求 BE 的长.

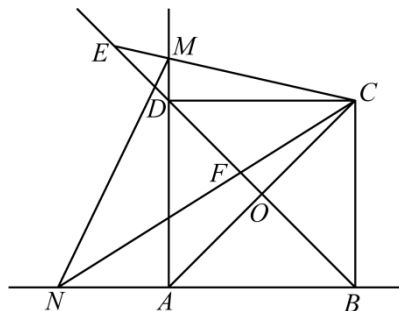
题目 20 (2023·内蒙古赤峰·统考中考真题) 数学兴趣小组探究了以下几何图形. 如图①, 把一个含有 45° 角的三角尺放在正方形 $ABCD$ 中, 使 45° 角的顶点始终与正方形的顶点 C 重合, 绕点 C 旋转三角尺时, 45° 角的两边 CM, CN 始终与正方形的边 AD, AB 所在直线分别相交于点 M, N , 连接 MN , 可得 $\triangle CMN$.



图①



图②



图③

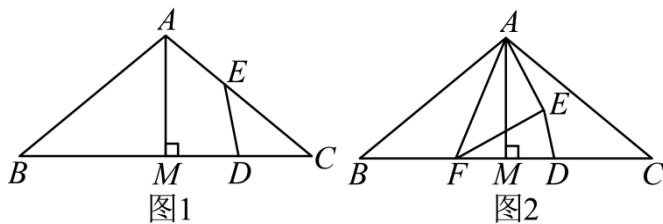
【探究一】如图②, 把 $\triangle CDM$ 绕点 C 逆时针旋转 90° 得到 $\triangle CBH$, 同时得到点 H 在直线 AB 上. 求证: $\angle CNM = \angle CNH$;

【探究二】在图②中, 连接 BD , 分别交 CM, CN 于点 E, F . 求证: $\triangle CEF \sim \triangle CNM$;

【探究三】把三角尺旋转到如图③所示位置, 直线 BD 与三角尺 45° 角两边 CM, CN 分别交于点 E, F . 连接 AC 交 BD 于点 O , 求 $\frac{EF}{NM}$ 的值.

与旋转有关的探究题(专题训练)

题目 1 (2023·北京·统考中考真题) 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = \angle C = \alpha$ ($0^\circ < \alpha < 45^\circ$), $AM \perp BC$ 于点 M , D 是线段 MC 上的动点 (不与点 M, C 重合), 将线段 DM 绕点 D 顺时针旋转 2α 得到线段 DE .



- (1) 如图 1, 当点 E 在线段 AC 上时, 求证: D 是 MC 的中点;
 (2) 如图 2, 若在线段 BM 上存在点 F (不与点 B, M 重合) 满足 $DF = DC$, 连接 AE, EF , 直接写出 $\angle AEF$ 的大小, 并证明.

【答案】(1) 见解析

(2) $\angle AEF = 90^\circ$, 证明见解析

【分析】(1) 由旋转的性质得 $DM = DE$, $\angle MDE = 2\alpha$, 利用三角形外角的性质求出 $\angle DEC = \alpha = \angle C$, 可得 $DE = DC$, 等量代换得到 $DM = DC$ 即可;

(2) 延长 FE 到 H 使 $FE = EH$, 连接 CH, AH , 可得 DE 是 $\triangle FCH$ 的中位线, 然后求出 $\angle B = \angle ACH$, 设 $DM = DE = m$, $CD = n$, 求出 $BF = 2m = CH$, 证明 $\triangle ABF \cong \triangle ACH$ (SAS), 得到 $AF = AH$, 再根据等腰三角形三线合一证明 $AE \perp FH$ 即可.

【详解】(1) 证明: 由旋转的性质得: $DM = DE$, $\angle MDE = 2\alpha$,

$$\because \angle C = \alpha,$$

$$\therefore \angle DEC = \angle MDE - \angle C = \alpha,$$

$$\therefore \angle C = \angle DEC,$$

$$\therefore DE = DC,$$

$$\therefore DM = DC, \text{ 即 } D \text{ 是 } MC \text{ 的中点};$$

$$(2) \angle AEF = 90^\circ;$$

证明: 如图 2, 延长 FE 到 H 使 $FE = EH$, 连接 CH, AH ,

$$\because DF = DC,$$

$$\therefore DE \text{ 是 } \triangle FCH \text{ 的中位线},$$

$$\therefore DE \parallel CH, CH = 2DE,$$

由旋转的性质得: $DM = DE$, $\angle MDE = 2\alpha$,

$$\therefore \angle FCH = 2\alpha,$$

$$\because \angle B = \angle C = \alpha,$$

$$\therefore \angle ACH = \alpha, \triangle ABC \text{ 是等腰三角形},$$

$$\therefore \angle B = \angle ACH, AB = AC,$$

设 $DM = DE = m$, $CD = n$, 则 $CH = 2m$, $CM = m + n$,

$$\therefore DF = CD = n,$$

$$\therefore FM = DF - DM = n - m,$$

$$\because AM \perp BC,$$

$$\therefore BM = CM = m + n,$$

$$\therefore BF = BM - FM = m + n - (n - m) = 2m,$$

$$\therefore CH = BF,$$

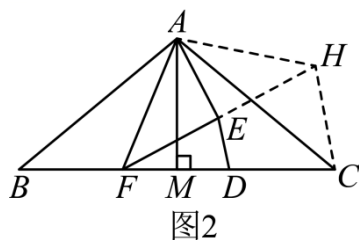


图2

在 $\triangle ABF$ 和 $\triangle ACH$ 中, $\begin{cases} AB=AC \\ \angle B=\angle ACH, \\ BF=CH \end{cases}$

$\therefore \triangle ABF \cong \triangle ACH (SAS)$,

$\therefore AF=AH$,

$\therefore FE=EH$,

$\therefore AE \perp FH$, 即 $\angle AEF=90^\circ$.

