

江苏省连云港市赣榆高级中学 2023-2024 学年高三第三次测评数学试卷

注意事项

1. 考生要认真填写考场号和座位序号。
2. 试题所有答案必须填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。第一部分必须用 2B 铅笔作答；第二部分必须用黑色字迹的签字笔作答。
3. 考试结束后，考生须将试卷和答题卡放在桌面上，待监考员收回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 半径为 2 的球 O 内有一个内接正三棱柱，则正三棱柱的侧面积的最大值为（ ）

- A. $9\sqrt{3}$ B. $12\sqrt{3}$ C. $16\sqrt{3}$ D. $18\sqrt{3}$

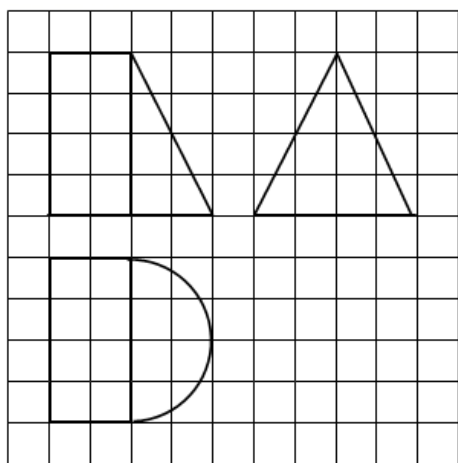
2. 记集合 $A = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 16\}$ 和集合 $B = \{(x, y) | x + y \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$ 表示的平面区域分别是 Ω_1 和 Ω_2 , 若在区域 Ω_1 内任取一点, 则该点落在区域 Ω_2 的概率为()

- A. $\frac{1}{4\pi}$ B. $\frac{1}{\pi}$ C. $\frac{1}{2\pi}$ D. $\frac{\pi-2}{4\pi}$

3. 已知集合 $M = \{x | y = \sqrt{\lg x}\}$, $N = \{x \in \mathbb{N} | 4 - x^2 \geq 0\}$, 则 $M \cap N$ 为()

- A. $[1, 2]$ B. $\{0, 1, 2\}$ C. $\{1, 2\}$ D. $(1, 2)$

4. 某几何体的三视图如图所示，若图中小正方形的边长均为 1，则该几何体的体积是()



- A. $16 + \frac{16}{3}\pi$ B. $16 + \frac{8}{3}\pi$ C. $\frac{32}{3} + \frac{8}{3}\pi$ D. $\frac{32}{3} + \frac{16}{3}\pi$

5. 已知等差数列 $\{a_n\}$, 则“ $a_2 > a_1$ ”是“数列 $\{a_n\}$ 为单调递增数列”的()

- A. 充分而不必要条件
B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件
D. 既不充分也不必要条件

6. 要得到函数 $y = \sqrt{3} \sin\left(x - \frac{\pi}{12}\right)$ 的图象, 只需将函数 $y = \sqrt{3} \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ 图象上所有点的横坐标 ()

A. 伸长到原来的 2 倍 (纵坐标不变), 再将得到的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度

B. 伸长到原来的 2 倍 (纵坐标不变), 再将得到的图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度

C. 缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍 (纵坐标不变), 再将得到的图象向左平移 $\frac{5\pi}{24}$ 个单位长度

D. 缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍 (纵坐标不变), 再将得到的图象向右平移 $\frac{11\pi}{24}$ 个单位长度

7. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \theta)$, 其中 $\omega > 0$, $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 其图象关于直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 对称, 对满足 $|f(x_1) - f(x_2)| = 2$

的 x_1, x_2 , 有 $|x_1 - x_2|_{\min} = \frac{\pi}{2}$, 将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到函数 $g(x)$ 的图象, 则函数 $g(x)$ 的单

调递减区间是 ()

