1. 已知函数$f(x)=ax+\frac{1}{3}x^3$.

(1) 求函数$f(x)$的单调区间；

(2) 设$g(x)=f(x)+2e^x+2\cos x$有两个极值点x_1，x_2，且$x_1<x_2$.

(i) 求实数a的取值范围；

(ii) 求证：$g(x_1)+g(x_2)>8$.

【答案】(1) 当$a\geq 0$时，$f(x)$在**R**上单调递增，无单调递减区间，

当$a<0$时，$f(x)$在$(-\infty,-\sqrt{-a})$，$(\sqrt{-a},+\infty)$上单调递增，在$(-\sqrt{-a},\sqrt{-a})$上单调递减．

(2) (i) $(-\infty,-2)$．

(ii) 证明详情见解答．

【解析】(1) 因为$f(x)=ax+\frac{1}{3}x^3$，定义域为R，

所以$f'(x)=a+x^2$，

当$a\geq 0$时，$f'(x)\geq 0$恒成立，

所以$f(x)$在R上单调递增，无单调递减区间，

当$a<0$时，令$f'(x)=0$得$x=-\sqrt{-a}$或$x=\sqrt{-a}$，

所以在$(-\infty,-\sqrt{-a})$上$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，

在$(-\sqrt{-a},\sqrt{-a})$上$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，

在$(\sqrt{-a},+\infty)$上$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，

综上所述，当$a\geq 0$时，$f(x)$在R上单调递增，无单调递减区间，

当$a<0$时，$f(x)$在$(-\infty,-\sqrt{-a})$，$(\sqrt{-a},+\infty)$上单调递增，在$(-\sqrt{-a},\sqrt{-a})$上单调递减．?

(2) 因为$f(x)=ax+\frac{1}{3}x^3$，$g(x)=f(x)+2e^x+2\cos x$有两个极值点x_1，x_2，

即函数$g(x)=2e^x+ax+2\cos x+\frac{1}{3}x^3$有两个极值点$x_1$，$x_2$，

所以$g'(x)=2e^x+a-2\sin x+x^2=0$在$R$上有两个不等实数根$x_1$，$x_2$，

(i) 设$F(x)=2e^x+a-2\sin x+x^2$，

所以$F'(x)=2e^x-2\cos x+2x$，

设$u(x)=F'(x)=2e^x-2\cos x+2x$，

$u'(x)=2e^x+2\sin x+2\geq 2e^x>0$，

所以$F'(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调递增，

又$F'(0)=2e^0-2\cos 0+0=0$，

所以当$x\in(0,+\infty)$时，$F'(x)>F'(0)=0$，

所以$F(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，

同理可得$F(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减，

所以$F(x)_{max}=F(0)=2+a$，

所以$2+a<0$，即$a<-2$，

又当$a<-2$时，若$x<0$，$F(x)=2e^x-2\sin x+x^2+a\geq 2e^x-2+x^2+a>x^2+a-2$，

$F(-2-\sqrt{-a})>(-2-\sqrt{-a})^2+a-2=-a+4+4\sqrt{-a}+a-2=2+4\sqrt{-a}>0$，

所以$F(x)$在$(-2-\sqrt{-a},0)$上存在唯一零点x_1，

若$x>0$，$F(x)=2e^x-2\sin x+x^2+a>2-2+x^2+a=x^2+a$，

$F(\sqrt{-a})>-a+a=0$，

所以$F(x)$在$(0,\sqrt{-a})$上有一个零点x_2，

又函数$F(x)$在$(-\infty,0)$上为减函数，在$(0,+\infty)$上为增函数，

所以当$a<-2$时，函数$F(x)$有两个不等零点x_1和x_2，

所以$g(x)$有两个极值点，则$a<-2$，

所以a的取值范围为$(-\infty,-2)$.

(ii)证明：因为$x_1<x_2$，

所以由(i)知，$x_1<0<x_2$，

$g(x)$在$(-\infty,x_1)$上单调递增，在(x_1,x_2)上单调递减，在$(x_2,+\infty)$上单调递增，

设$G(x)=g(x)+g(-x)\ (x>0)$，

所以$G'(x)=g'(x)-g'(-x)=2e^x+a-2\sin x+x^2-(2e^{-x}+2\sin x+x^2)=2e^x-2e^{-x}-4\sin x$，

设$t(x)=2e^x-2e^{-x}-4\sin x>2\cdot 2\sqrt{e^x\cdot e^{-x}}-4\cos x=4(1-\cos x)\geq 0$，

所以$t(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，

即$G'(x)>G'(0)=0$，

所以$G(x)>G(0)=2g(0)=8$，

所以$g(x_2)+g(-x_2)>8$，

又$x_2>0$，

所以$-x_2<0$，

又因为在$(-\infty,0)$上，$g(x_1)$为最大值，

所以$g(-x_2)\leq g(x_1)$，

所以$g(x_1)+g(x_2)\geq g(-x_2)+g(x_2)>8$，

所以原不等式成立.

