对数与对数运算知识点总结与例题讲解

本节知识点

(1) 对数的概念.

(2) 对数式与指数式的互化.

(3) 对数的性质.

(4) 对数的运算性质.

(5) 对数的换底公式.

知识点一对数的概念

一般地，如果 a =N (d>0 且 GHl),那么数 X 叫做以"为底 N 的对数，记作

X = Iog$_{41}$ N.其中"叫做对数的底数,N 叫做真数.

例如,因为 16 二 4,所以] 就是以 16 为底 4 的对数,记作 log$_{16}$4 = -
2 2

对对数概念的理解：

(1) 底数 d 必须满足 d>0 且 a≠ ,

(2) 真数 N 大于 0 (负数和 0 没有对数).

规定底数"> 0 且(心 1 的原因：

当"V 0 时,N 取某些值时，X 的值不存在.

例如,log(.3)9 = 2,但 IOg$_{(一J)}$ 27 却不存在.

当 Q = 0 时：

① 若 N≠0,则 X 的值不存在；

② 若/V = 0,则 A-的值是任意正数.(注意:0 的负指数弄和 0 次胳都没有意义)

当 G = I 时：

① 若 N≠ ,则 X 的值不存在；

② 若 N = I,则 X 的值是任意实数.

所以在对数的定义里,规定底数“ > 0 且 a≠ .

常用对数与自然对数

将以 10 为底的对数叫做常用对数,记作 IgN ;将以无理数 e (ea 2.71828…)为底的

对数叫做自然对数,记作 InN.

根据对数概念,可以求参数的取值范围

例 1.求下列各式中 X 的取值范围.

(1) $IOg_{oS}(X-3)$;　　　　(2) $IOg_{(X\cdot n}(2-x)$.

分析:对数的概念,对底数和真数都作出了规定,要使对数式有意义,必须满足:

(1) 底数。>0 且 a≠ $_{i}$

(2) 真数 / V>0.

解:(1) 题意可知:x-3>0,解之得:x>3.

x 的取值范圉是(3,乜);

(2)由题意可知:« $\begin{cases} x-1>0 \\ {}_{\Lambda}--1 \neq 1 \\ 2-x>0 \end{cases}$,W-之得:1<x<2.

x 的取值范围是(1,2).

例 2.求下列对数式中 X 的取值范围.

(1) IOg2(5 - x);　　(2) 10gz 3.

解:(1)由题意可知:5-x>0,解之得:x<5.

. x 的取值范圉是(-s,5);

(2) 由题意可知:『7>°,解之得:兀<2 且心 1.
2-x ≠ 1
■

x 的取值范围是(-叫 1)U(1,2).

例 3.使 $IOg_{U}(X+1)$ (“> 0 且 a≠)有意义的尤的取值范围是【　　　】

(A) [-1,-к ≈c)　　　　(B) (-1,S

(C) [0,-KX))　　　　(D) (0,-KX))

解:由题意可知:x+1>0,解之得:x>-1.

x 的取值范围是(-1, 1). 选择【B】.

例 4. 求 $IOg_{1A-3>}(4-x)$ 中 X 的取值范围.

解:山题意可知：

x - 3 > 0
< x-3≠1 ,解之得:3vxv4.
4-x>0

x 的取值范围是(3,4)

例 5• 使右 -$\log_2$Cv + 2)有意义的兀的取值范围是 【

(A) [-2,2) (B) [-2,2]

(C) (-2,2) (D) (-2,2]

解:由题意可知:<P^^A 解之得:_2vx<2.
x + 2>0

x 的取值范围是(-2,2).i 择[C].

知识点二指数式与对数式的互化

在 I=N 与 X = IOg “ N 中，gx、N 是同一个代表符号,只是名称不同.

例如,将指数式 2^6 =64 化为对数式为 6 = $\log_2$ 64.

指数式与对数式的比较

	表达形式	名称		
		a	X	N
指数式	a^x =N	底数	指数	S
对数式	X = $\log_a N$	底数	对数	Xft

知识点三对数的性质

(1) 负数和 0 没有对数.