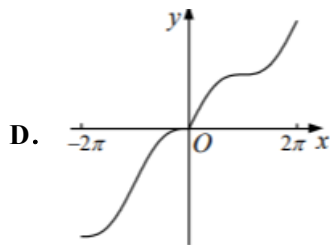
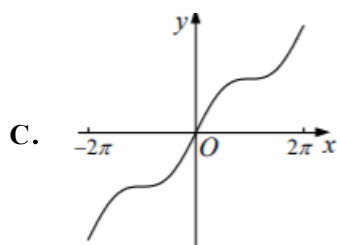
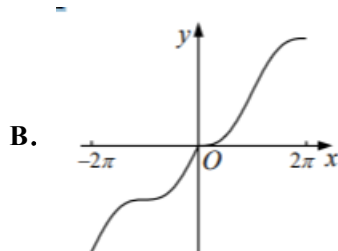
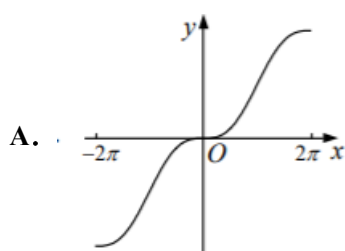
A. $\left[k\pi - \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right] (k \in \mathbb{Z})$

B. $\left[k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}\right] (k \in \mathbb{Z})$

C. $\left[k\pi + \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{5\pi}{6}\right] (k \in \mathbb{Z})$

D. $\left[k\pi + \frac{\pi}{12}, k\pi + \frac{7\pi}{12}\right] (k \in \mathbb{Z})$

8. 函数 $y = \sin|x| + x$ 在 $x \in [-2\pi, 2\pi]$ 上的大致图象是 ()



9. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x < 0 \\ x \\ \ln x, & x > 0 \end{cases}$, 若函数 $F(x) = f(x) - kx$ 在 $\mathbb{R}$ 上有 3 个零点, 则实数 k 的取值范围为 ()

- A. $(0, \frac{1}{e})$ B. $(0, \frac{1}{2e})$ C. $(-\infty, \frac{1}{2e})$ D. $(\frac{1}{2e}, \frac{1}{e})$

10. 已知 m, n 表示两条不同的直线, α, β 表示两个不同的平面, 且 $m \perp \alpha, n \subset \beta$, 则“ $\alpha \perp \beta$ ”是“ $m \parallel n$ ”的()条件.

- A. 充分不必要 B. 必要不充分 C. 充要 D. 既不充分也不必要

11. 已知复数 z 满足 $|z|=1$, 则 $|z+2-i|$ 的最大值为 ()

- A. $2+3$ B. $1+\sqrt{5}$ C. $2+\sqrt{5}$ D. 6

12. 已知直线 $l: x+m^2y=0$ 与直线 $n: x+y+m=0$ 则“ $l \parallel n$ ”是“ $m=1$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 李明自主创业, 在网上经营一家水果店, 销售的水果中有草莓、京白梨、西瓜、桃, 价格依次为 60 元/盒、65 元/盒、80 元/盒、90 元/盒. 为增加销量, 李明对这四种水果进行促销: 一次购买水果的总价达到 120 元, 顾客就少付 x 元. 每笔订单顾客网上支付成功后, 李明会得到支付款的 80%.

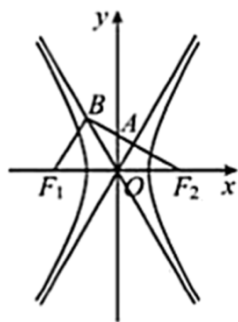
①当 $x=10$ 时, 顾客一次购买草莓和西瓜各 1 盒, 需要支付_____元;

②在促销活动中, 为保证李明每笔订单得到的金额均不低于促销前总价的七折, 则 x 的最大值为_____.

