

2023-2024 学年四川省成都市高三下学期数学（理）模拟试题

（一模）

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{x \mid y = \sqrt{x} + \log_3(3-x)\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $\{0, 1, 2\}$ B. $\{1, 2\}$ C. $\{-1, 0\}$ D. $\{0, 1\}$

2. 已知直线 l 的方向向量是 $\vec{a} = (3, 2, 1)$, 平面 α 的一个法向量是 $\vec{n} = (1, -1, -1)$, 则 l 与 α 的位置关系是 ()

- A. $l \perp \alpha$ B. $l // \alpha$
C. l 与 α 相交但不垂直 D. $l // \alpha$ 或 $l \subset \alpha$

3. 已知 i 是虚数单位, $a \in \mathbf{R}$, 则“ $(a+i)^2 = 2i$ ”是“ $a^2 = 1$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

4. 用反证法证明“平面四边形中至少有一个内角不超过 90° ”, 下列假设中正确的是 ()

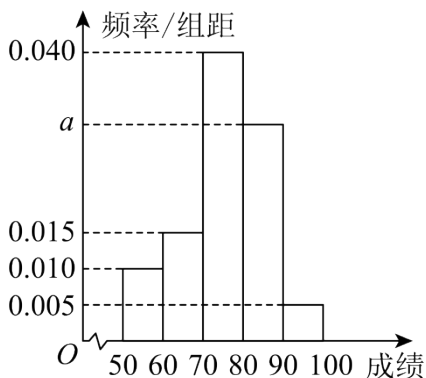
- A. 假设有两个内角超过 90° B. 假设四个内角均超过 90°
C. 假设至多有两个内角超过 90° D. 假设有三个内角超过 90°

5. 2023 年 7 月 28 日, 第 31 届世界大学生夏季运动会（简称大运会）在四川成都开幕, 这是继 2001 年北京大运会, 2011 深圳大运会之后, 中国第三次举办夏季大运会; 在成都大运会中, 中国代表团取得了骄人的成绩. 为向大学生普及大运会的相关知识, 某高校进行“大运会知识竞赛”,

并随机从中抽取了 100 名学生的成绩（满分 100 分）进行统计, 成绩均在 $[50, 100]$ 内, 将其分成

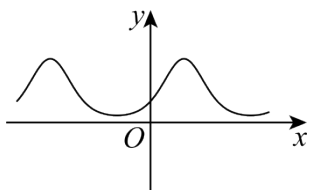
5 组: $[50, 60)$ 、 $[60, 70)$ 、 $[70, 80)$ 、 $[80, 90)$ 、 $[90, 100]$, 并整理得到如下的频率分布直方图, 则

在被抽取的学生中, 成绩落在区间 $[80, 90)$ 内的人数为 ()



- A. 10 B. 20 C. 30 D. 40

6. 华罗庚是享誉世界的数学大师，国际上以华氏命名的数学科研成果有“华氏定理”“华氏不等式”“华氏算子”“华—王方法”等，其斐然成绩早为世人所推崇。他曾说：“数缺形时少直观，形缺数时难入微”，告知我们把“数”与“形”，“式”与“图”结合起来是解决数学问题的有效途径。在数学的学习和研究中，常用函数的图象来研究函数的性质，也常用函数的解析式来分析函数图象的特征。已知函数 $y = f(x)$ 的图象如图所示，则 $f(x)$ 的解析式可能是 ()

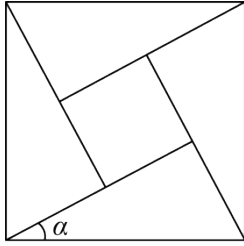


- A. $f(x) = 3^{\sin x}$ B. $f(x) = 3^{\cos x}$ C. $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{\sin x}$ D. $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{\cos x}$

7. 已知双曲线 E 的中心在原点，对称轴为坐标轴，且经过点 $(-2, -1), (4, -\sqrt{7})$ ，则下列结论中错误的是 ()