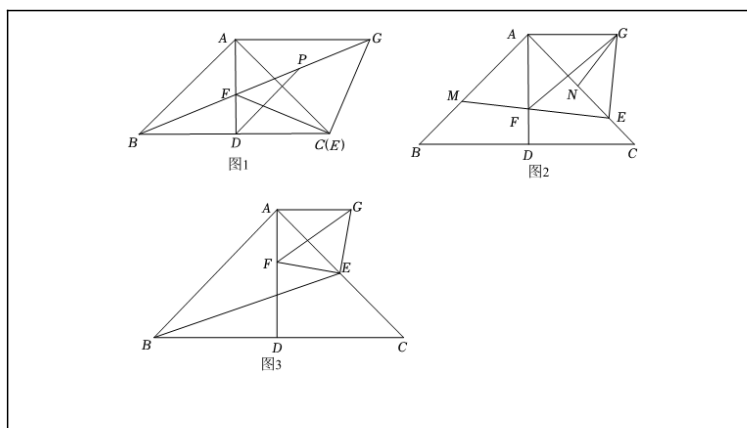
【点睛】本题考查了等腰三角形的判定和性质, 旋转的性质, 三角形外角的性质, 三角形中位线定理以及全等三角形的判定和性质等知识, 作出合适的辅助线, 构造出全等三角形是解题的关键.

题目 2 (2022·重庆市B卷) 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC=90^\circ$, $AB=AC=2\sqrt{2}$, D 为 BC 的中点, E, F 分别为 AC, AD 上任意一点, 连接 EF , 将线段 EF 绕点 E 顺时针旋转 90° 得到线段 EG , 连接 FG, AG .

(1) 如图1, 点 E 与点 C 重合, 且 GF 的延长线过点 B , 若点 P 为 FG 的中点, 连接 PD , 求 PD 的长;

(2) 如图2, EF 的延长线交 AB 于点 M , 点 N 在 AC 上, $\angle AGN=\angle AEG$ 且 $GN=MF$, 求证: $AM+AF=\sqrt{2}AE$;

(3) 如图3, F 为线段 AD 上一动点, E 为 AC 的中点, 连接 BE , H 为直线 BC 上一动点, 连接 EH , 将 $\triangle BEH$ 沿 EH 翻折至 $\triangle ABC$ 所在平面内, 得到 $\triangle B'EH$, 连接 $B'G$, 直接写出线段 $B'G$ 的长度的最小值.



【答案】(1) 解: 如图1, 连接 CP ,

由旋转知, $CF=CG$, $\angle FCG=90^\circ$,

$\therefore \triangle FCG$ 为等腰直角三角形,

$\therefore$ 点 P 是 FG 的中点,

$\therefore CP \perp FG$,

$\therefore$ 点 D 是 BC 的中点,

$\therefore DP = \frac{1}{2}BC$,

在 $Rt\triangle ABC$ 中, $AB=AC=2\sqrt{2}$,

$\therefore BC = \sqrt{2}AB = 4$,

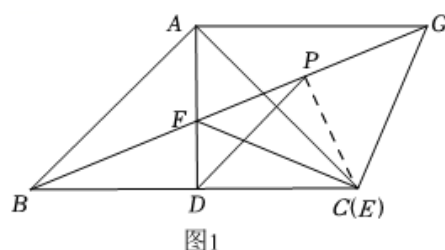
$\therefore DP = 2$;

(2) 证明: 如图2,

过点 E 作 $EH \perp AE$ 交 AD 的延长线于 H ,

$\therefore \angle AEH = 90^\circ$,

由旋转知, $EG=EF$, $\angle FEG=90^\circ$,



$\therefore \angle FEG = \angle AEH$,
 $\therefore \angle AEG = \angle HEF$,
 $\because AB = AC$, 点 D 是 BC 的中点,
 $\therefore \angle BAD = \angle CAD = \frac{1}{2} \angle BAC = 45^\circ$,
 $\therefore \angle H = 90^\circ - \angle CAD = 45^\circ = \angle CAD$,
 $\therefore AE = HE$,
 $\therefore \triangle EGA \cong \triangle EFH (SAS)$,
 $\therefore AG = FH$, $\angle EAG = \angle H = 45^\circ$,
 $\therefore \angle EAG = \angle BAD = 45^\circ$,
 $\therefore \angle AMF = 180^\circ - \angle BAD - \angle AFM = 135^\circ - \angle AFM$,
 $\therefore \angle AFM = \angle EFH$,
 $\therefore \angle AMF = 135^\circ - \angle EFH$,
 $\therefore \angle HEF = 180^\circ - \angle EFH - \angle H = 135^\circ - \angle EFH$,
 $\therefore \angle AMF = \angle HEF$,
 $\therefore \triangle EGA \cong \triangle EFH$,
 $\therefore \angle AEG = \angle HEF$,
 $\therefore \angle AGN = \angle AEG$,
 $\therefore \angle AGN = \angle HEF$,
 $\therefore \angle AGN = \angle AMF$,
 $\therefore GN = MF$,
 $\therefore \triangle AGN \cong \triangle AMF (AAS)$,
 $\therefore AG = AM$,
 $\therefore AG = FH$,
 $\therefore AM = FH$,
 $\therefore AF + AM = AF + FH = AH = \sqrt{2}AE$;

(3) 解: $\because$ 点 E 是 AC 的中点,

$$\therefore AE = \frac{1}{2} AC = \sqrt{2},$$

根据勾股定理得, $BE = \sqrt{AE^2 + AB^2} = \sqrt{10}$,

由折叠直, $BE = B'E = \sqrt{10}$,

$\therefore$ 点 B' 是以点 E 为圆心, $\sqrt{10}$ 为半径的圆上,

由旋转知, $EF = EG$,

$\therefore$ 点 G 是以点 E 为圆心, EG 为半径的圆上,

$\therefore B'G$ 的最小值为 $B'E - EG$,

要 $B'G$ 最小, 则 EG 最大, 即 EF 最大,

$\because$ 点 F 在 AD 上,

$\therefore$ 点在点 A 或点 D 时, EF 最大, 最大值为 $\sqrt{2}$,

$\therefore$ 线段 $B'G$ 的长度的最小值 $\sqrt{10} - \sqrt{2}$.