(2)1 的对数等于 α 即 IOgJ = 0 仪>0 且 GH1).

(3) 底数的对数等于亿即 log √ / = 1 (。>0 且 GHI)

(4)对数恒等式 N=N (d>0 且 GH1)

(5) $\log_{Cz}$ U^x = X (4>0 且 0 工 1)

对数的性质不仅可以简化运算• 更盍要的是利用对数的性质可以将任意一个实数转化为对数.

例如,一 2 = InfJ =Iogy = .

例 6.将下列指数式改写成对数式：

(1) 2^4 =16; (2) 2″=⊥
32

解：(1) V 2^4 =16, Λ log J6 = 4;

(2) V 2^{-5} =⊥ 10gr ⊥=一 5
32 32

例 7.将下列对数式改写成指数式：

(1) $Iog_5 125$ = 3; (2) $IOg_{\frac{1}{2}}$ 16 = -4

解：(1) V $Iog_S 125$ =3, Λ 5^3 = 125;

(2) $Tlog_{\frac{1}{2}}$ 16 = -4, Λ (1V — = 16
12 J

点评 指数运算与对数运算互为逆运算,在解题过程中,互相转化是解决相关问题的盍要途径,但一定要记清″,K N在两种形式中的准确位置:指数式 C 广=N ,对数式 X = IOg “ N.

需要说明的是，并不是所有的指数式都可以化为对数式，如$(-2)^4$ = 16 .就不能化为

$IOg_{-2}16$ =4; Γ =1,就不能化为 IOg_1 1 = 2.

例 8.计算下列各式的值：

(1) Iog_5 25 ; (2) $Iog_{\frac{I}{2}}$ 32 ; (3) 3.0β’,° ; (4) lnl; (5) Iog_{2j} 2.5.

解：(1) Iog_5 25 = $Iog_5 5^2$ = 2 ;(对数的性质 $AOg_a a^X$=X)

（2） log, 32 = Iog, (1j =-5;

（3） 3.° a,≠10;(对数恒等式:严 Af=N)

（4） Inl = 0;(对数的性质:1 的对数等于 0)

（5） $log_{2,5}$2.5 = 1.(对数的性质:底数的对数等于 1)

例 9.计算：

(I) IOg9 27 ;（2） IOg 葩 81; （3）Iog_{I} ^- : |（2-√5）.

分析:利用指数式与对数式的互化进行计算.

3 解：(1)设 Iog$_9$ 27 =X$_9$则

2

有 9^{Λ} =27. 3^{2X} =3 2X = 3$_9$X = -

3 . .log$_9$27 = -;

(2)设 Iog$_{ir}$. 81 = X,则有(V5) =81,3“ = 3 ‘，才 X = 4,x = 16.

: IOg$_{i}$_ 81 = 16;

（3）设 IOgAe（2-巧）=.则有（2 +巧）“ =2—VJ = —== 2 + √3

• • log(2+ˆ(2-V5)=j.

例 10.求下列各式中的 x:

(1) Iog$_t$ 27 = |; (2) 4^{Λ} =5×3^{t}.

解：(1) Tog 27j^0 2 =27 J =27》=(3 爭=3? =9;

2

(2) V 4^{τ}=5×3 Λ (Λ/13) ^{L} =5, x = log$_4$5

J

例 1*1.若 4″ =2, lgx = α, 贝 Ib=________.

解：T 4“ =2 匚 2^{2a} =2$_9$2a = 1$_9$a = -.

2

. Igx = Ci, .*. X= 10″ =10, = VFo.

例 12.已知函数 /(x) = log$_2$(λ ^{2} +α),若 /(3)= 1 JI$_I$Jn =___ •

解:• /(3)=1, AIog$_2$(9 + 6/)=1, Λ9 + ˆ = 2,解之得:« = -7.

点评 本题考查对数的性质:底数的对数等于 1,即 IOg$_U$ « = 1 (α>0,且“Hl)

例 13.设 log$_α$ 2 = /π, log$_a$ 3 = H,则 C 严″的值为___.