2. 已知函数$f(x)=x\ln x-a(x^2-1)+x$.

(1) 若$f(x)$单调递减，求a的取值范围；

(2) 若$f(x)$有两个极值点x_1，x_2，且$x_2>2x_1$，证明：$e^6x_1x_2^2>32$.

【答案】(1)$\left[\frac{e}{2},+\infty\right)$．

(2) 证明详情见解答．

【解析】(1) 由$f(x)=x\ln x-a(x^2-1)+x$，得$f'(x)=\ln x-2ax+2(x>0)$，

因为$f(x)$单调递减，

所以$f'(x)=\ln x-2ax+2\le 0$在$(0,+\infty)$上恒成立，

即$2a\ge\frac{\ln x+2}{x}$，

令$g(x)=\frac{\ln x+2}{x}$，$x>0$，

$g'(x)=\frac{-\ln x-1}{x^2}$，

令$g'(x)=0$得$x=\frac{1}{e}$，

所以在$\left(0,\frac{1}{e}\right)$上$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增，

在$\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$上$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减，

所以当$x=\frac{1}{e}$时，$g(x)_{max}=g\left(\frac{1}{e}\right)=e$，

所以$2a\ge e$，

所以$a\ge\frac{e}{2}$，

所以a的取值范围为$\left[\frac{e}{2},+\infty\right)$.

(2) 证明：由(1)知，当$a\ge\frac{e}{2}$时，$f(x)$单调递减，不合题意，

因为函数$f(x)$有两个极值点x_1，x_2，

所以$f'(x)=\ln x-2ax+2(x>0)$有两个零点x_1，x_2，

令$u(x)=\ln x-2ax+2(x>0)$，则$u(x)$有两个零点x_1，x_2，

$u'(x)=\frac{1}{x}-2a=\frac{1-2ax}{x}$，

当$a\le 0$时，$u'(x)>0$，$u(x)$单调递增，不合题意，

当$a>0$时，令$u'(x)=0$得$x=\frac{1}{2a}$，

所以在$\left(0,\frac{1}{2a}\right)$上，$u'(x)>0$，$u(x)$单调递增，

在 $(\frac{1}{2a}$，$+\infty($ 上，$u'(x) < 0$，$u(x)$ 单调递减，

所以 $u(x)_{极大值} = u\left(\frac{1}{2a}\right) = \ln\frac{1}{2a} - 2a \times \frac{1}{2a} + 2 = -\ln 2a + 1 > 0$,

所以 $0 < a < \frac{e}{2}$，此时 $x_2 > \frac{1}{2a} > x_1 > 0$,

要证明 $e^6 x_1 x_2^2 > 32$,

只需证明 $\ln x_1 + 2\ln x_2 > 5\ln 2 - 6$,

由上可得 $\begin{cases} \ln x_1 - 2ax_1 + 2 = 0 \\ \ln x_2 - 2ax_2 + 2 = 0 \end{cases}$，即 $\begin{cases} \ln x_1 = 2ax_1 - 2 \\ \ln x_2 = 2ax_2 - 2 \end{cases}$,

则 $2a = \frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2}$,

所以 $\ln x_1 + 2\ln x_2 = 2a(x_1 + 2x_2) - 6 = \frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2}(x_1 + 2x_2) - 6 = \frac{\ln\frac{x_1}{x_2}}{\frac{x_1}{x_2} - 1}\left(\frac{x_1}{x_2} + 2\right) - 6$,

令 $t = \frac{x_1}{x_2}$，则 $t \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$,

要证明 $\ln x_1 + 2\ln x_2 > 5\ln 2 - 6$,

需要证明 $\frac{\ln t}{t-1}(t + 2) > 5\ln 2$,

令 $h(t) = \frac{\ln t}{t-1}(t + 2)$，且 $t \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$,

则 $h'(t) = \frac{t - 3\ln t - \frac{2}{t} + 1}{(t-1)^2}$,

令 $s(t) = t - 3\ln t - \frac{2}{t} + 1$，且 $t \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$,

则 $s'(t) = 1 - \frac{3}{t} + \frac{2}{t^2} = \frac{(t-1)(t-2)}{t^2} > 0$,

则 $s(t)$ 在 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 上单调递增,

所以 $s(t) < s\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + 3\ln 2 - 3 < 0$,

所以 $h'(t) < 0$，$h(t)$ 在 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 上单调递减,

所以 $h(t) > h\left(\frac{1}{2}\right) = 5\ln 2$,

所以 $\frac{\ln t}{t-1}(t + 2) > 5\ln 2$,

所以 $\ln x_1 + 2\ln x_2 > 5\ln 2 - 6$,

所以 $e^6 x_1 x_2^2 > 32$.

3. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3ax + 2\ln x (a \in \mathbf{R})$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $f(x)$ 有两个极值点 x_1，$x_2(x_1<x_2)$，求证：$-\frac{2}{x_1^2}-x_1<f(x_2)<-2\left(\frac{1}{x_1}-1\right)^2$.

【答案】(1) 当 $a\geq-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数；

当 $a<-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 时，$f(x)$ 在 $\left(\frac{-3a-\sqrt{9a^2-8}}{2},\frac{-3a+\sqrt{9a^2-8}}{2}\right)$ 上是减函数，

在 $\left(0,\frac{-3a-\sqrt{9a^2-8}}{2}\right)$，$\left(\frac{-3a+\sqrt{9a^2-8}}{2},+\infty\right)$ 上是增函数 .

(2) 证明见解析

【解析】(1) 易知 $x>0$，又因为 $f'(x)=x+3a+\frac{2}{x}=\frac{x^2+3ax+2}{x}$，

令 $h(x)=x^2+3ax+2$，$\Delta=9a^2-8$，

①当 $\Delta\leq0$，即 $a^2\leq\frac{8}{9}$ 时，$h(x)\geqslant0$ 恒成立，所以 $f'(x)\geq0$，此时，$f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是增函数；

②当 $\Delta=9a^2-8>0$，得到 $a>\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 或 $a<-\frac{2\sqrt{2}}{3}$，又 $h(x)=x^2+3ax+2$，其对称轴为 $x=-\frac{3a}{2}$，且 $h(0)=2>0$，所以，

当 $a>\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 时，$x=-\frac{3a}{2}<0$，所以 $h(x)\geq0$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

即 $f'(x)>0$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上恒成立，此时 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是增函数；

当 $a<-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 时，$x=-\frac{3a}{2}>0$，且 $h(0)=2>0$，

由 $h(x)=0$，得到 $x=\frac{-3a-\sqrt{9a^2-8}}{2}$ 或 $x=\frac{-3a+\sqrt{9a^2-8}}{2}$，

$x\in\left(0,\frac{-3a-\sqrt{9a^2-8}}{2}\right)\cup\left(\frac{-3a+\sqrt{9a^2-8}}{2},+\infty\right)$ 时，$h(x)>0$，$x\in\left(\frac{-3a-\sqrt{9a^2-8}}{2},\frac{-3a+\sqrt{9a^2-8}}{2}\right)$ 时，$h(x)<0$，

即 $x\in\left(0,\frac{-3a-\sqrt{9a^2-8}}{2}\right)\cup\left(\frac{-3a+\sqrt{9a^2-8}}{2},+\infty\right)$ 时，$f'(x)>0$，$x\in\left(\frac{-3a-\sqrt{9a^2-8}}{2},\frac{-3a+\sqrt{9a^2-8}}{2}\right)$ 时，$f'(x)<0$，

此时，$f(x)$ 在 $\left(\frac{-3a-\sqrt{9a^2-8}}{2},\frac{-3a+\sqrt{9a^2-8}}{2}\right)$ 上是减函数，

在 $\left(0,\frac{-3a-\sqrt{9a^2-8}}{2}\right)$，$\left(\frac{-3a+\sqrt{9a^2-8}}{2},+\infty\right)$ 上是增函数.

综上所述，当 $a\geq-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数；

当 $a<-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 时，$f(x)$ 在 $\left(\frac{-3a-\sqrt{9a^2-8}}{2},\frac{-3a+\sqrt{9a^2-8}}{2}\right)$ 上是减函数，

在$\left(0,\frac{-3a-\sqrt{9a^2-8}}{2}\right),\left(\frac{-3a+\sqrt{9a^2-8}}{2},+\infty\right)$上是增函数.

(2) 证明：由 (1) 知，当$a<-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 时，$f(x)$ 有两个极值点x_1，x_2，

且满足 $x_1x_2=2$，$x_1+x_2=-3a$，

所以$x_2=\frac{2}{x_1}$，$a=-\frac{x_1}{3}-\frac{2}{3x_1}$，$0<x_1<\sqrt{2}$.

所以$f(x_2)=f\left(\frac{2}{x_1}\right)=\frac{2}{x_1^2}-\frac{6}{x_1}\left(\frac{x_1}{3}+\frac{2}{3x_1}\right)+2\ln\frac{2}{x_1}=-\frac{2}{x_1^2}-2\ln x_1-2+2\ln 2$.