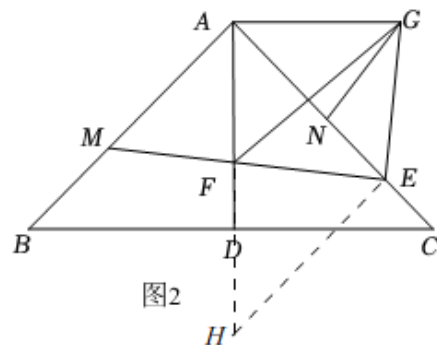


图2

题目 3 (2023·四川自贡·统考中考真题) 如图1, 一大一小两个等腰直角三角形叠放在一起, M , N 分别是斜边 DE , AB 的中点, $DE = 2$, $AB = 4$.

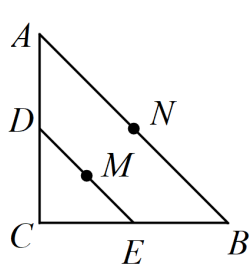


图1

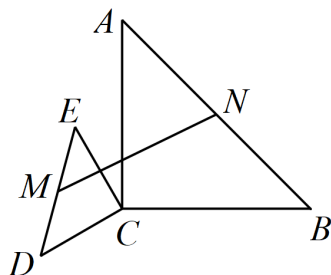


图2

(1) 将 $\triangle CDE$ 绕顶点 C 旋转一周, 请直接写出点 M, N 距离的最大值和最小值;

(2) 将 $\triangle CDE$ 绕顶点 C 逆时针旋转 120° (如图 2), 求 MN 的长.

【答案】(1) 最大值为 3, 最小值为 1

(2) $\sqrt{7}$

【分析】(1) 根据直角三角形斜边上的中线, 得出 CM, CN 的值, 进而根据题意求得最大值与最小值即可求解;

(2) 过点 N 作 $NP \perp MC$, 交 MC 的延长线于点 P , 根据旋转的性质求得 $\angle MCN = 120^\circ$, 进而得出 $\angle NCP = 60^\circ$, 进而可得 $CP = 1$, 勾股定理求 $Rt\triangle NCP, Rt\triangle MCP$, 即可求解.

【详解】(1) 解: 依题意, $CM = \frac{1}{2}DE = 1, CN = \frac{1}{2}AB = 2$,

当 M 在 NC 的延长线上时, M, N 的距离最大, 最大值为 $CM + CN = 1 + 2 = 3$,

当 M 在线段 CN 上时, M, N 的距离最小, 最小值为 $CN - CM = 2 - 1 = 1$;

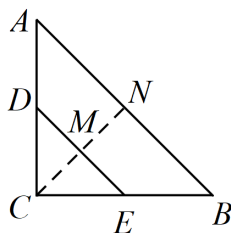
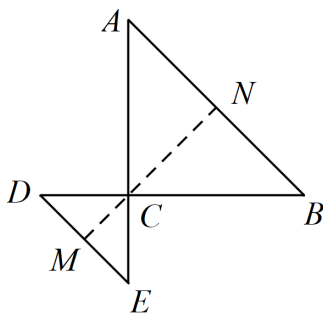


图1



(2) 解: 如图所示, 过点 N 作 $NP \perp MC$, 交 MC 的延长线于点 P ,

$\because \triangle CDE$ 绕顶点 C 逆时针旋转 120° ,

$\therefore \angle BCE = 120^\circ$,

$\therefore \angle BCN = \angle ECM = 45^\circ$,

$\therefore \angle MCN = \angle BCM - \angle ECM = \angle BCE = 120^\circ$,

$\therefore \angle NCP = 60^\circ$,

$\therefore \angle CNP = 30^\circ$,

$\therefore CP = \frac{1}{2}CN = 1$,

在 $Rt\triangle CNP$ 中, $NP = \sqrt{NC^2 - CP^2} = \sqrt{3}$,

在 $Rt\triangle MNP$ 中, $MP = MC + CP = 1 + 1 = 2$,

$\therefore MN = \sqrt{NP^2 + MP^2} = \sqrt{3 + 4} = \sqrt{7}$.

【点睛】本题考查了直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半, 勾股定理, 旋转的性质, 含 30° 度角的直角三角形的性质, 熟练掌握旋转的性质, 勾股定理是解题的关键.

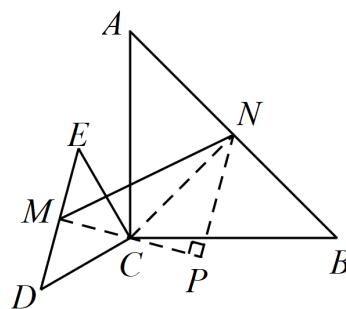


图2

【题目】4 (湖南省郴州市 2021 年中考数学试卷) 如图 1, 在等腰直角三角形 ABC 中, $\angle BAC = 90^\circ$. 点 E, F 分

别为 AB, AC 的中点, H 为线段 EF 上一动点 (不与点 E, F 重合), 将线段 AH 绕点 A 逆时针方向旋转 90° 得到 AG , 连接 GC, HB .