- A. E 的标准方程为 $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ B. E 的离心率等于 $\frac{\sqrt{6}}{2}$
 C. E 与双曲线 $\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{4} = 1$ 的渐近线不相同 D. 直线 $x - y - 1 = 0$ 与 E 有且仅有一个公共点

8. 《周髀算经》中给出的弦图是由四个全等的直角三角形和中间一个小正方形拼成的一个大的正方形，若下图中所示的角为 α ($0^\circ < \alpha < 45^\circ$)，且小正方形与大正方形面积之比为 $1:25$ ，则 $\tan \alpha$ 的值为 ()



- A. $\frac{25}{24}$ B. $\frac{24}{25}$ C. $\frac{4}{3}$ D. $\frac{3}{4}$

9. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 面积为 S , 若 $a \sin \frac{A+C}{2} = b \sin A$, $6S = \sqrt{3} \overline{AB} \cdot \overline{AC}$, 则 $\triangle ABC$ 的形状是 ()

- A. 等腰三角形 B. 直角三角形 C. 正三角形 D. 等腰直角三角形

10. 若函数 $f(x) = xe^x - \ln x$ 的最小值为 m , 则函数 $g(x) = \ln x - xe^{x+1}$ 的最大值为 ()

- A. $-m-1$ B. $-em+1$ C. $-m+1$ D. $-em-1$

11. 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $AB \perp BC$, 且二面角 $P-CD-A$ 的大小为 45° , $AD+CD=4$. 若点 P, A, B, C, D 均在球 O 的表面上, 则球 O 的体积的最小值为 ()

- A. $\frac{32}{3}\pi$ B. $4\sqrt{3}\pi$ C. $\frac{64\sqrt{6}}{27}\pi$ D. $\frac{32\sqrt{3}\pi}{27}$

12. 已知函数 $f(x) = e^x - \frac{1}{2(a+1)}x^2 - bx (a, b \in \mathbb{R})$ 没有极值点, 则 $\frac{b}{a+1}$ 的最大值为 ()

- A. $\frac{\sqrt{e}}{2}$ B. $\frac{e}{2}$ C. e D. $\frac{e^2}{2}$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知实数 $x > 0, y > 0$, 若 $2x+3y=1$, 则 $\frac{2}{x} + \frac{1}{y}$ 的最小值为_____.

14. 已知圆 C 的圆心与抛物线 $y^2=8x$ 的焦点关于直线 $y=x$ 对称, 直线 $2x-y-3=0$ 与圆 C 相交于 A, B 两点, 且 $|AB|=2$, 则圆 C 的方程为_____.

15. 已知直线 l 经过点 $P(0,1)$, 且被两条平行直线 $l_1: \sqrt{3}x+y+1=0$ 和 $l_2: \sqrt{3}x+y+5=0$ 截得的线段长为 $2\sqrt{2}$, 则直线 l 的方程为_____.

16. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 离心率为 $\frac{2}{3}$. 若 A 和 B 为椭圆

C 上在 x 轴上方的两点, 且 $\overline{BF_1} = 2\overline{AF_2}$, 则直线 AF_2 的斜率为_____.

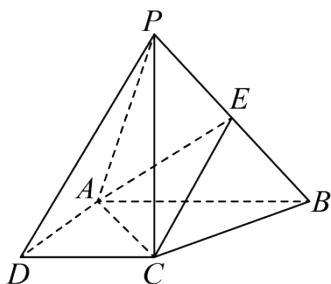
三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22, 23 题为选考题, 考生根据要求作答.

17. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 \neq 0$, 公差为 $d(d \neq 0)$, S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $\left\{\frac{S_n}{a_n}\right\}$ 为等差数列.

(1) 求 a_1 与 d 的关系;

(2) 若 $a_1 = 1$, T_n 为数列 $\left\{\frac{1}{a_n a_{n+1}}\right\}$ 的前 n 项和, 求使得 $T_n < \frac{8}{9}$ 成立的 n 的最大值.