先证左边：$f(x_2)-\left(-\frac{2}{x_1^2}-x_1\right)=f(x_2)+\frac{2}{x_1^2}+x_1=f\left(\frac{2}{x_1}\right)+\frac{2}{x_1^2}+x_1=x_1-2\ln x_1-2+2\ln 2$.

考虑函数$g(x)=x-2\ln x-2+2\ln 2$，$x<2$，则$g'(x)=1-\frac{2}{x}<0$，

所以$g(x)$ 在 $(0,2)$ 上是减函数，所以$g(x)>g(2)=0$，

即$f(x_2)+\frac{2}{x_1^2}+x_1>0$，所以$-\frac{2}{x_1^2}-x_1<f(x_2)$，

再证右边：$f(x_2)-\left[-2\left(\frac{1}{x_1}-1\right)^2\right]=f(x_2)+2\left(\frac{1}{x_1}-1\right)^2=f\left(\frac{2}{x_1}\right)+2\left(\frac{1}{x_1}-1\right)^2=2\ln\frac{2}{x_1}-\frac{4}{x_1}$，

考虑函数 $G(x)=2\ln x-2x$，$x>\sqrt{2}$，则 $G'(x)=\frac{2}{x}-2<0$，

所以 $G(x)$ 在 $(\sqrt{2},+\infty)$ 上是减函数，所以 $G(x)<G(\sqrt{2})=2(\ln\sqrt{2}-\sqrt{2})<0$，

即$f(x_2)+2\left(\frac{1}{x_1}-1\right)^2<0$，所以$f(x_2)<-2\left(\frac{1}{x_1}-1\right)^2$.

综上证得$-\frac{2}{x_1^2}-x_1<f(x_2)<-2\left(\frac{1}{x_1}-1\right)^2$.

4. 设函数$f(x)=x(x^2-3x+a)$，$a\in\mathbf{R}$.

(1) 当$a=-9$时，求函数$f(x)$ 的单调增区间；

(2) 若函数$f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 上为减函数，求 a 的取值范围；

(3) 若函数在区间 $(0,2)$ 内存在两个极值点 x_1，x_2，且 $|f(x_1)-f(x_2)|>|f(x_1)+f(x_2)|$，求 a 的取值范围.

【答案】(1) 函数$f(x)$ 的单调增区间为 $(-\infty,-1)$，$(3,+\infty)$；

(2) 实数 a 的取值范围为 $(-\infty,0]$；

(3) 实数 a 的取值范围是 $\left(0,\frac{9}{4}\right)$.

【解析】(1) 当 $a=-9$ 时，$f(x)=x(x^2-3x-9)$，则$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$，

由$f'(x)>0$ 得 $x<-1$ 或$x>3$，

∴ 函数$f(x)$ 的单调增区间是 $(-\infty,-1)$，$(3,+\infty)$；

(2) 函数$f(x)=x(x^2-3x+a)$，则$f'(x)=3x^2-6x+a$，

∵ 函数$f(x)$在区间$(1,2)$上为减函数，

$\therefore \forall x\in(1,2)$，$f'(x)\le 0$ 成立，即 $\forall x\in(1,2)$，$3x^2-6x+a\le 0\Leftrightarrow a\le -3x^2+6x$，

又 $-3x^2+6x$ 在 $(1,2)$ 上单调递减，即 $\forall x\in(1,2)$，$-3x^2+6x>0$，

$\therefore a\le 0$，

$\therefore a$ 的取值范围是 $(-\infty，0]$；

(3) 由 (2) 得 $f'(x)=3x^2-6x+a$，

函数 $f(x)$ 在区间 $(0,2)$ 内存在两个极值点 x_1，x_2，则 $f'(x)=0$ 在区间 $(0,2)$ 内有两个不等根 x_1，x_2，

即 $\begin{cases} f'(0)=f'(2)=a>0 \\ f'(1)=-3+a<0 \end{cases}$，解得 $0<a<3$，且有 $x_1+x_2=2$，$x_1x_2=\frac{a}{3}$ ①，

不妨令 $0<x_1<x_2<2$，则 $f'(x)=3(x-x_1)(x-x_2)$，

当 $0<x<x_1$ 或 $x_2<x<2$ 时，$f'(x)>0$，当 $x_1<x<x_2$ 时，$f'(x)<0$，

则 $f(x)$ 在 x_1 处取得极大值 $f(x_1)$，在 x_2 取得极小值 $f(x_2)$，显然，$f(x_1)>f(x_2)$，

由 $|f(x_1)-f(x_2)|>|f(x_1)+f(x_2)|$ 两边平方得 $f(x_1)\cdot f(x_2)<0$，

则 $f(x_1)\cdot f(x_2)=x_1(x_1^2-3x_1+a)\cdot x_2(x_2^2-3x_2+a)<0$，即 $(x_1^2-3x_1+a)(x_2^2-3x_2+a)<0$，整理得 $(x_1x_2)^2-3x_1x_2(x_1+x_2)+a[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2]+9x_1x_2-3a(x_1+x_2)+a^2<0$ ②，

联立①②得 $\frac{4}{9}a^2-a<0$，解得 $0<a<\frac{9}{4}$，

综上所述，$0<a<\frac{9}{4}$，

$\therefore$ 实数 a 的取值范围是 $(0,\frac{9}{4})$.