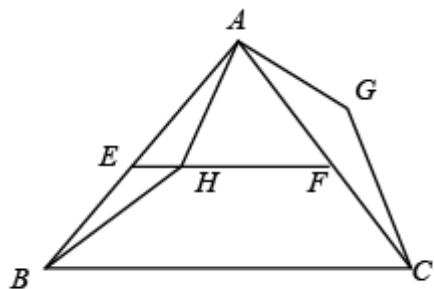


图1

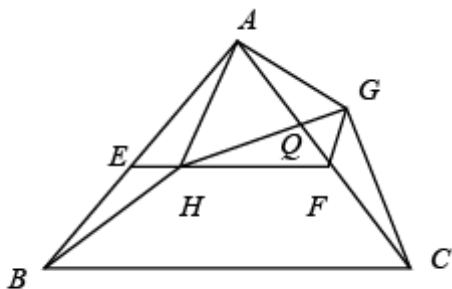


图2

(1) 证明: $\triangle AHB \cong \triangle AGC$;

(2) 如图2, 连接 GF, HC , AF 交 HC 于点 Q .

①证明: 在点 H 的运动过程中, 总有 $\angle HFG = 90^\circ$;

②若 $AB = AC = 4$, 当 EH 的长度为多少时, $\triangle AQG$ 为等腰三角形?

【答案】(1) 见详解; (2) ①见详解; ②当 EH 的长度为 2 或 $\sqrt{2}$ 时, $\triangle AQG$ 为等腰三角形

【分析】

(1) 由旋转的性质得 $AH = AG$, $\angle HAG = 90^\circ$, 从而得 $\angle BAH = \angle CAG$, 进而即可得到结论;

(2) ①由 $\triangle AHB \cong \triangle AGC$, 得 $AH = AG$, 再证明 $\triangle AEH \cong \triangle AFG$, 进而即可得到结论; ② $\triangle AQG$ 为等腰三角形, 分 3 种情况: (a) 当 $\angle QAG = \angle QGA = 45^\circ$ 时, (b) 当 $\angle GAQ = \angle GQA = 67.5^\circ$ 时, (c) 当 $\angle AQG = \angle AGQ = 45^\circ$ 时, 分别画出图形求解, 即可.

【详解】

解: (1) $\because$ 线段 AH 绕点 A 逆时针方向旋转 90° 得到 AG ,

$\therefore AH = AG$, $\angle HAG = 90^\circ$,

$\because$ 在等腰直角三角形 ABC 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = AC$,

$\therefore \angle BAH = 90^\circ - \angle CAH = \angle CAG$,

$\therefore \triangle AHB \cong \triangle AGC$;

(2) ① $\because$ 在等腰直角三角形 ABC 中, $AB = AC$, 点 E, F 分别为 AB, AC 的中点,

$\therefore AE = AF$, $\triangle AEF$ 是等腰直角三角形,

$\because AH = AG$, $\angle BAH = \angle CAG$,

$\therefore \triangle AEH \cong \triangle AFG$,

$\therefore \angle AEH = \angle AFG = 45^\circ$,

$\therefore \angle HFG = \angle AFG + \angle AFE = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$, 即: $\angle HFG = 90^\circ$;

② $\because AB = AC = 4$, 点 E, F 分别为 AB, AC 的中点,

$\therefore AE = AF = 2$,

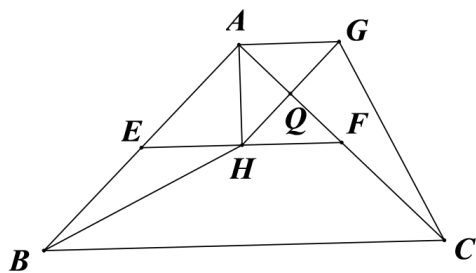
$\because \angle AGH = 45^\circ$, $\triangle AQG$ 为等腰三角形, 分 3 种情况:

(a) 当 $\angle QAG = \angle QGA = 45^\circ$ 时, 如图, 则 $\angle HAF = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$,

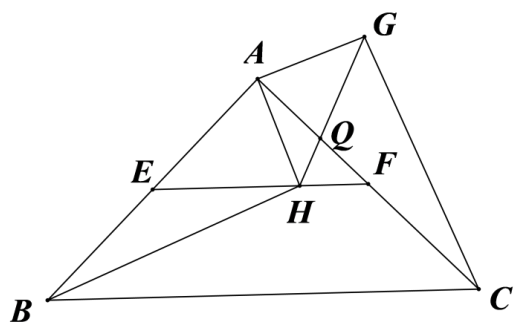
$\therefore AH$ 平分 $\angle EAF$,

$\therefore$ 点 H 是 EF 的中点,

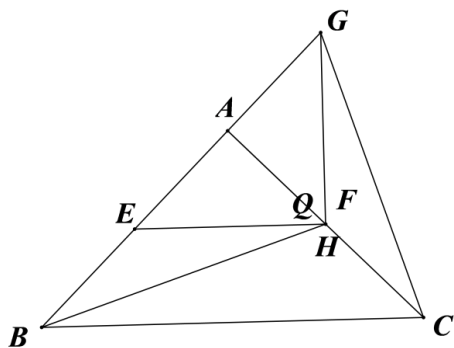
$\therefore EH = \frac{1}{2} \sqrt{AE^2 + AF^2} = \frac{1}{2} \times \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{2}$;



(b) 当 $\angle GAQ = \angle GQA = (180^\circ - 45^\circ) \div 2 = 67.5^\circ$ 时, 如图, 则 $\angle EAH = \angle GAQ = 67.5^\circ$,
 $\therefore \angle EHA = 180^\circ - 45^\circ - 67.5^\circ = 67.5^\circ$,
 $\therefore \angle EHA = \angle EAH$,
 $\therefore EH = EA = 2$;