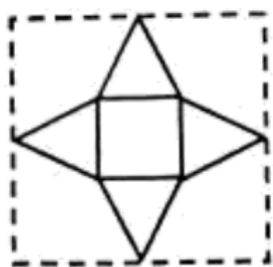
14. (5 分) 某膳食营养科研机构为研究牛蛙体内的维生素 E 和锌、硒等微量元素 (这些元素可以延缓衰老, 还能起到抗癌的效果) 对人体的作用, 现从 4 只雌蛙和 2 只雄蛙中任选 2 只牛蛙进行抽样试验, 则选出的 2 只牛蛙中至少有 1 只雄蛙的概率是_____.

15. 如图, F_1, F_2 分别是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的左、右焦点, 过 F_2 的直线与双曲线 C 的两条渐近线分别交于 A, B

两点, 若 $\overrightarrow{F_2A} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{F_1B} \cdot \overrightarrow{F_2B} = 0$, 则双曲线 C 的离心率是_____.

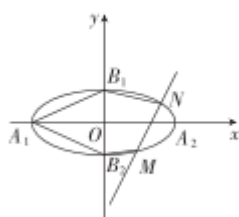


16. 边长为 2 的正方形经裁剪后留下如图所示的实线围成的部分, 将所留部分折成一个正四棱锥. 当该棱锥的体积取得最大值时, 其底面棱长为_____.



三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 如图，椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右顶点分别为 A_1, A_2 ，上、下顶点分别为 B_1, B_2 ，且 $B_1(0, 1)$ ， $\triangle A_1B_1B_2$ 为等边三角形，过点 $(1, 0)$ 的直线与椭圆 C 在 y 轴右侧的部分交于 M, N 两点。



- (1) 求椭圆 C 的标准方程；
- (2) 求四边形 B_2MNB_1 面积的取值范围。
18. (12 分) 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，已知 $2c \cos B = 2a - b$ ，
- (I) 求 $\angle C$ 的大小；
- (II) 若 $\left| \overrightarrow{CA} - \frac{1}{2} \overrightarrow{CB} \right| = 2$ ，求 $\triangle ABC$ 面积的最大值。
19. (12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数， S_n 为其前 n 项和，对于任意的 $n \in \mathbb{N}^*$ 满足关系式 $2S_n = 3a_n - 3$ 。
- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；
- (2) 设数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $b_n = \frac{1}{\log_3 a_n \cdot \log_3 a_{n+2}}$ ，前 n 项和为 T_n ，求证：对于任意的正数 n ，总有 $T_n < \frac{3}{4}$ 。
20. (12 分) 已知函数 $f(x) = (x - \frac{1}{x}) \ln x$ ， $g(x) = x - \frac{k}{x}$ 。
- (1) 证明：函数 $f(x)$ 的极小值点为 1；
- (2) 若函数 $y = f(x) - g(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 有两个零点，证明： $1 \leq k < \frac{17}{8}$ 。
21. (12 分) [选修 4-4：极坐标与参数方程]

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = \sqrt{2} + \sqrt{2} \cos \alpha \\ y = \sqrt{2} \sin \alpha \end{cases}$ (α 是参数)，以坐标原点 O 为极点， x

轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho = 4\sin \theta$.

- (1) 求曲线 C_1 的极坐标方程和曲线 C_2 的直角坐标方程;
- (2) 若射线 $\theta = \beta \left(0 < \beta < \frac{\pi}{2} \right)$ 与曲线 C_1 交于 O, A 两点, 与曲线 C_2 交于 O, B 两点, 求 $|OA| + |OB|$ 取最大值时 $\tan \beta$ 的值

22. (10 分) 十八大以来, 党中央提出要在 2020 年实现全面脱贫, 为了实现这一目标, 国家对“新农合”(新型农村合作医疗) 推出了新政, 各级财政提高了对“新农合”的补助标准. 提高了各项报销的比例, 其中门诊报销比例如下:

表 1: 新农合门诊报销比例

医院类别	村卫生室	镇卫生院	二甲医院	三甲医院
门诊报销比例	60%	40%	30%	20%

根据以往的数据统计, 李村一个结算年度门诊就诊人次情况如下:

表 2: 李村一个结算年度门诊就诊情况统计表

医院类别	村卫生室	镇卫生院	二甲医院	三甲医院
一个结算年度内各门诊就诊人次占李村总就诊人次的比例	70%	10%	15%	5%

如果一个结算年度每人次到村卫生室、镇卫生院、二甲医院、三甲医院门诊平均费用分别为 50 元、100 元、200 元、500 元. 若李村一个结算年度内去门诊就诊人次为 2000 人次.

- (I) 李村在这个结算年度内去三甲医院门诊就诊的人次中, 60 岁以上的人次占了 80%, 从去三甲医院门诊就诊的人次中任选 2 人次, 恰好 2 人次都是 60 岁以上人次的概率是多少?
- (II) 如果将李村这个结算年度内门诊就诊人次占全村总就诊人次的比例视为概率, 求李村这个结算年度每人次用于门诊实付费用(报销后个人应承担部分) X 的分布列与期望.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1、B

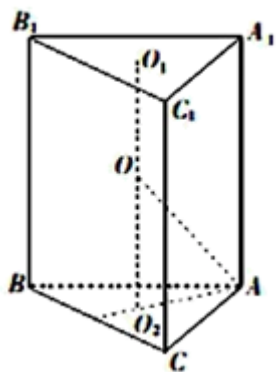
【解析】

设正三棱柱上下底面的中心分别为 O_1, O_2 ，底面边长与高分别为 x, h ，利用 $OA^2 = OO_2^2 + O_2A^2$ ，可得

$h^2 = 16 - \frac{4}{3}x^2$ ，进一步得到侧面积 $S = 3xh$ ，再利用基本不等式求最值即可。

【详解】

如图所示. 设正三棱柱上下底面的中心分别为 O_1, O_2 ，底面边长与高分别为 x, h ，则 $O_2A = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ ，



在 $Rt\triangle OAO_2$ 中， $\frac{h^2}{4} + \frac{x^2}{3} = 4$ ，化为 $h^2 = 16 - \frac{4}{3}x^2$ ，

$QS = 3xh$ ，

$$\therefore S^2 = 9x^2h^2 = 12x^2(12 - x^2), 12\left(\frac{x^2 + 12 - x^2}{2}\right)^2 = 432,$$

当且仅当 $x = \sqrt{6}$ 时取等号，此时 $S = 12\sqrt{3}$ 。

故选：B.

【点睛】

本题考查正三棱柱与球的切接问题，涉及到基本不等式求最值，考查学生的计算能力，是一道中档题。

2、C

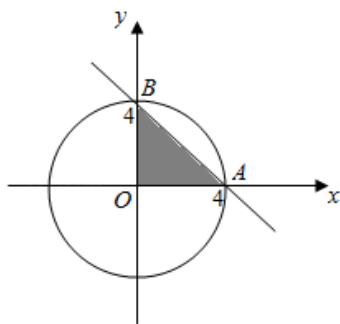
【解析】

据题意可知，是与面积有关的几何概率，要求 M 落在区域 Ω_2 内的概率，只要求 A 、 B 所表示区域的面积，然后代入

概率公式 $P = \frac{\text{区域}\Omega_2\text{的面积}}{\text{区域}\Omega_1\text{的面积}}$ ，计算即可得答案。

【详解】

根据题意可得集合 $A = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 16\}$ 所表示的区域即为如图所示表示：



的圆及内部的平面区域，面积为 16π ，

集合 $B = \{(x, y) | x + y - 4, 0, x \leq 0, y \leq 0\}$ 表示的平面区域即为图中的 $\text{Rt}\triangle AOB$ ， $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$ ，

根据几何概率的计算公式可得 $P = \frac{8}{16\pi} = \frac{1}{2\pi}$ ，

故选：C.