18. 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 已知 $AB \parallel CD$, $AB \perp AD$, $BC \perp PA$, $AB = 2AD = 2CD = 2$, $PA = \sqrt{6}$, $PC = 2$, E 是线段 PB 上的点.



(1) 求证: $PC \perp$ 底面 $ABCD$;

(2) 是否存在点 E 使得 PA 与平面 EAC 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$? 若存在, 求出 $\frac{BE}{BP}$ 的值; 若不存在, 请说明理由.

19. 2022 年二十国集团领导人第十七次峰会 11 月 16 日在印度尼西亚巴厘岛闭幕, 峰会通过

《二十国集团领导人巴厘岛峰会宣言》. 宣言说, 值此全球经济关键时刻, 二十国集团采取切实、精准、迅速和必要的行动至关重要, 基于主席国印尼提出的“共同复苏、强劲复苏”主题, 各国将采取协调行动, 推进强劲、包容、韧性的全球复苏以及创造就业和增长的可持续发展、中国采取负责任的态度, 积极推动产业的可持续发展, 并对友好国家进行技术援助. 非洲某芯片企业生产芯片 I 有四道工序, 前三道工序的生产互不影响, 第四道是检测评估工序, 包括智能自动检测与人工抽检.

(1) 在中国企业援助前, 该芯片企业生产芯片 I 的前三道工序的次品率分别为 $P_1 = \frac{1}{50}$, $P_2 = \frac{1}{49}$, $P_3 = \frac{1}{48}$.

①求生产该芯片 I 的前三道工序的次品率 P_1 ;

②第四道工序中, 智能自动检测为次品的芯片会被自动淘汰, 合格的芯片进入流水线并由工人进行抽查检验. 已知芯片 I 智能自动检测显示合格率为 98%, 求工人在流水线进行人工抽检时, 抽检一个芯片, 该芯片恰为合格品的概率;

(2)该芯片企业在中国企业援助下, 改进生产工艺并生产了芯片 II. 某手机生产厂商获得芯片 I 与芯片 II, 并在某款新型手机上使用. 现对使用这款手机的用户回访, 对开机速度进行满意度调查, 据统计, 回访的 100 名用户中, 安装芯片 I 的有 40 部, 其中对开机速度满意的占 70%; 安装芯

片 II 的有 60 部, 其中对开机速度满意的占 $\frac{14}{15}$. 现采用分层抽样的方法从开机速度满意的人群中抽取 6 人, 再从这 6 人中选取 3 人进行座谈, 记抽到对安装芯片 II 的手机开机速度满意的人数为 X , 求 X 的分布列及其数学期望.

20. 已知椭圆 $M: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$, 短轴长为 $2\sqrt{3}$, 过点 $P(1, 0)$ 斜率存在且不为 0 的直线 l 与椭圆有两个不同的交点 A, B .

(1)求椭圆的标准方程;

(2)椭圆左右顶点为 M, N , 设 AB 中点为 Q , 直线 OQ 交直线 $x=4$ 于点 R , $k_{BN}(k_{AM} - k_{PR})$ 是否为定值? 若是请求出定值, 若不是请说明理由.

21. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 \left(\ln x - \frac{1}{2} \right) + ax(\ln x - 1)$, 其中 $a \neq 0$.

(1)讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2)若 $f(x) > 0$, 求实数 a 的取值范围.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中选一题作答. 如果多选, 则按所做的第一题记分.

【选修 4-4: 坐标系与参数方程】

22. 在直角坐标系 xOy 中, 直线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = t \cos \alpha \\ y = t \sin \alpha \end{cases}$ (t 为参数, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$), 把 C_1 绕坐

标原点逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 得到 C_2 , 以坐标原点 O 为极点, x 轴正半轴为极轴, 取相同的单位长度建立极坐标系.