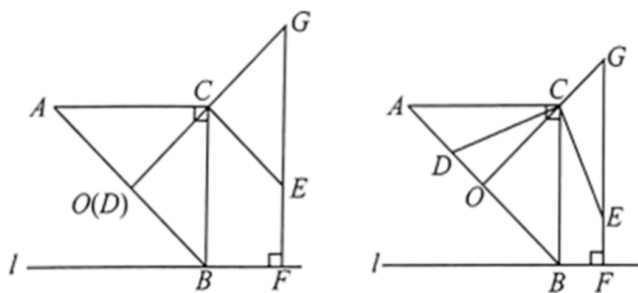
(c) 当 $\angle AQG = \angle AGQ = 45^\circ$ 时, 点 H 与点 F 重合, 不符合题意, 舍去,
 综上所述: 当 EH 的长度为 2 或 $\sqrt{2}$ 时, $\triangle AQG$ 为等腰三角形.



【点睛】

本题主要考查等腰直角三角形的性质, 旋转的性质, 全等三角形的判定和性质, 勾股定理, 熟练掌握全等三角形的判定定理, 根据题意画出图形, 进行分类讨论, 是解题的关键.

题目 5 (2023·辽宁·统考中考真题) 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $CA = CB$, 点 O 为 AB 的中点, 点 D 在直线 AB 上 (不与点 A, B 重合), 连接 CD , 线段 CD 绕点 C 逆时针旋转 90° , 得到线段 CE , 过点 B 作直线 $l \perp BC$, 过点 E 作 $EF \perp l$, 垂足为点 F , 直线 EF 交直线 OC 于点 G .



- (1) 如图,当点 D 与点 O 重合时,请直接写出线段 AD 与线段 EF 的数量关系;
 (2) 如图,当点 D 在线段 AB 上时,求证: $CG + BD = \sqrt{2}BC$;
 (3) 连接 DE , $\triangle CDE$ 的面积记为 S_1 , $\triangle ABC$ 的面积记为 S_2 ,当 $EF:BC = 1:3$ 时,请直接写出 $\frac{S_1}{S_2}$ 的值.

【答案】(1) $EF = \frac{\sqrt{2}}{2}AD$

(2) 见解析

(3) $\frac{5}{9}$ 或 $\frac{17}{9}$

【分析】(1) 可先证 $\triangle BCD \cong \triangle BCE$, 得到 $BD = BE$, 根据锐角三角函数, 可得到 BE 和 EF 的数量关系, 进而得到线段 AD 与线段 EF 的数量关系.

(2) 可先证 $\triangle ACD \cong \triangle GEC$, 得到 $DA = CG$, 进而得到 $CG + BD = DA + BD = AB$, 问题即可得证.

(3) 分两种情况: ①点 D 在线段 AB 上, 过点 C 作 CN 垂直于 FG , 交 FG 于点 N , 过点 E 作 EM 垂直于 BC , 交 BC 于点 M , 设 $EF = a$, 利用勾股定理, 可用含 a 的代数式表示 EC , 根据三角形面积公式, 即可得到答案.

②点 D 在线段 BA 的延长线上, 过点 E 作 EJ 垂直于 BC , 交 BC 延长线于点 J , 令 EF 交 AC 于点 I , 连接 BE , 设 $EF = b$, 可证 $\triangle CDA \cong \triangle CEB$, 进一步证得 $\triangle EBJ$ 是等腰直角三角形, $EJ = BJ$, 利用勾股定理, 可用含 b 的代数式表示 EC , 根据三角形面积公式, 即可得到答案

【详解】(1) 解: $EF = \frac{\sqrt{2}}{2}AD$.

理由如下:

如图, 连接 BE .

根据图形旋转的性质可知 $CD = CE$.

由题意可知, $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形,

$\therefore CD$ 为等腰直角三角形 $\triangle ABC$ 斜边 AB 上的中线,

$\therefore \angle BCD = 45^\circ$, $AD = BD$.

又 $\angle DCE = 90^\circ$,

$\therefore \angle BCE = 45^\circ$.

在 $\triangle BCD$ 和 $\triangle BCE$ 中, $\begin{cases} CD = CE \\ \angle BCD = \angle BCE \\ BC = BC \end{cases}$

$\therefore \triangle BCD \cong \triangle BCE$.

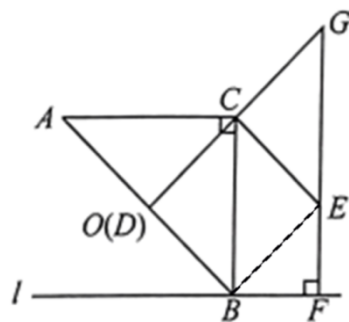
$\therefore BD = BE$, $\angle CBE = \angle CBD = 45^\circ$.

$\therefore \angle EBF = 45^\circ$.

$\therefore EF = BE \cdot \sin \angle EBF = \frac{\sqrt{2}}{2}BE$.

$\therefore EF = \frac{\sqrt{2}}{2}AD$.