【点睛】

本题主要考查了几何概率的计算，本题是与面积有关的几何概率模型．解决本题的关键是要准确求出两区域的面积．

3、C

【解析】

分别求解出 M, N 集合的具体范围，由集合的交集运算即可求得答案.

【详解】

因为集合 $M = \{x | x \geq 1\}$ ， $N = \{x \in N | -2 \leq x \leq 2\} = \{0, 1, 2\}$ ，

所以 $M \cap N = \{1, 2\}$

故选：C

【点睛】

本题考查对数函数的定义域求法、一元二次不等式的解法及集合的交集运算，考查基本运算能力.

4、B

【解析】

该几何体是直三棱柱和半圆锥的组合物，其中三棱柱的高为 2，底面是高和底边均为 4 的等腰三角形，圆锥的高为 4，

底面半径为 2，则其体积为 $V = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 \times 2 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \pi \times 4 \times 4$ ，

$= 16 + \frac{8}{3}\pi$ ．

故选 B

点睛：由三视图画出直观图的步骤和思考方法：1、首先看俯视图，根据俯视图画出几何体地面的直观图；2、观察正视图和侧视图找到几何体前、后、左、右的高度；3、画出整体，然后再根据三视图进行调整．

5、C

【解析】

试题分析：根据充分条件和必要条件的定义进行判断即可。

解：在等差数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_2 > a_1$ ，则 $d > 0$ ，即数列 $\{a_n\}$ 为单调递增数列，

若数列 $\{a_n\}$ 为单调递增数列，则 $a_2 > a_1$ ，成立，

即“ $a_2 > a_1$ ”是“数列 $\{a_n\}$ 为单调递增数列”充分必要条件，

故选 C.

考点：必要条件、充分条件与充要条件的判断.

6、B

【解析】

分析：根据三角函数的图象关系进行判断即可。

详解：将函数 $y = \sqrt{3}\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ 图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍（纵坐标不变），

得到 $y = \sqrt{3}\sin\left(\frac{1}{2} \times 2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ ，

再将得到的图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度得到 $y = \sqrt{3}\sin\left(x - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}\sin\left(x - \frac{\pi}{12}\right)$ ，

故选 B.

点睛：本题主要考查三角函数的图象变换，结合 ω 和 φ 的关系是解决本题的关键。

7、B

【解析】

根据已知得到函数 $f(x)$ 两个对称轴的距离也即是半周期，由此求得 ω 的值，结合其对称轴，求得 θ 的值，进而求得

$f(x)$ 解析式.根据图像变换的知识求得 $g(x)$ 的解析式，再利用三角函数求单调区间的方法，求得 $g(x)$ 的单调递减区间.

【详解】

解：已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \theta)$ ，其中 $\omega > 0$ ， $0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ，其图像关于直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 对称，

对满足 $|f(x_1) - f(x_2)| = 2$ 的 x_1, x_2 ，有 $|x_1 - x_2|_{\min} = \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{\omega}$ ， $\therefore \omega = 2$.

再根据其图像关于直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 对称，可得 $2 \times \frac{\pi}{6} + \theta = k\pi + \frac{\pi}{2}$ ， $k \in \mathbf{Z}$.

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}, \therefore f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right).$$

将函数 $f(x)$ 的图像向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到函数 $g(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = \cos 2x$ 的图像.

$$\text{令 } 2k\pi \leq 2x \leq 2k\pi + \pi, \text{ 求得 } k\pi \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{2},$$

则函数 $g(x)$ 的单调递减区间是 $\left[k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}\right], k \in \mathbf{Z},$

故选 B.

【点睛】

本小题主要考查三角函数图像与性质求函数解析式，考查三角函数图像变换，考查三角函数单调区间的求法，属于中档题.

8、D

【解析】

讨论 x 的取值范围，然后对函数进行求导，利用导数的几何意义即可判断.