(1)写出 C_1, C_2 的极坐标方程;

(2)若曲线 C_3 的极坐标方程为 $\rho = 8\sin\theta$ ，且 C_1 与 C_3 交于点 A ， C_2 与 C_3 交于点 B (A, B 与点 O 不重合)，求 $\triangle AOB$ 面积的最大值.

【选修 4-5：不等式选讲】

23. 已知函数 $f(x) = |2x-1| - |x+1|$ 的最小值为 m .

(1)求实数 m 的值;

(2)若实数 a, b, c 满足 $a - 2b + 2c = m + \frac{5}{2}$ ，证明： $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{9}$.

1. A

【分析】根据根式与对数的定义域，结合交集的定义求解即可.

【详解】由 $\begin{cases} x \geq 0 \\ 3-x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x < 3 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq x < 3$,

所以 $B = \{x \mid y = \sqrt{x} + \log_3(3-x)\} = \{x \mid 0 \leq x < 3\}$,

故 $A \cap B = \{0, 1, 2\}$,

故选: A

2. D

【分析】由于 $\vec{a} \cdot \vec{n} = 0$ ，得到 $\vec{a} \perp \vec{n}$ ，从而确定 l 与 α 的位置关系.

【详解】因为 $\vec{a} = (3, 2, 1)$ ， $\vec{n} = (1, -1, -1)$ ，

则 $\vec{a} \cdot \vec{n} = 3 \times 1 + 2 \times (-1) + 1 \times (-1) = 0$ ，

得到 $\vec{a} \perp \vec{n}$ ，且直线 l 的方向向量是 \vec{a} ，平面 α 的一个法向量是 \vec{n} ，

所以 l 与 α 的位置关系是: $l // \alpha$ 或 $l \subset \alpha$ ，

故选: D.

3. A

【分析】由 $(a+i)^2 = 2i$ 结合复数相等求出 a 的值，再利用充分条件和必要条件的定义判断可得出结论.

【详解】若 $(a+i)^2 = a^2 - 1 + 2ai = 2i$ ，且 $a \in \mathbf{R}$ ，则 $\begin{cases} a^2 = 1 \\ 2a = 2 \end{cases}$ ，解得 $a = 1$ ，

所以，“ $(a+i)^2 = 2i$ ”是“ $a^2 = 1$ ”的充分不必要条件.

故选: A.

4. B

【分析】根据反证法的定义.

【详解】平面四边形中至少有一个内角不超过 90° 的反面含义为

4 个内角没有一个不超过 90° ，即四个内角均超过 90° ，

故选: B.

5. C

【分析】根据频率分布直方图可求出成绩落在区间 $[80,90)$ 内的人数.

【详解】由频率直方图可知,成绩落在区间 $[80,90)$ 内的人数为
 $100 \times [1 - (0.01 + 0.015 + 0.04 + 0.005) \times 10] = 30$.

故选: C.

6. A

【分析】利用指数函数、正弦函数的单调性、复合函数的单调性求解.

【详解】由函数图象可知, $y = f(x)$ 的图象不关于 y 轴对称,

$$\text{而 } f(-x) = 3^{\cos(-x)} = 3^{\cos x} = f(x), \quad f(-x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{\cos(-x)} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\cos x} = f(x),$$

即这两个函数均关于 y 轴对称, 则排除选项 B、D;

由指数函数的性质可知 $y = 3^x$ 为单调递增函数, $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 为单调递减函数,

由 $y = \sin x$ 的图象可知存在一个极小的值 $x_0 > 0$, 使得 $y = \sin x$ 在区间 $(0, x_0)$ 上单调递增,

由复合函数的单调性可知, $f(x) = 3^{\sin x}$ 在区间 $(0, x_0)$ 上单调递增, $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{\sin x}$ 在区间 $(0, x_0)$ 上单调递减,

由图象可知 $f(x) = 3^{\sin x}$ 符合题意,

故选: A.

