

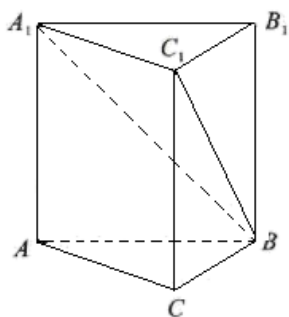
湖南省益阳市桃江第一中学 2024 年高考冲刺数学模拟试题

考生请注意：

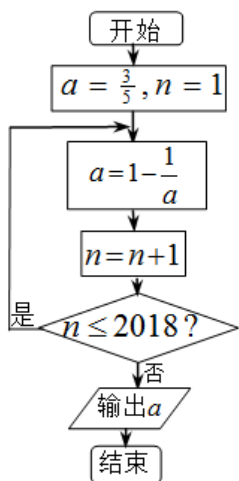
1. 答题前请将考场、试室号、座位号、考生号、姓名写在试卷密封线内，不得在试卷上作任何标记。
2. 第一部分选择题每小题选出答案后，需将答案写在试卷指定的括号内，第二部分非选择题答案写在试卷题目指定的位置上。
3. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 《九章算术》中记载，堑堵是底面为直角三角形的直三棱柱，阳马指底面为矩形，一侧棱垂直于底面的四棱锥.如图，在堑堵 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $AC \perp BC$ ， $AA_1 = 2$ ，当阳马 $B-ACC_1A_1$ 体积的最大值为 $\frac{4}{3}$ 时，堑堵 $ABC-A_1B_1C_1$ 的外接球的体积为（ ）



- A. $\frac{4}{3}\pi$ B. $\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$ C. $\frac{32}{3}\pi$ D. $\frac{64\sqrt{2}}{3}\pi$
2. 设集合 $M = \{x | x^2 + 3x + 2 > 0\}$ ，集合 $N = \{x | (\frac{1}{2})^x \leq 4\}$ ，则 $M \cup N =$ （ ）
 A. $\{x | x \geq -2\}$ B. $\{x | x > -1\}$ C. $\{x | x \leq -2\}$ D. $\mathbf{R}$
 3. 如果 $b < a < 0$ ，那么下列不等式成立的是（ ）
 A. $\log_2 |b| < \log_2 |a|$ B. $\left(\frac{1}{2}\right)^b < \left(\frac{1}{2}\right)^a$
 C. $b^3 > a^3$ D. $ab < b^2$
 4. 阅读如图的程序框图，运行相应的程序，则输出的 a 的值为（ ）



- A. $-\frac{2}{3}$ B. $-\frac{3}{2}$ C. $\frac{5}{2}$ D. $\frac{2}{5}$

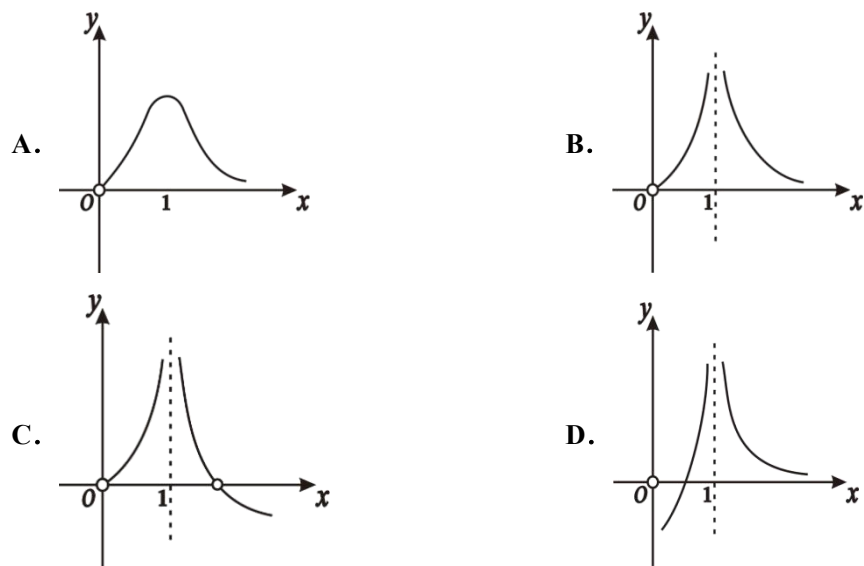
5. 已知抛物线 $C: x^2 = 2py (p > 0)$ 的焦点为 $F(0, 1)$, 若抛物线 C 上的点 A 关于直线 $l: y = 2x + 2$ 对称的点 B 恰好在射线 $y = 11 (x \leq 3)$ 上, 则直线 AF 被 C 截得的弦长为 ()