【详解】

当 $x \geq 0$ 时， $y = \sin x + x$ ，则 $y' = \cos x + 1 \geq 0$ ，

所以函数在 $[0, 2\pi]$ 上单调递增，

令 $g(x) = \cos x + 1$ ，则 $g'(x) = -\sin x$ ，

根据三角函数的性质，

当 $x \in [0, \pi]$ 时， $g'(x) = -\sin x < 0$ ，故切线的斜率变小，

当 $x \in [\pi, 2\pi]$ 时， $g'(x) = -\sin x > 0$ ，故切线的斜率变大，可排除 A、B；

当 $x < 0$ 时， $y = -\sin x + x$ ，则 $y' = -\cos x + 1 \geq 0$ ，

所以函数在 $[-2\pi, 0]$ 上单调递增，

令 $h(x) = -\cos x + 1$ ， $h'(x) = \sin x$ ，

当 $x \in [-2\pi, -\pi]$ 时， $h'(x) = \sin x > 0$ ，故切线的斜率变大，

当 $x \in [-\pi, 0]$ 时， $h'(x) = \sin x < 0$ ，故切线的斜率变小，可排除 C，

故选：D

【点睛】

本题考查了识别函数的图像，考查了导数与函数单调性的关系以及导数的几何意义，属于中档题.

9、B

【解析】

根据分段函数，分当 $x < 0$ ， $x > 0$ ，将问题转化为 $k = \frac{f(x)}{x}$ 的零点问题，用数形结合的方法研究.

【详解】

当 $x < 0$ 时， $k = \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{x^2}$ ，令 $g(x) = \frac{1}{x^2}$ ， $g'(x) = -\frac{2}{x^3} > 0$ ， $g(x)$ 在 $x \in (-\infty, 0)$ 是增函数， $k > 0$ 时， $k = \frac{f(x)}{x}$

有一个零点，

当 $x > 0$ 时， $k = \frac{f(x)}{x} = \frac{\ln x}{x^2}$ ，令 $h(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ ， $h'(x) = \frac{1-2\ln x}{x^3}$

当 $x \in (0, \sqrt{e})$ 时， $h'(x) > 0$ ， $\therefore h(x)$ 在 $(0, \sqrt{e})$ 上单调递增，

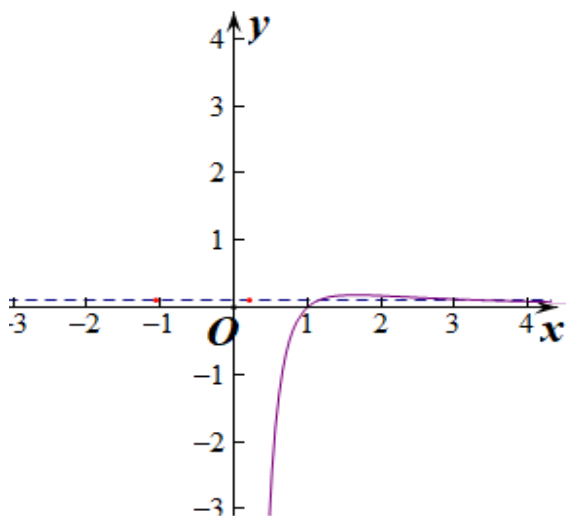
当 $x \in (\sqrt{e}, +\infty)$ 时， $h'(x) < 0$ ， $\therefore h(x)$ 在 $(\sqrt{e}, +\infty)$ 上单调递减，

所以当 $x = \sqrt{e}$ 时， $h(x)$ 取得最大值 $\frac{1}{2e}$ ，

因为 $F(x) = f(x) - kx$ 在 R 上有 3 个零点，

所以当 $x > 0$ 时， $k = \frac{f(x)}{x}$ 有 2 个零点，

如图所示：



所以实数 k 的取值范围为 $(0, \frac{1}{2e})$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/387113036116006114>