(2) 解: $\because CO$ 为等腰直角三角形 $\triangle ABC$ 斜边 AB 上的中线,

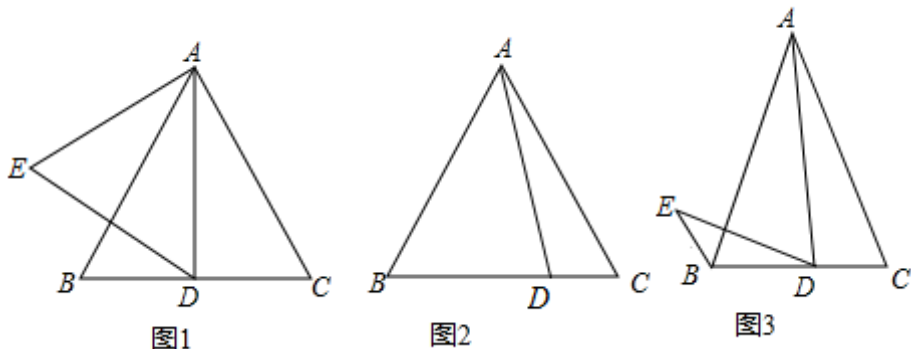


$\triangle CDE$ 的面积 S_1 与 $\triangle ABC$ 的面积 S_2 之比

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2}CE^2}{\frac{1}{2}BC^2} = \frac{\frac{1}{2}(\sqrt{17}b)^2}{\frac{1}{2}(3b)^2} = \frac{17}{9}$$

【点睛】本题主要考查全等三角形的判定及性质、勾股定理以及图形旋转的性质，灵活利用全等三角形的判定及性质是解题的关键。

题目 6 (2021·四川中考真题) 在等腰 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, 点 D 是 BC 边上一点 (不与点 B 、 C 重合), 连结 AD .



- (1) 如图 1, 若 $\angle C=60^\circ$, 点 D 关于直线 AB 的对称点为点 E , 连结 AE , DE , 则 $\angle BDE =$ _____;
 (2) 若 $\angle C=60^\circ$, 将线段 AD 绕点 A 顺时针旋转 60° 得到线段 AE , 连结 BE .
 ①在图 2 中补全图形;
 ②探究 CD 与 BE 的数量关系, 并证明;
 (3) 如图 3, 若 $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DE} = k$, 且 $\angle ADE = \angle C$, 试探究 BE 、 BD 、 AC 之间满足的数量关系, 并证明.

【答案】(1) 30° ; (2) ①见解析; ② $CD=BE$; 见解析; (3) $AC=k(BD+BE)$, 见解析

【分析】

- (1) 先根据题意得出 $\triangle ABC$ 是等边三角形, 再利用三角形的外角计算即可
 (2) ①按要求补全图即可
 ②先根据已知条件证明 $\triangle ABC$ 是等边三角形, 再证明 $\triangle AEB \cong \triangle ADC$, 即可得出 $CD=BE$
 (3) 先证明 $\frac{AC}{AD} = \frac{BC}{DE}$, 再证明 $\triangle ACB \sim \triangle ADE$, 得出 $\angle BAC = \angle EAD$, 从而证明 $\triangle AEB \cong \triangle ADC$, 得出 $BD+BE=BC$, 从而证明 $AC=k(BD+BE)$

【详解】

解: (1) $\because AB=AC, \angle C=60^\circ$

$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形

$\therefore \angle B=60^\circ$

$\because$ 点 D 关于直线 AB 的对称点为点 E

$\therefore AB \perp DE$,

$\therefore \angle BDE=30^\circ$

故答案为: 30° ;

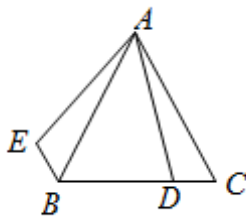
(2) ①补全图如图 2 所示;

② CD 与 BE 的数量关系为: $CD=BE$;

证明: $\because AB=AC, \angle BAC=60^\circ$.

$\therefore \triangle ABC$ 为正三角形,

又 $\because AD$ 绕点 A 顺时针旋转 60° ,



$\therefore AD = AE, \angle EAD = 60^\circ,$
 $\therefore \angle BAD + \angle DAC = 60^\circ, \angle BAD + \angle BAE = 60^\circ,$
 $\therefore \angle BAE = \angle DAC,$
 $\therefore \triangle AEB \cong \triangle ADC,$
 $\therefore CD = BE.$

(3) 连接 AE .

$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DE} = k, AB = AC, \therefore \frac{AC}{BC} = \frac{AD}{DE}.$

$\therefore \frac{AC}{AD} = \frac{BC}{DE}.$

又 $\therefore \angle ADE = \angle C,$

$\therefore \triangle ACB \sim \triangle ADE,$

$\therefore \angle BAC = \angle EAD. \therefore AB = AC, \therefore AE = AD,$

$\therefore \angle BAD + \angle DAC = \angle BAD + \angle BAE,$

$\therefore \angle DAC = \angle BAE,$

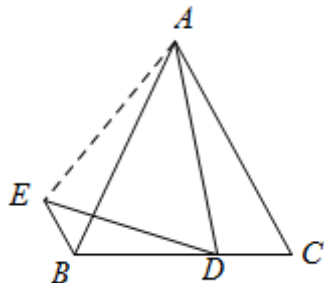
$\therefore \triangle AEB \cong \triangle ADC, CD = BE.$

$\therefore BD + DC = BC,$

$\therefore BD + BE = BC.$

又 $\therefore \frac{AC}{BC} = k,$

$\therefore AC = k(BD + BE).$



【点睛】

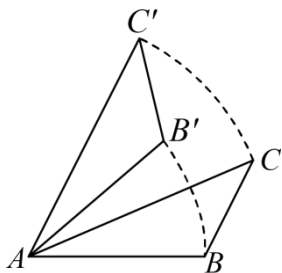
本题考查相似三角形的证明及性质、全等三角形的证明及性质、三角形的外角、轴对称,熟练进行角的转换是解题的关键,相似三角形的证明是重点

题目 7 (2023·四川乐山·统考中考真题) 在学习完《图形的旋转》后,刘老师带领学生开展了一次数学探究活动

【问题情境】

刘老师先引导学生回顾了华东师大版教材七年级下册第121页“探索”部分内容:

如图,将一个三角形纸板 $\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针旋转 θ 到达 $\triangle AB'C'$ 的位置,那么可以得到: $AB = AB', AC = AC', BC = B'C'; \angle BAC = \angle B'AC', \angle ABC = \angle AB'C', \angle ACB = \angle AC'B'$ ()

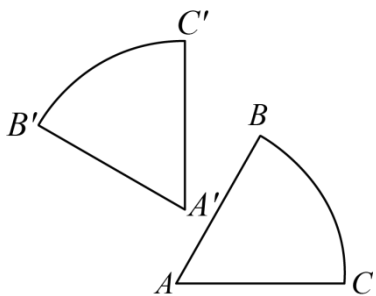


刘老师进一步谈到:图形的旋转蕴含于自然界的运动变化规律中,即“变”中蕴含着“不变”,这是我们解决图形旋转的关键;故数学就是一门哲学.