- A. $\frac{91}{9}$ B. $\frac{100}{9}$ C. $\frac{118}{9}$ D. $\frac{127}{9}$

6. 已知正项等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $S_2 = \frac{1}{9}$, $S_3 = \frac{7}{27}$, 则 $a_1 a_2 \cdots a_n$ 的最小值为 ()

- A. $(\frac{4}{27})^2$ B. $(\frac{4}{27})^3$ C. $(\frac{4}{27})^4$ D. $(\frac{4}{27})^5$

7. 函数 $f(x) = \frac{1}{x - \ln x - 1}$ 的图象大致是 ()

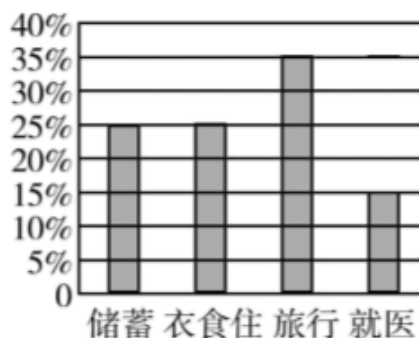
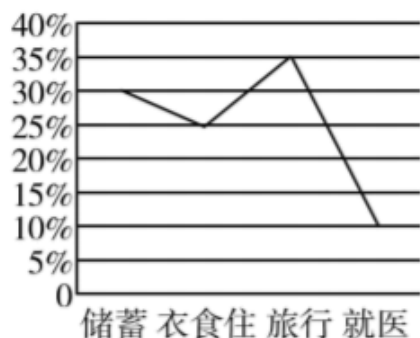


8. 已知复数 $z = \frac{5}{3 + 4i}$, 则复数 z 的虚部为 ()

- A. $\frac{4}{5}$ B. $-\frac{4}{5}$ C. $\frac{4}{5}i$ D. $-\frac{4}{5}i$

9. 某人 2018 年的家庭总收入为 80000 元, 各种用途占比如图中的折线图, 2019

年家庭总收入的各种用途占比统计如图中的条形图，已知2019年的就医费用比2018年的就医费用增加了4750元，则此人2019年的储蓄费用为（ ）

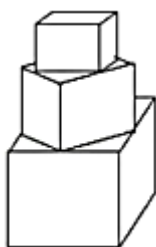


- A. 21250 元 B. 28000 元 C. 29750 元 D. 85000 元

10. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{3}{4}x$ ，且其右焦点为 $(5, 0)$ ，则双曲线 C 的方程为（ ）

- A. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ B. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ C. $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = 1$ D. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$

11. 有一改形塔几何体由若干个正方体构成，构成方式如图所示，上层正方体下底面的四个顶点是下层正方体上底面各边的中点. 已知最底层正方体的棱长为 8，如果改形塔的最上层正方体的边长小于 1，那么该塔中正方体的个数至少是（ ）



- A. 8 B. 7 C. 6 D. 4

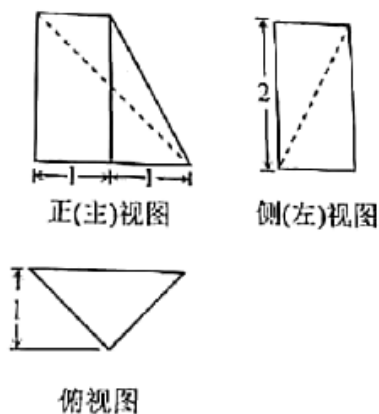
12. 体育教师指导 4 个学生训练转身动作，预备时，4 个学生全部面朝正南方向站成一排. 训练时，每次都让 3 个学生“向后转”，若 4 个学生全部转到面朝正北方向，则至少需要“向后转”的次数是（ ）

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 $C: xy = \sqrt{3}$ 上任意一点 P 到直线 $l: x + \sqrt{3}y = 0$ 的距离的最小值为_____.

14. 某四棱锥的三视图如图所示，那么此四棱锥的体积为_____.



15. 已知 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2$, $(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = -2$, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为_____.