解：V Iog$_u$ 2 = In, 10g$_e$ 3 = n, /. a″ = 2, Cr =3.

A a$^{2m+π}$ = (U$_H$,)^2 - a^n =2^2×3 = 12.

例 14.求下列各式的值:

(1) $5_{,0fo4}$;　　　　(2) 3″;

ft: (1) $5_{,0fo4}$ =4;(对数恒等式:泸″=N)

(3) $2_{4+10g25}$ =2_4　2_k^5 =16x5 = 80.

知识点四对数的运算性质 如果 α>0_t 且 αHl. M >0,N>0.则有:

(1) IogHMN) = gM+log」;

(2) $Iog_{tf}\frac{M}{-}$ = Iog_u M-Iog^;

(3) Iog $_7$Af'=Hlog $_i$M

其中• 对数的运算性质⑴可推广：10gHMlM2…Mj = I。轧M|+log打M^+…log,,收

常用推论：

(1)IOg_U $\frac{\perp}{M}$=Iogu MT= -IOg $_u$ M ;

(2) IOg √ΛT =Iog M_7 =-log M. P “

例 15 • 证明对数的运算性质:

$$Iog “ (MN) = Iog_l M + IOg_J N (d>0 且_GH1,M>0,N>0)$$

分析:利用指数幕的运算性质,可以证明对数的运算性质　证明：设 Iog M =PjOg N = q,则 M = CrN_y = Cl_g　*　IOg_u(MN) = Iogu(Cl_P　d″)= IOgMr = p + q ,log“ M + $log_{\iota 7}$ TV = p + q.

A IOgj≡) = Iog, Λ/+Iog_u TV .

例 16 • 证明对数的运算性质：

$$log \frac{M}{\quad}= Iog/M-IogjN (α > 0 且 d H 1,M > 0,N > 0) TV , '$$

证明:设 IOg“ M = $PJOg_{tf}$ N = 则 M =a_P,N = CI_q

g-=呃 $_F$=g 一呃MrjN=P-q

/. IOg $_I$ — = IOg M - IOg ” N “ N

例 17.证明对数的运算性质：

IOg $_z$ M, ! = AHOg $_I$ M (a > 0 且 α H 1,M > 0,N > 0)

证明:设 IOg $_{1Z}$ M=X 侧 M = a ^{x}

: IOg “ M″ = IOg@)″ = IOg $_{iz}$ c ι ″ $_x$ =IvCJI IOg “ M = nx

log “M″ =nlog $_{tt}$ M.

对数的运算性质的应用

例 18.化简求值：

(1) 41g2 + 31g5-lg-;

(9) $\frac{\text{lgJ}\Sigma 7 + \text{lg8-31gJI5.}}{\text{lg1.2}}$

2 IOg $_3$ 2-log $_3$ γ + IOg 3 8 - 5 嗓 $_3$;

（2）原式 $=\dfrac{\lg\left(3^3\right)^{\frac{1}{2}}+\lg 2^3-3\lg 10^{\frac{1}{2}}}{\lg\dfrac{3\times 2^2}{10}}=\dfrac{\frac{3}{2}\lg 3+3\lg 2-\frac{3}{2}}{\lg 3+2\lg 2-1}=\dfrac{\frac{3}{2}(\lg 3+2\lg 2-1)}{\lg 3+2\lg 2-1}=\dfrac{3}{2}$

（3）原式 $=\log_3 4-\log_3\dfrac{32}{9}+\log_3 8-3=\log_3\left(\dfrac{4}{\frac{32}{9}}\times 8\right.$

（4）原式 $=\log_2\left(\sqrt{8+4\sqrt{3}}\right)\left(\sqrt{8-4\sqrt{3}}\right)=\log_2\sqrt{16}=\log_2 4=\log_2 2^2=2.$

« 19.计算:严+log 迟 25 =

解:原式= 3 + log*((5)=3 + 4 = 7.