【问题解决】

(1) 上述问题情境中“()”处应填理由: _____;

(2) 如图,小王将一个半径为4cm,圆心角为 60° 的扇形纸板 ABC 绕点 O 逆时针旋转 90° 到达扇形纸板 $A'B'C'$ 的位置.

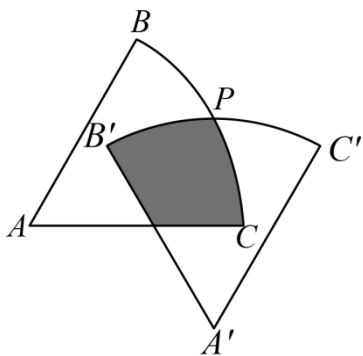


①请在图中作出点 O ;

②如果 $BB' = 6\text{cm}$, 则在旋转过程中, 点 B 经过的路径长为 _____;

【问题拓展】

小李突发奇想, 将与 (2) 中完全相同的两个扇形纸板重叠, 一个固定在墙上, 使得一边位于水平位置, 另一个在弧的中点处固定, 然后放开纸板, 使其摆动到竖直位置时静止, 此时, 两个纸板重叠部分的面积是多少呢? 如图所示, 请你帮助小李解决这个问题.



【答案】问题解决 (1) 旋转前后的图形对应线段相等, 对应角相等

(2) ①见解析; ② $\frac{3\sqrt{2}}{2}\pi\text{cm}$

问题拓展: $(\frac{8}{3}\pi - \frac{8}{3}\sqrt{3})\text{cm}^2$

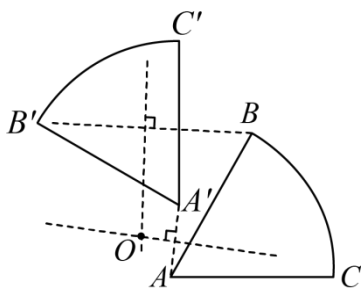
【分析】问题解决 (1) 根据旋转性质得出旋转前后的图形对应线段相等, 对应角相等;

(2) ①分别作 BB' 和 AA' 的垂直平分线, 两垂直平分线的交点即为所求点 O ; ②根据弧长公式求解即可;

问题拓展, 连接 PA' , 交 AC 于 M , 连接 PA , PD , AA' , 由旋转得 $\angle PA'B' = 30^\circ$, $PA = PA' = 4$, 在 $Rt\triangle PAM$ 和 $Rt\triangle A'DM$ 中求出 AM 和 DM 的长, 可以求出 $S_{\text{阴影部分 } B'DP} = S_{\text{扇形 } B'AP} - S_{\triangle ADP}$, 再证明 $\triangle ADP \cong \triangle A'DP$, 即可求出最后结果.

【详解】解: 【问题解决】(1) 旋转前后的图形对应线段相等, 对应角相等

(2) ①下图中, 点 O 为所求



②连接 OB , OB' ,

$\because$ 扇形纸板 ABC 绕点 O 逆时针旋转 90° 到达扇形纸板 $A'B'C'$ 的位置,

$$\therefore \angle BOB' = 90^\circ, OB = OB',$$

$$\therefore BB' = 6\text{cm},$$

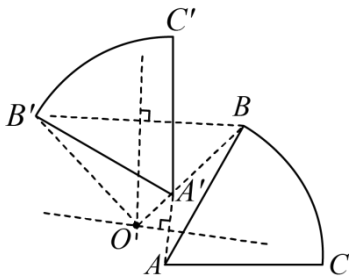
$$\text{设 } OB = OB' = x\text{cm},$$

$$\therefore x^2 + x^2 = 6^2,$$

$$\therefore OB = OB' = 3\sqrt{2}\text{cm},$$

在旋转过程中,点B经过的路径长为以点O为圆心,圆心角为 90° ,OB为半径的所对应的弧长,

$$\therefore \text{点B经过的路径长} = \frac{90 \times \pi \times 3\sqrt{2}}{180} = \frac{3\sqrt{2}}{2}\pi\text{cm};$$



【问题拓展】解:连接 PA' ,交 AC 于 M ,连接 PA, PD, AA' 如图所示

$$\therefore \angle PAC = \frac{1}{2}\angle BAC = 30^\circ.$$

由旋转得 $\angle PA'B' = 30^\circ, PA = PA' = 4$.