5. 已知函数 $f(x)=\ln x+\frac{1}{2}(a-x)^2$，其中 $a\in\mathbf{R}$.

(1) 当 $a=1$ 时，求函数 $f(x)$ 在 $(1，f(1))$ 处的切线方程；

(2) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

(3) 若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1，x_2 $(x_1<x_2)$，$|f(x_2)-f(x_1)|$ 的取值范围为 $(\frac{3}{4}-\ln 2,\frac{15}{8}-2\ln 2)$，求 a 的取值范围.

【答案】(1) $x-y-1=0$；

(2) 当 $a\le 2$ 时，$f(x)$ 在 $(0，+\infty)$ 上单调递增；当 $a>2$ 时，$f(x)$ 在 $\left(0,\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)$ 和 $\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2},+\infty\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2},\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)$ 上单调递减；

(3) $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2},\frac{5}{2}\right)$.

【解析】(1) 当 $a=1$ 时，$f(x)=\ln x+\frac{1}{2}(1-x)^2$，定义域为 $(0，+\infty)$，

所以 $f'(x)=\frac{1}{x}-(1-x)$，

所以 $k=f'(1)=1$,

又$f(1)=0$，

所以函数$f(x)$在（1，$f(1)$）处的切线方程为$y=x-1$，即$x-y-1=0$.

(2)$f(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$，

$f(x)=\ln x+\frac{1}{2}x^2-ax+\frac{1}{2}a^2$，$f'(x)=\frac{1}{x}+x-a=\frac{x^2-ax+1}{x}$，

令$g(x)=x^2-ax+1$，则$\triangle=a^2-4$.

①当$a\le 0$或$\triangle\le 0$，即$a\le 2$时，$f'(x)\ge 0$恒成立，

所以$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.

②当$\begin{cases}a>0\\ \triangle>0\end{cases}$，即$a>2$时，

由$f'(x)>0$，得$0<x<\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}$或$x>\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$；

由$f'(x)<0$，得$\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}<x<\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$，

所以$f(x)$在$\left(0,\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)$和$\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2},+\infty\right)$上单调递增，在$\left(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2},\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)$上单调递减.

综上所述，当$a\le 2$时，$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增；

当$a>2$时，$f(x)$在$\left(0,\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)$和$\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2},+\infty\right)$上单调递增，在$\left(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2},\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)$上单调递减；

(3) 由 (2) 当$a\le 2$时，$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，此时函数$f(x)$无极值；

当$a>2$时，$f(x)$有两个极值点，即方程$x^2-ax+1=0$有两个正根x_1，x_2，

所以$x_1\cdot x_2=1$，$x_1+x_2=a$，

则$f(x)$在(x_1,x_2)上是减函数.

所以$f(x_1)>f(x_2)$，

因为$f(x)=\ln x+\frac{1}{2}x^2-ax+\frac{1}{2}a^2$，

所以$|f(x_2)-f(x_1)|=f(x_1)-f(x_2)$

$=\ln x_1+\frac{1}{2}x_1^2-ax_1+\frac{1}{2}a^2-\left(\ln x_2+\frac{1}{2}x_2^2-ax_2+\frac{1}{2}a^2\right)$

$=\ln\frac{x_1}{x_2}+\frac{1}{2}(x_1^2-x_2^2)-a(x_1-x_2)$

$=\ln\frac{x_1}{x_2}+\frac{1}{2}(x_1^2-x_2^2)-(x_1+x_2)(x_1-x_2)$

$=\ln\frac{x_1}{x_2}-\frac{1}{2}(x_1^2-x_2^2)$

$= \ln\frac{x_1}{x_2} - \frac{x_1^2 - x_2^2}{2x_1x_2}$

$= \ln\frac{x_1}{x_2} - \frac{x_1}{2x_2} + \frac{x_2}{2x_1}$，

令 $t = \frac{x_1}{x_2}(0 < t < 1)$，则 $f(x_1) - f(x_2) = h(t) = \ln t - \frac{1}{2}t + \frac{1}{2t}$，

$h'(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2t^2} = \frac{-t^2 + 2t - 1}{2t^2} = \frac{-(t-1)^2}{2t^2} < 0$，