例 20.设 $\text{Iog}_2 3$ = ˆ$\text{Jog}_2 15$ =Z?,则 $\text{Iog}_2 75$ = ________

解：V $\text{Iog}_2 3$ = Λ,log, 15 =b

/. $\text{Iog}_2(3\times5)$ = $\text{Iog}_2 3$÷$\text{IOg}_2 5$ = a + $\text{Iog}_2 5$ = Z?,A $\text{Iog}_2 5$ = b —
a

Λ $\text{Iog}_2 75$ = $\text{Iog}_2(15\ \times5)$ = $\text{Iog}_2 15$ + $\text{Iog}_2 5$ = b + b— a = 2b —
u

例 21.计算：3 叫″一 2 “叱 3+10 呻+丄
(2)

解:原式=3><3 晌 5-2° ><2 也’+102 + 2 V

= 3x5-16x3 + 3’+2 吆诂 =15−48 ÷ 27+r $\frac{29}{T}$

例 22.计算:(Ig 2)2+lg 2 Ig 5-Ig 20.

解:原式= !g 2(g2 + lg5)-Ig(IoX 2)

例 23.计算:

(I)Iog2 + $\text{Iog}_2 12$-I$\text{log}_2 42$;
厶

解：（1）原式=Iog? 0 忑
+ Iog_2 J144 - Iog_2

= Iog_2 ■ 屁卜 iog, f | =iog2 二一*
2

(2)原式=lg5’ + 二 Ig2’+lg5 lg(1 θ x2) + (lg2)’

= 21g5 + 21g2 + lg5(l + lg 2)+(lg2)’ = 2(lg5 + lg2)+lg5 + lg2(lg5 + lg2)
= 2 + lg5 + lg2

=3

例 24• 计• 算：5 叽小 5：+3 | o to (ι ÷ √J) 2 β

解:原式=5 2lofe5 ˆ° + 3 沁川(4)=25 %g + 9 窗 S = √3-i + ι + √3 = 2√3 .

点评 本题为易错题，易错误得到 5 叫卜府=5' 叫 Z),实际上，此时真数

1-√3<0,对数式无意义,应为 5 曲的=5, 0 faJ(V3—I) 2 =52 | 沁 m>.

例 25.若 Iog*2)(疋- 7 兀+13) = 0,则 X 的值为 __________ 解:Tlog-2)(x' -7x + 13) = 0

X2 -7x +13 = 1

A x-2>0 ,解之得/ = 4.

x-2≠1

• • • ■X 的值为 4.

例 26.若 /(2l+1)=|,则/(4)= _____________•

解:由 2∧+1= 4 得到 T =3, Λx = $\log_2 3$.

, /(4)=|=ˆ$\log_2 3$

例 27.已知 lgα,lg” 是方程 2X2-4Λ + 1= 0 的两个根,则 flg- ' | 的值是【 】

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

解：T 2/ — 4x +1 = 0, • • • 亍一2Λ + 丄=0

2

• • IgGIgb 是该方程的两个根

/ Ig α + Ig Z? = 2, Iga Ig b =—.

2

° Ig -Λl = (Ig6/ — IgZ?)? = (lg6/ + IgZ?)2 — 4Ig IeZ? = 22 — 4× — = 2.

b) J 2

选择【B】

例 28.计算:(订! + log < j + Iog 3 —=--------

解:原式= [£) ⌈+呃 5 4) 27

4 5 J + l θ g3 l =y

例 29.解下列方程：

(1) $\log_2(x+4)+\log_2(x-1)=1+\log,(x+1)$;

(2) lg(2ₜ+2x-16)=Λ<1-lg5).

解：(1) $\log_2$U + 4X%-1) = Iog_2 2 + $\log_2(x+1)$ $\log_2(x^2+3x-4)=\log_2(2x+2)$

$X^2+3x-4=2x+2$

x + 4 >

0 ,解之得. x = 2.

• • • 该方程的解为 x = 2;

(2) lg(2ᵛ + IX-16)= X(Ig 10- 5) = xIg2 = IgT : . T +2x-16 = 2^x,解之得:x = 8,符合题意.

• • • 该方程的解为 x = 8.