7. C

【分析】分别设出焦点在 x 轴上和在 y 轴上的双曲线方程求解即可求出双曲线 E 的标准方程, 根据离心率和渐近线方程的公式可求出离心率的值和渐近线方程, 将直线方程和双曲线方程联立利用判别式即可判断双曲线和直线交点个数.

【详解】当双曲线的焦点在 x 轴上时, 设双曲线的方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$,
则 $\begin{cases} \frac{4}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1 \\ \frac{16}{a^2} - \frac{7}{b^2} = 1 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} a^2 = 2 \\ b^2 = 1 \end{cases}$, 此时 E 的标准方程为 $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$,

当双曲线的焦点在 y 轴上时, 设双曲线的方程为 $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \frac{1}{a^2} - \frac{4}{b^2} = 1 \\ \frac{7}{a^2} - \frac{16}{b^2} = 1 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a^2 = -1 \\ b^2 = -2 \end{cases} \text{ (舍去), 此种情况不成立, 则 A 正确;}$$

$$\therefore c^2 = a^2 + b^2 = 3, \therefore e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}, \text{ 则 B 正确;}$$

$$\text{双曲线 } \frac{x^2}{2} - y^2 = 1 \text{ 的渐近线为 } y = \pm \frac{b}{a} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}x,$$

$$\text{双曲线 } \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{4} = 1 \text{ 的渐近线为 } y = \pm \frac{a}{b} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}x, \text{ 即两者的渐近线相同, 则 C 错误;}$$

$$\text{将直线 } x - y - 1 = 0 \text{ 与双曲线 } \frac{x^2}{2} - y^2 = 1 \text{ 联立得 } x^2 - 4x + 4 = 0,$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 0, \therefore \text{直线 } x - y - 1 = 0 \text{ 与 } E \text{ 有且仅有一个公共点, 则 D 正确;}$$

故选 C.

8. D

【分析】设大正方形 $ABCD$ 的边长为 a , 求出小正方形 $EFMN$ 的边长, 根据小正方形与大正方形

面积之比得 $2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{24}{25}$, 再利用弦化切求解可得答案.

【详解】如图, 设大正方形 $ABCD$ 的边长为 a ,

则小正方形 $EFMN$ 的边长为 $|AF| - |AE| = |AF| - |BF| = a \cos \alpha - a \sin \alpha$,

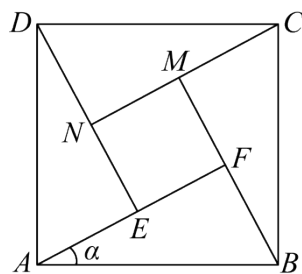
所以小正方形与大正方形面积之比为 $\frac{(a \cos \alpha - a \sin \alpha)^2}{a^2} = (\cos \alpha - \sin \alpha)^2 = \frac{1}{25}$,

化简得 $2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{24}{25}$, 且 $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$,

由 $2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \frac{2 \tan \alpha}{\tan^2 \alpha + 1} = \frac{24}{25}$,

解得 $\tan \alpha = \frac{3}{4}$.

故选: D.



9. B

【分析】利用正弦定理的边角变换，结合诱导公式与倍角公式求得 B ；利用面积公式与向量数量积的定义求得 A ，从而得解

【详解】因为 $a \sin \frac{A+C}{2} = b \sin A$ ，所以 $\sin A \cdot \sin \frac{\pi-B}{2} = \sin B \cdot \sin A$ ，
因为 $0 < A < \pi$ ，所以 $\sin A > 0$ ，所以 $\cos \frac{B}{2} = \sin B$ ，所以 $\cos \frac{B}{2} = 2 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}$ ；
因为 $0 < B < \pi$ ，所以 $0 < \frac{B}{2} < \frac{\pi}{2}$ ，所以 $\cos \frac{B}{2} > 0$ ，所以 $\sin \frac{B}{2} = \frac{1}{2}$ ，
所以 $\frac{B}{2} = \frac{\pi}{6}$ ，所以 $\sin B = \frac{\pi}{3}$ ，
因为 $6S = \sqrt{3} \overline{AB} \cdot \overline{AC}$ ，所以 $6 \times \frac{1}{2} bc \sin A = \sqrt{3} |\overline{AB}| |\overline{AC}| \cos A = \sqrt{3} bc \cos A$ ，
所以 $\tan A = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，因为 $0 < A < \pi$ ，所以 $\tan A = \frac{\pi}{6}$ ，
所以 $C = \pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ ，则 $\triangle ABC$ 是直角三角形，