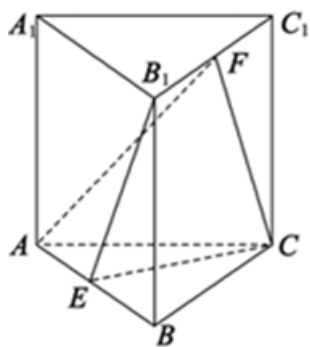
16. 已知 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{e}$ 是平面向量, $\vec{e}$ 是单位向量. 若 $\vec{a} \cdot \vec{e} = 2$, $\vec{b} \cdot \vec{e} = 3$, 且 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, 则 $|\vec{a} + \vec{b}|$ 的取值范围是_____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

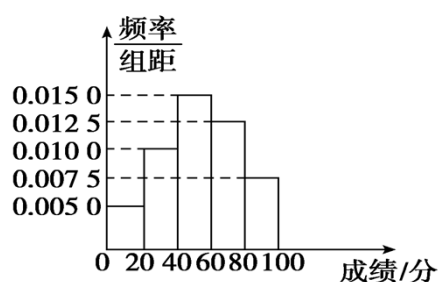
17. (12 分) 如图, 在正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AB = AA_1 = 2$, E , F 分别为 AB , B_1C_1 的中点.

(1) 求证: $B_1E \parallel$ 平面 ACF ;

(2) 求平面 CEB_1 与平面 ACF 所成二面角 (锐角) 的余弦值.



18. (12 分) 某中学准备组建“文科”兴趣特长社团, 由课外活动小组对高一学生文科、理科进行了问卷调查, 问卷共 100 道题, 每题 1 分, 总分 100 分, 该课外活动小组随机抽取了 200 名学生的问卷成绩 (单位: 分) 进行统计, 将数据按照 $[0, 20)$, $[20, 40)$, $[40, 60)$, $[60, 80)$, $[80, 100]$ 分成 5 组, 绘制的频率分布直方图如图所示, 若将不低于 60 分的称为“文科方向”学生, 低于 60 分的称为“理科方向”学生.



	理科方向	文科方向	总计
男			110
女		50	
总计			

- (1) 根据已知条件完成下面 2×2 列联表，并据此判断是否有 99% 的把握认为是否为“文科方向”与性别有关？
- (2) 将频率视为概率，现在从该校高一学生中用随机抽样的方法每次抽取 1 人，共抽取 3 次，记被抽取的 3 人中“文科方向”的人数为 ξ ，若每次抽取的结果是相互独立的，求 ξ 的分布列、期望 $E(\xi)$ 和方差 $D(\xi)$ 。

参考公式： $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ ，其中 $n = a+b+c+d$ 。

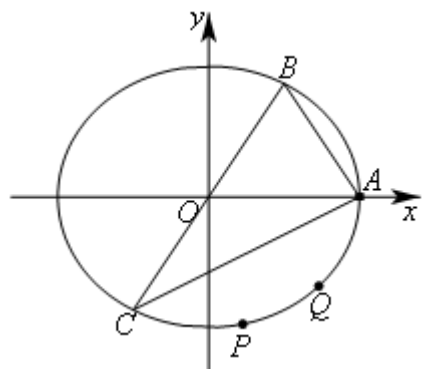
参考临界值：

$P(K^2 \geq k_0)$	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

19. (12 分) 已知函数 $f(x) = ax^2 + ax + 1 - e^{2x}$ 。

- (1) 若函数 $g(x) = f'(x)$ ，试讨论 $g(x)$ 的单调性；
- (2) 若 $\forall x \in (0, +\infty)$ ， $f(x) < 0$ ，求 a 的取值范围。

20. (12 分) 如图，椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的长轴长为 4，点 A 、 B 、 C 为椭圆上的三个点， A 为椭圆的右端点， BC 过中心 O ，且 $|BC| = 2|AB|$ ， $S_{\triangle ABC} = 3$ 。



- (1) 求椭圆的标准方程；
- (2) 设 P 、 Q 是椭圆上位于直线 AC 同侧的两个动点（异于 A 、 C ），且满足 $\angle PBC = \angle QBA$ ，试讨论直线 BP 与直线 BQ 斜率之间的关系，并求证直线 PQ 的斜率为定值。

21. (12 分) 已知动圆 M 恒过点 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ ，且与直线 $y = -\frac{1}{2}$ 相切。

- (1) 求圆心 M 的轨迹 E 的方程；

(2) 设 P 是轨迹 E 上横坐标为 2 的点, OP 的平行线 l 交轨迹 E 于 A, B 两点, 交轨迹 E 在 P 处的切线于点 T , 问: 是否存在实常数 λ 使 $|PT|^2 = \lambda |TA| \cdot |TB|$, 若存在, 求出 λ 的值; 若不存在, 说明理由.