例 30.若 lgα-21g2 = 1j! | jα=[]

(A) 4 (B) 10 (C) 20 (D) 40

解:T Ig α - 21g 2 = 1, :• Ig U - Ig T = 1, Ig Λ - Ig 4 = Ig- = L

4

:• — = 10,解之得: α = 40

4

选择【D】.

例 31.方程 IOgM(I+ 23) = x + l 的解 X=__________.

MHog$_3$(l + 2 3c)=log$_3$3ˆ1, Λl + 2 3ₜ =3^{x+1} =3 3ₜ.

3 “ = I ,解之得:X = 0,即该方程的解为 Λ- = 0.

点评根据对数的性质,可将任意一个实数转化为对数,如上面的 x +1 = Iog$_3$ 3^{1+},.

例 32.计算:10g$_{25}$ 6.25 + lg0.01 + ln√e-$2^{1+to\beta 23}$.

解：原式=IOg$_{25}$ 2.5^2 +lg10’2+ In 门 一 2 2^{10fc3}

—2 — 2 + — — 2x3 ———.

2 2

例 33. (1)计算:Iog_3 √27 + Ig 25 + Ig 4 + (-9.8)° + $IOg_{(\hat{}\ 1)}$(3 - 2√Σ);

(2)已知 Ig X + Ig y = 2 lg(x — 2y),求 IOg 方 y 一 IOg 员 x 的值.

解:(1)原式=IOgj 3 訂 lg(25x4)+l + logjj(√Σ-1)'

= - + 2 + 1 + 2

2

13

—

—

2

(2) V lgx + lgy = 2IgCV-2y),Λ IgQ = Ig(X_2y)2

/ (X _ 2y): = Xy , x2 _ 5xy + 4y2 = 0.

Vx>0,Λ 1-5| ⊥] + 4 ⊥ = 0,ΛZ = 1 或 hi.

XJ X 4 X

/ x>0,y> 0,x-2y > 0 .Λ 0 < - < 1,Λ - = 1 X 2 X 4

:log 逅〉'一 IOg ^x = IOg √2 I = Iog 住扌=_ l° g 匹 4 = _ l° g

C G 行)″=^4 •

点评 这里第(2)问在得出结果时用到了对数的运算性质的推论:

Iog“ yr = IOg“ MT= -1Og$_{tJ}$ M. M

例 34.化简下列各式:

(1) 41g2 + 31g5-lg-;

(9) $\frac{igQ+ig8\_igJT565}{L2}$

1 04 × 53

解:(1)原 =l 24+l 53-Ig- = Ig^ - = Ig(2x5/ =4;

g g r

(2)原式=

3x2

F

3 3 3 , 、

- 3÷31g2-- -(1 3 + 21 2-1)

g δ 3

'Ig3 + lg22-l Ig3 + 21g2-l 一 2

例 35. 化简下列各式:

(1) 27 7 −2,0fi23 Xlog, − + 21g(VΓ Γ √5 +y | 3−ˆ
8

(2) I0g −(√6 + 4 √2 − √6−4 √f2).

解：(1) 原式=(33) i −3×log 2 2ˆ3 + Ig(√3 + √5 + √3−
√5

= 3 2−3×(−3) + lg10 =9 + 9 + 1 = 19;

(2) 原式=2I0g −(J6 + 4、迂— √6−4 Λ / 2) x*

$$=\log_{\sqrt{2}}\left(\sqrt{6+4\sqrt{2}}-\sqrt{6-4\sqrt{2}}\right)^{2}\times\frac{1}{2}=\log_{\sqrt{2}}8\times\frac{1}{2}=\log_{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}\right)^{6}\times\frac{1}{2}=6\times\frac{1}{2}=3.$$

解法二：原式=logJJ(2 + √Σ)’−庇 $\overline{\sqrt{2})^{2}}\Big)$

=I0g −(2 + √f2 —2 +、/Σ) = I0g a 2J2 = I0g
U(V5) = 3.

例 36. 若 4t−2r+,−3 = 0, 则 X 的值为 ______________ .