故选：B

10. A

【分析】分析函数解析式，发现函数 $f(x)$ 与函数 $g(x)$ 的变换关系，由此即可推断函数 $g(x) = \ln x - xe^{x+1}$ 的最大值.

【详解】 $f(x) = xe^x - \ln x$ ， $x > 0$ ，

令 $x = ex$ 有： $f(ex) = ex \cdot e^{ex} - \ln ex = x \cdot e^{x+1} - \ln x - 1$ ，

则 $f(ex) = -g(x) - 1$ ，即 $g(x) = -f(ex) - 1$ ，

由此知 $g(x)$ 的函数图象为： $f(x)$ 的图象通过横坐标变为原来的 $\frac{1}{e}$ ，纵坐标不变，得到 $f(ex)$ ，再关于 x 轴对称，得到 $-f(ex)$ ，最后再向下平移一个单位，得到 $g(x) = -f(ex) - 1$ ；

根据已知条件函数 $f(x) = xe^x - \ln x$ 的最小值为 m ，

由此可知函数 $g(x) = \ln x - xe^{x+1}$ 的最大值为 $-m - 1$ 。

故选：A

11. C

【分析】根据题意易得 AC 是四边形 $ABCD$ 外接圆的直径，利用线面垂直的性质得到 $\angle PDA$ 是二

面角 $P-CD-A$ 的平面角, PC 中点 O 为外接球球心, 设 $AD = x$, 求得外接球半径关于 x 的表达式, 求其最小值, 即可求球体最小体积.

【详解】由题意, A, B, C, D 在一个圆上, 所以 $\angle ADC + \angle ABC = 180^\circ$, 又 $AB \perp BC$, 所以 $\angle ADC = 90^\circ$, 即 $AD \perp DC$, 即 AC 是四边形 $ABCD$ 外接圆的直径, 由 $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $BC, CD, AC \subset$ 平面 $ABCD$, 则 $PA \perp BC, PA \perp AC, PA \perp CD$, $PA \cap AB = A$, $PA, AB \subset$ 平面 PAB , $\therefore BC \perp$ 平面 PAB , $PB \subset$ 平面 PAB , $BC \perp PB$, 同理可得 $CD \perp PD$, 则 $\angle PDA$ 就是二面角 $P-CD-A$ 的平面角,

故 $\angle PDA = 45^\circ$, 设 $AD = x$, $0 < x < 4$, 则 $PA = x$, $CD = 4 - x$,

$$\text{故 } AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{2x^2 - 8x + 16},$$

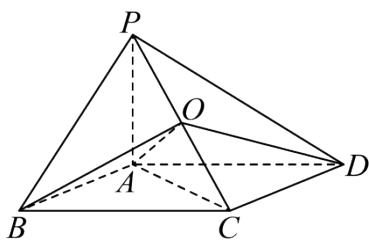
且 $\triangle PAC$, $\triangle PBC$, $\triangle PDC$ 都是以 PC 为斜边的直角三角形,

所以 PC 中点 O 为四棱锥 $P-ABCD$ 外接球的球心,

$$\therefore \text{外接球半径 } R = \frac{PC}{2} = \frac{\sqrt{3x^2 - 8x + 16}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + \frac{32}{3}}, \text{ 当 } x = \frac{4}{3} \text{ 时, } R_{\min} = \frac{2\sqrt{6}}{3},$$

$$\text{此时球 } O \text{ 的体积的最小值为 } \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \times \left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^3 = \frac{64\sqrt{6}}{27}\pi.$$

故选: C.