所以 $h(t)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，

又 $h\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} - \ln 2$，$h\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{15}{8} - 2\ln 2$，且 $h\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} - \ln 2 < h(t) < \frac{15}{8} - 2\ln 2 = h\left(\frac{1}{4}\right)$，

所以 $\frac{1}{4} < t < \frac{1}{2}$，

由 $a^2 = \frac{(x_1 + x_2)^2}{x_1x_2} = t + \frac{1}{t} + 2, t \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$，

又 $g(t) = t + \frac{1}{t} + 2$ 在 $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ 上单调递减，

所以 $\frac{9}{2} < a^2 < \frac{25}{4}$ 且 $a > 2$，

所以实数 a 的取值范围为 $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

6. 已知函数 $f(x) = x^2 + a\ln(x + 1)$.

(1) 若函数 $y = f(x)$ 在区间 $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 内是单调递增函数，求实数 a 的取值范围；

(2) 若函数 $y = f(x)$ 有两个极值点 x_1，x_2，且 $x_1 < x_2$，求证：$x_1\ln\frac{2}{\sqrt{e}} < f(x_2) < 0$.

(注:e 为自然对数的底数)

【答案】(1) $\left[-\frac{3}{2}, +\infty\right)$.

(2) 证明详情见解答.

【解析】(1) 函数 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 上是单调递增函数，

所以 $f'(x) = 2x + \frac{a}{x+1} \geq 0$，在 $x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 上恒成立，

所以 $a \geq -2x^2 - 2x$，在 $x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 上恒成立，

令 $g(x) = -2x^2 - 2x$，$g(x) = -2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$ 在 $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 上单调递减，

又 $g(x) = -2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$ 在 $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 上单调递减，

所以 $g(x)_{max} = g\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$，

所以 $a \geq -\frac{3}{2}$，

所以实数 a 的取值范围为 $\left[-\frac{3}{2}, +\infty\right)$.

(2) 证明：$f'(x)=\frac{2x^2+2x+a}{x+1}$在区间 $(-1, +\infty)$ 上有两个不相等的实数根，

即方程 $2x^2+2x+a=0$ 在区间$(-1, +\infty)$ 上有两个不相等的实数根，

设$g(x)=2x^2+2x+a$，

则 $\begin{cases} -\frac{1}{2}>-1 \\ g(-1)>0 \\ g\left(-\frac{1}{2}\right)<0 \end{cases}$，解得 $0<a<\frac{1}{2}$，

所以 $x_1+x_2=-1$，$2x_2^2+2x_2+a=0$，$x_2=\frac{-1+\sqrt{1-2a}}{2}\in\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$，$x_1\in\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$

，　所以 $x_1\ln\frac{2}{\sqrt{e}}<f(x_2)<0$，

所以 $0<\frac{f(x_2)}{x_1}<-\frac{1}{2}+\ln 2$，

所以$\frac{f(x_2)}{x_1}=\frac{x_2^2+a\ln(x_2+1)}{x_1}=\frac{x_2^2-(2x_2^2+2x_2)\ln(x_2+1)}{1\quad x_2}$–，

令$h(x)=\frac{x^2-(2x^2+2x)\ln(x+1)}{1\quad x}$--，$x\in\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$，

$h'(x)=\frac{x^2}{(x+1)^2}+2\ln(x+1)$，

设$p(x)=\frac{x^2}{(x+1)^2}+2\ln(x+1)$，

$p'(x)=\frac{2x^2+6x+2}{(x+1)^3}$，

令 $u(x)=2x^2+6x+2=2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{2}$，

所以 $u(x)$ 在 $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ 上单调递增，

又 $u\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}<0$，$u(0)=2>0$，

所以函数$p'(x)$ 存在唯一零点 $x_0\in\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$，使得$p'(x_0)=0$，

所以在 $\left(-\frac{1}{2}, x_0\right)$ 上，$p'(x)<0$，$p(x)$ 单调递减，

在 $(x_0, 0)$ 上，$p'(x)>0$，$p(x)$ 单调递增，

又$p(0)=0$，$p\left(-\frac{1}{2}\right)=1-2\ln 2<0$，

所以在 $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ 上，$p(x)<0$，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，

所以$h(0)<h(x)<h\left(-\frac{1}{2}\right)$，

所以 $0<h(x)<\ln2-\frac{1}{2}$，即 $0<\frac{f(x_2)}{x_1}<\ln2-\frac{1}{2}=\ln\frac{2}{\sqrt{e}}$，

因为 $x_1\in\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$，

所以 $x_1\ln\frac{2}{\sqrt{e}}<f(x_2)<0$.

7. 已知函数 $f(x)=a\ln(1+x)+\frac{1}{2}x^2-x(a\in\mathbf{R})$.