解：2 2Λ−2 2Λ−3 = 0, (2x —3)(2″ +1)=0

/. 2t = 3 (2’ =−lv0, 舍去)

/. X

« 37. 计算: $\dfrac{-\text{Ig }4-\text{Ig }25}{{}_{\text{I}}\text{ 历 }{}_{\log}\hat{}\text{—}}$

解:原 =−1ˆ4×ˆ−4 = ≠−4 = −4−4 = −8 log. √3 1
2

例 38. (1) 已知 bg*8 = 6, 求 X 的值;

(2) 已知 log5(x2 −I0)=I+ Iog3 X, 求 X 的值.

解：(1) V Iogv 8 = 6, Λ X6 = &

Vx>0, Hx≠1 Λx = 8ˆ =(2 计』= √Σ;

解法二:V Iogt 8 = 6, Λ I0gΛ T =31ogx 2 = 6, Λ Iogx 2 = 2.

* IOg J (V2) = 2 IOg ζ y | 2 = 2 JOg V2 = 1, x = V2

(2) Iog λ (x2 -10)= 1 + Iog 3 XJOg ʌ (X2 -IO) = Iog 3 3 + Iog 5 X

Λ log j (x2 - IO)= Iog 3 3x

x2-10>0

. .' X > 0 ,解之得:ʌ =5.

X2 一 10 = 3X

即 X 的值为 5.

点评 解对数方程时,若方程可化为两个同底对数相等,则它们的真数相等.

例 39.若 Glog§ 3 = 1,则 3“+9“ 的值为 _____.

解:TdIogs 3 = 1, log 5 3rt =∏Λ 3“ =5.

• 3“ +9“ =5 + (3″), =5 + 52 =30.

点评 本题考查对数的性质:底数的对数等于 1.即 log, = l α>0 且″Hl)

例 40. ^flgX-Igy = 6/,W1JlgI ⊥ _Ig — (用含“的式子表示)
2) 12
X 解:T Ig Igy = α,: Ig — = a.
y

λ1s) -1s } =1s^=18(7)=31gr3α Z \3 (2;

例 41.若 A-Iog J 3 = 1 !SlJlog 2 S' +^ 等于【 】

(A) 3 (B) 5 (C) 7 (D) 10

1 1 1 z - 解:T XIOg 4 3 = — ,Λ Ioe 3″ = — , ' 3″ = 42 = -√4 = 2
J 2 J 2

Λlog 2 3x+9v = log, 2 +(3,)2 =1 + 22 =5.

选择【B】•

例 42.若 G = IOg〈3,则 2“+2 “ =_____

解:Ta = Iogn 3, 辰才響 Kz =2 3 | J (2a)2 =3, T =√3.

2+, 2“+$

例 43.方程 IogJy- -5) = log< (3 Z - 2)+2 的解为 解:log2(9Z -5) = Iog$_2$(3v ,-2)+Iog$_2$4

Λ log$_2$(9x^1 -5)=log$_2$4(3″1 -2),9x^1 -5 = 4 3x^1 -8.

Λ 32Λ-12 3x+27 = 0,(3Λ 一3) (3A—9) = 0

• 3t =3 或 3’=9,解之得:x = l 或 x = 2.

经检验,兀=1 不符合题意,舍去.

Λx = 2,即该方程的解为 x = 2.

例 44.已知方程 X2 +xlog$_2$6 + log$_2$3 = 0 的两个实数根分别为 a,β ,则

$\left(\frac{1}{4}\right)^{\alpha}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{\beta}=$【

(A)丄 36 (B) 36 (C) -6 (D) 6

解:由题意可知:α + 0 = -log, 6.

. .:、.转)=(2-2)^’° s^6 =22,0fc6 =2IOS26^ =62 =36.

选择【B】

例 44.已知 X = Iog$_2$ 3 ,贝 IJ $\frac{4A -4'r}{2' — 2 A}$ —— =

分析:本题考查指数式与对数式的互化.

VX = IOg$_2$3,Λ T =3.

辛_丄80

.4Λ -4-t _ _羽_6_1°

2—27 1 24 3

5 ———— 3 9

例 45.若 XIOgj2 = 1,贝 |J 4“—2T=______