12. B

【分析】转化为 $f'(x) = e^x - \frac{1}{a+1}x - b \geq 0$ 恒成立, 构造函数, 求导, 得到其单调性和最值, 从而

得到 $b \leq \frac{1}{a+1} + \frac{\ln(a+1)}{a+1}$, 故 $\frac{b}{a+1} \leq \frac{\ln(a+1)+1}{(a+1)^2}$, 换元后, 构造函数, 求导得到其单调性和最值, 求出答案.

【详解】函数 $f(x) = e^x - \frac{1}{2(a+1)}x^2 - bx$ 没有极值点，

$$\therefore f'(x) = e^x - \frac{1}{a+1}x - b \geq 0, \text{ 或 } f'(x) \leq 0 \text{ 恒成立,}$$

由 $y = e^x$ 指数爆炸的增长性, $f'(x)$ 不可能恒小于等于 0,

$$\therefore f'(x) = e^x - \frac{1}{a+1}x - b \geq 0 \text{ 恒成立.}$$

$$\text{令 } h(x) = e^x - \frac{1}{a+1}x - b, \text{ 则 } h'(x) = e^x - \frac{1}{a+1},$$

当 $a+1 < 0$ 时, $h'(x) > 0$ 恒成立, $h(x)$ 为 \mathbb{R} 上的增函数,

因为 $e^x \in (0, +\infty)$ 是增函数, $-\frac{1}{a+1}x - b \in (-\infty, +\infty)$ 也是增函数,

所以, 此时 $h(x) \in (-\infty, +\infty)$, 不合题意;

② 当 $a+1 > 0$ 时, $h'(x) = e^x - \frac{1}{a+1}$ 为增函数, 由 $h'(x) = 0$ 得 $x = -\ln(a+1)$,

$$\text{令 } h'(x) > 0 \Leftrightarrow x > -\ln(a+1), \quad h'(x) < 0 \Leftrightarrow x < -\ln(a+1)$$

$\therefore h(x)$ 在 $(-\infty, -\ln(a+1))$ 上单调递减, 在 $(-\ln(a+1), +\infty)$ 上单调递增,

当 $x = -\ln(a+1)$ 时, 依题意有 $h(x)_{\min} = h(-\ln(a+1)) = \frac{1}{a+1} + \frac{\ln(a+1)}{a+1} - b \geq 0$,

$$\text{即 } b \leq \frac{1}{a+1} + \frac{\ln(a+1)}{a+1},$$

$$\therefore a+1 > 0, \quad \therefore \frac{b}{a+1} \leq \frac{\ln(a+1)+1}{(a+1)^2},$$

$$\text{令 } a+1 = x (x > 0), \quad u(x) = \frac{\ln x + 1}{x^2} (x > 0),$$

$$\text{则 } u'(x) = \frac{x - (\ln x + 1) \cdot 2x}{x^4} = \frac{-(2 \ln x + 1)}{x^3},$$

$$\text{令 } u'(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{\sqrt{e}}, \quad \text{令 } u'(x) < 0, \quad \text{解得 } x > \frac{1}{\sqrt{e}},$$

$$\text{所以当 } x = \frac{1}{\sqrt{e}} \text{ 时, } u(x) \text{ 取最大值 } u\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{e}{2}.$$

$$\text{故当 } a+1 = \frac{1}{\sqrt{e}}, \quad b = \frac{\sqrt{e}}{2}, \quad \text{即 } a = \frac{\sqrt{e}}{e} - 1, \quad b = \frac{\sqrt{e}}{2} \text{ 时, } \frac{b}{a+1} \text{ 取得最大值 } \frac{e}{2}.$$

综上, 若函数 $h(x)$ 没有极值点, 则 $\frac{b}{a+1}$ 的最大值为 $\frac{e}{2}$.

故选: B.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/387155125044006060>