(1) 若 $a=1$，求函数 $f(x)$ 的单调区间；

(2) 若函数 $f(x)$ 有两个极值点 x_1，x_2，且 $x_1<x_2$，求证：$f(x_2)>\frac{x_1}{2}$.

【答案】(1) ①当 $a\geq1$ 时，$f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增；

②当 $0<a<1$ 时，$f(x)$ 在 $(-1,-\sqrt{1-a})$ 上单调递增，在 $(-\sqrt{1-a},\sqrt{1-a})$ 上单调递减，在 $(\sqrt{1-a},+\infty)$ 上单调递增；

③当 $a=0$ 时，则 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上递减，在 $(1,+\infty)$ 上递增；

④当 $a<0$ 时，$f(x)$ 在 $(-1,\sqrt{1-a})$ 上单调递减，在 $(\sqrt{1-a},+\infty)$ 上单调递增 .

(2) 详见解答过程 .

【解析】(1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,+\infty)$，$f'(x)=\frac{a}{x+1}+x-1=\frac{x^2+a-1}{x+1}$.

①当 $a-1\geq0$ 时，即 $a\geq1$ 时，$f'(x)\geq0$，$f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增；

②当 $0<a<1$ 时，由 $f'(x)=0$ 得 $x_1=-\sqrt{1-a}$，$x_2=\sqrt{1-a}$，

故 $f(x)$ 在 $(-1,-\sqrt{1-a})$ 上单调递增，在 $(-\sqrt{1-a},\sqrt{1-a})$ 上单调递减，

在 $(\sqrt{1-a},+\infty)$ 上单调递增；

③当 $a=0$ 时，原函数实质上为二次函数，则 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上递减，在 $(1,+\infty)$ 上递增.

④当 $a<0$ 时，由 $f'(x)=0$ 得 $x_1=\sqrt{1-a}$，$x_2=-\sqrt{1-a}$（舍），

$f(x)$ 在 $(-1,\sqrt{1-a})$ 上单调递减，在 $(\sqrt{1-a},+\infty)$ 上单调递增.

(2) 证明：由（Ⅰ）得若函数 $f(x)$ 有两个极值点 x_1，x_2，且 $x_1<x_2$，

则 $0<a<1$，$x_1=-\sqrt{1-a}$，$x_2=\sqrt{1-a}$，

$\therefore x_1+x_2=0$，$x_1x_2=a-1$ 且 $x_2\in(0,1)$，即可得 $a=1-x_2^2$

要证 $f(x_2)>\frac{x_1}{2}\Leftrightarrow 2f(x_2)-x_1>0\Leftrightarrow f(x_2)+\frac{1}{2}x_2>0\Leftrightarrow a\ln(x_2+1)+\frac{1}{2}x_2^2-\frac{1}{2}x_2>0\Leftrightarrow(1+x_2)\ln(x_2+1)-\frac{1}{2}x_2>0$，

令 $g(x)=(1+x)\ln(x+1)-\frac{1}{2}x$，$x\in(0,1)$，

$\because g'(x)=\ln(x+1)+\frac{1}{2}>0$，

$\therefore g(x)$ 在 $(0,1)$ 递增，

$\therefore g(x) > g(0) = 0$，

$\therefore$ 命题得证.

8．已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+mx-x\ln x$.

(1) 若 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 单调递增，求实数 m 取值范围；

(2) 若 $f(x)$ 有两个极值点 x_1，x_2，且 $x_1 < x_2$，证明：$x_1x_2 < 1$.

【答案】(1) $[0, +\infty)$；

(2) 证明见解析．

【解析】(1) 由题意，$f'(x) = x + m - 1 - \ln x$，

因为 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 单调递增，所以 $f'(x) \geq 0$ 在 $[1, +\infty)$ 恒成立.

即 $m \geq \ln x - x + 1$ 在 $[1, +\infty)$ 恒成立，

令 $g(x) = \ln x - x + 1$，

则 $g'(x)=\frac{1-x}{x}$，$g'(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒小于等于 0，

故 $g(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 单调递减，$g(x)_{max} = g(1) = 0$.

故 $m \geq 0$，即实数 m 的取值范围为 $[0, +\infty)$.

(2) 证明：$f'(x) = x + m - 1 - \ln x$ 有两个零点，即 $m = \ln x - x + 1$ 有两个根.

由 (1) 知，$g(x) = \ln x - x + 1$ 在 $(0, 1]$ 上单调递增，在 $[1, +\infty)$ 上单调递减，且 $g(x)_{max} = g(1) = 0$.

所以 $m < 0$，且 $0 < x_1 < 1 < x_2$.