在 $Rt\triangle PAM$ 中,

$$AM = PM = PA \cdot \sin \angle PAM = 4 \times \sin 30^\circ = 2.$$

在 $Rt\triangle A'DM$ 中,

$$\therefore \angle DAM = \frac{1}{2}\angle B'A'C' = 30^\circ,$$

$$\therefore A'D = \frac{AM}{\cos \angle DAM} = \frac{2}{\cos 30^\circ} = \frac{4}{3}\sqrt{3},$$

$$DM = \frac{1}{2}A'D = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\sqrt{3} = \frac{2}{3}\sqrt{3}.$$

$$\therefore S_{\triangle A'DP} = \frac{1}{2}DM \cdot A'P = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}\sqrt{3} \times 4 = \frac{4}{3}\sqrt{3}.$$

$$S_{\text{扇形} B'AP} = \frac{30 \times \pi \times 4^2}{360} = \frac{4}{3}\pi.$$

$$\therefore S_{\text{阴影部分} B'DP} = S_{\text{扇形} B'AP} - S_{\triangle A'DP} = \frac{4}{3}\pi - \frac{4}{3}\sqrt{3},$$

在 $\triangle ADP$ 和 $\triangle A'DP$ 中,

$$\therefore AD = AM - DM = 2\sqrt{3} - \frac{2}{3}\sqrt{3} = \frac{4}{3}\sqrt{3} = A'D,$$

$$\text{又} \because \angle PAD = \angle PA'D = 30^\circ, PA = PA',$$

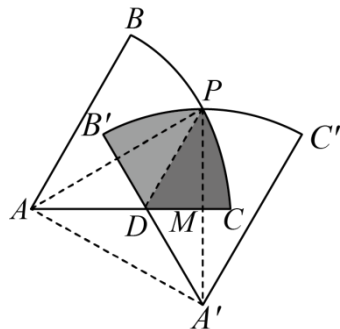
$$\therefore \triangle ADP \cong \triangle A'DP.$$

$$\text{又} \because S_{\text{扇形} PAC} = S_{\text{扇形} B'AP},$$

$$\therefore S_{\text{阴影部分} B'DP} = S_{\text{阴影部分} CDP},$$

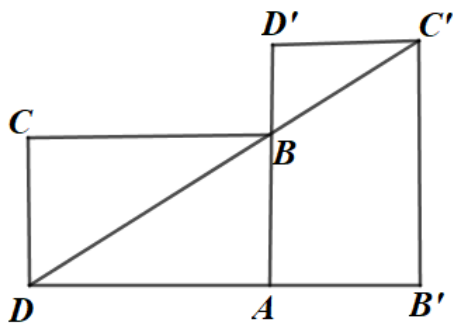
$$\therefore S_{\text{阴影部分}} = 2S_{\text{阴影部分} B'DP} = 2 \times \left(\frac{4}{3}\pi - \frac{4}{3}\sqrt{3} \right) = \left(\frac{8}{3}\pi - \frac{8}{3}\sqrt{3} \right) \text{cm}^2.$$

【点睛】本题考查了旋转的性质,弧长公式,解直角三角形,三角形全等的性质与判定,解题的关键是抓住图形旋转前后的对应边相等,对应角相等,正确作出辅助线构造出直角三角形.

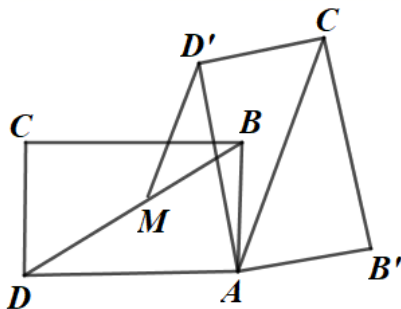


题目 8 (2021·浙江嘉兴市·中考真题) 小王在学习浙教版九上课本第72页例2后,进一步开展探究活动:将一个矩形ABCD绕点A顺时针旋转 α ($0^\circ < \alpha \leq 90^\circ$),得到矩形 $AB'C'D'$

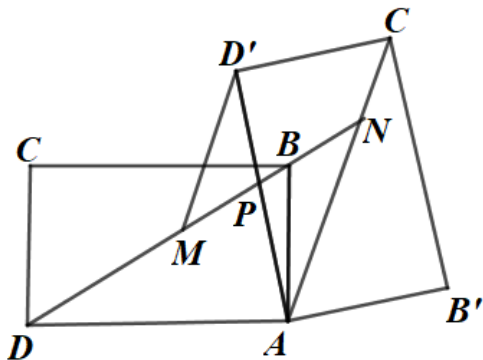
[探究1] 如图1, 当 $\alpha = 90^\circ$ 时, 点 C' 恰好在 DB 延长线上. 若 $AB = 1$, 求 BC 的长.



[探究2] 如图2, 连结 AC' , 过点 D' 作 $D'M \parallel AC'$ 交 BD 于点 M . 线段 $D'M$ 与 DM 相等吗? 请说明理由.



[探究3] 在探究2的条件下, 射线 DB 分别交 AD' , AC' 于点 P , N (如图3), MN , PN 存在一定的数量关系, 并加以证明.



【答案】[探究1] $BC = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$; [探究2] $D'M = DM$, 证明见解析; [探究3] $MN^2 = PN \cdot DN$, 证明见解析

【分析】

[探究1] 设 $BC = x$, 根据旋转和矩形的性质得出 $D'C' \parallel DA$, 从而得出 $\triangle D'C'B \sim \triangle ADB$, 得出比例式 $\frac{D'C'}{AD} = \frac{D'B}{AB}$, 列出方程解方程即可;

[探究2] 先利用 SAS 得出 $\triangle AC'D' \cong \triangle DBA$, 得出 $\angle DAC' = \angle ADB$, $\angle ADB = \angle AD'M$, 再结合已知条件得出 $\angle MDD' = \angle MD'D$, 即可得出 $D'M = DM$;

[探究3] 连结 AM , 先利用 SSS 得出 $\triangle ADM \cong \triangle ADM$, 从而证得 $MN = AN$, 再利用两角对应相等得出 $\triangle NPA \sim \triangle NAD$, 得出 $\frac{PN}{AN} = \frac{AN}{DN}$ 即可得出结论.

【详解】

[探究1] 如图1,

设 $BC = x$.

$\because$ 矩形 $ABCD$ 绕点 A 顺时针旋转 90° 得到矩形 $AB'C'D'$,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/387030150113006112>