要证 $x_1x_2 < 1$，只需证 $x_2 < \frac{1}{x_1}$，

又 $g(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 单调递减，只需证 $g(x_2) > g\left(\frac{1}{x_1}\right)$.

又 $g(x_1) = g(x_2)$，只需证 $g(x_1) > g\left(\frac{1}{x_1}\right)$.

只需证 $\ln x_1 - x_1 + 1 > \ln\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_1} + 1$，

只需证 $2\ln x_1 - x_1 + \frac{1}{x_1} > 0$，

记 $m(x)=\frac{1}{x}-x+2\ln x$，则 $m'(x)=-\frac{1}{x^2}-1+\frac{2}{x}=-\frac{(x-1)^2}{x^2}<0$，

故 $m(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，

从而当 $x \in (0,1)$ 时，$m(x) > m(1) = 1 - 1 = 0$，

所以 $m(x_1) > 0$，因此 $x_1x_2 < 1$.

9. 已知函数$f(x)=4x-\frac{1}{2}x^2-a\ln x$.

(1) 讨论函数$f(x)$的单调性;

(2) 设函数$f(x)$有两个极值点x_1，x_2($x_1<x_2$)，证明: $f(x_1)+f(x_2)<7+e-\ln x_1-\ln x_2$.

【答案】(1) 当$a\ge 4$时，$f(x)$在$(0,+\infty)$单调递减；当$0<a<4$时，$f(x)$在$(0,2-\sqrt{4-a})$单调递减，在$(2-\sqrt{4-a},2+\sqrt{4-a})$单调递增，在$(2+\sqrt{4-a},+\infty)$单调递减；当$a\le 0$时，$f(x)$在$(0,2+\sqrt{4-a})$上单调递增，在$(2+\sqrt{4-a},+\infty)$上单调递减．

(2)证明见解析．

【解析】(1) 由题意知，$f(x)$定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=4-\frac{a}{x}-x=\frac{4x-a-x^2}{x}=-\frac{x^2-4x+a}{x}(x>0)$,

令$y=x^2-4x+a$，则$\Delta=4(4-a)$,

①当$a\ge 4$时，$\Delta\le 0$，$f'(x)\le 0$，$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减,

②当$0<a<4$时，$\Delta>0$，$x^2-4x+a=0$的2个根为$x_1=2-\sqrt{4-a}$，$x_2=2+\sqrt{4-a}$,

此时$x_1>0$，则$f'(x)>0\Rightarrow 2-\sqrt{4-a}<x<2+\sqrt{4-a}$，$f'(x)<0\Rightarrow 0<x<2-\sqrt{4-a}$或$x>2+\sqrt{4-a}$,

所以$f(x)$在$(0,2-\sqrt{4-a})$上单调递减，在$(2-\sqrt{4-a},2+\sqrt{4-a})$上单调递增，在$(2+\sqrt{4-a},+\infty)$上单调递减,

③当$a\le 0$时，$\Delta>0$，$x^2-4x+a=0$的2个根为$x_1=2-\sqrt{4-a}$，$x_2=2+\sqrt{4-a}$,

此时$x_1\le 0$，$x_2>0$，则$f'(x)>0\Rightarrow 0<x<2+\sqrt{4-a}$，$f'(x)<0\Rightarrow x>2+\sqrt{4-a}$,

所以$f(x)$在$(0,2+\sqrt{4-a})$上单调递增，在$(2+\sqrt{4-a},+\infty)$上单调递减,

综上，①当$a\ge 4$时，$f(x)$在$(0,+\infty)$单调递减;

②当$0<a<4$时，$f(x)$在$(0,2-\sqrt{4-a})$单调递减，在$(2-\sqrt{4-a},2+\sqrt{4-a})$单调递增，在$(2+\sqrt{4-a},+\infty)$单调递减;

③当$a\le 0$时，$f(x)$在$(0,2+\sqrt{4-a})$上单调递增，在$(2+\sqrt{4-a},+\infty)$上单调递减.

(2)证明：因为$f(x)$有两个极值点x_1，x_2,

所以由(1)可知$0<a<4$，且$x_1+x_2=4$，$x_1x_2=a$,

所以$f(x_1)+f(x_2)=\left(4x_1-a\ln x_1-\frac{1}{2}x_1^2\right)+\left(4x_2-a\ln x_2-\frac{1}{2}x_2^2\right)=4(x_1+x_2)-a(\ln x_1+\ln x_2)-\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)=a-a\ln a+8$,

要证$f(x_1)+f(x_2)<7+e-\ln x_1-\ln x_2$，即证$a-a\ln a+8<7+e-\ln a$,

只需证$1-a\ln a+a+\ln a-e<0$，$a\in(0,4)$,

令$m(a)=1-a\ln a+a+\ln a-e$，$a\in(0,4)$,