22. (10 分) 已知点 $B(0, -2)$ 和椭圆 $M: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$. 直线 $l: y = kx + 1$ 与椭圆 M 交于不同的两点 P, Q .

(1) 当 $k = \frac{1}{2}$ 时, 求 $\triangle PBQ$ 的面积;

(2) 设直线 PB 与椭圆 M 的另一个交点为 C , 当 C 为 PB 中点时, 求 k 的值.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、B

【解析】

利用均值不等式可得 $V_{B-ACC_1A_1} = \frac{1}{3} BC \cdot AC \cdot AA_1 = \frac{2}{3} BC \cdot AC \leq \frac{1}{3} (BC^2 + AC^2) = \frac{1}{3} AB^2$, 即可求得 AB , 进而求得外接球的半径, 即可求解.

【详解】

由题意易得 $BC \perp$ 平面 ACC_1A_1 ,

所以 $V_{B-ACC_1A_1} = \frac{1}{3} BC \cdot AC \cdot AA_1 = \frac{2}{3} BC \cdot AC \leq \frac{1}{3} (BC^2 + AC^2) = \frac{1}{3} AB^2$,

当且仅当 $AC = BC$ 时等号成立,

又阳马 $B-ACC_1A_1$ 体积的最大值为 $\frac{4}{3}$,

所以 $AB = 2$,

所以堑堵 $ABC-A_1B_1C_1$ 的外接球的半径 $R = \sqrt{\left(\frac{AA_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \sqrt{2}$,

所以外接球的体积 $V = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{8\sqrt{2}}{3} \pi$,

故选:B

【点睛】

本题以中国传统文化为背景,考查四棱锥的体积、直三棱柱的外接球的体积、基本不等式的应用,体现了数学运算、直观想象等核心素养.

2、D

【解析】

试题分析: 由题 $M = \{x | x^2 + 3x + 2 > 0\} = \{x | x < -2 \text{ 或 } x > -1\}$,

$$N = \left\{x \mid \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 4\right\} = \left\{x \mid \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\right\} = N = \{x | x \geq -2\}, \therefore M \cup N = R, \text{ 选 D}$$

考点: 集合的运算

3、D

【解析】

利用函数的单调性、不等式的基本性质即可得出.

【详解】

$$\because b < a < 0, \therefore \log_2 |b| > \log_2 |a|, \left(\frac{1}{2}\right)^b > \left(\frac{1}{2}\right)^a, b^3 < a^3, ab < b^2.$$

故选: D.

【点睛】

本小题主要考查利用函数的单调性比较大小, 考查不等式的性质, 属于基础题.

4、C

【解析】

根据给定的程序框图, 计算前几次的运算规律, 得出运算的周期性, 确定跳出循环时的 n 的值, 进而求解 a 的值, 得到答案.

【详解】

$$\text{由题意, } a = \frac{3}{5}, n = 1,$$

$$\text{第 1 次循环, } a = -\frac{2}{3}, n = 2, \text{ 满足判断条件;}$$

$$\text{第 2 次循环, } a = \frac{5}{2}, n = 3, \text{ 满足判断条件;}$$

$$\text{第 3 次循环, } a = \frac{3}{5}, n = 4, \text{ 满足判断条件;}$$

L L

可得 a 的值满足以 3 项为周期的计算规律,

$$\text{所以当 } n = 2019 \text{ 时, 跳出循环, 此时 } n \text{ 和 } n = 3 \text{ 时的值对应的 } a \text{ 相同, 即 } a = \frac{5}{2}.$$

故选：C.

【点睛】

本题主要考查了循环结构的程序框图的计算与输出问题，其中解答中认真审题，得出程序运行时的计算规律是解答的关键，着重考查了推理与计算能力.

5、B

【解析】

由焦点得抛物线方程，设 A 点的坐标为 $(m, \frac{1}{4}m^2)$ ，根据对称可求出点 A 的坐标，写出直线 AF 方程，联立抛物线求交点，计算弦长即可.

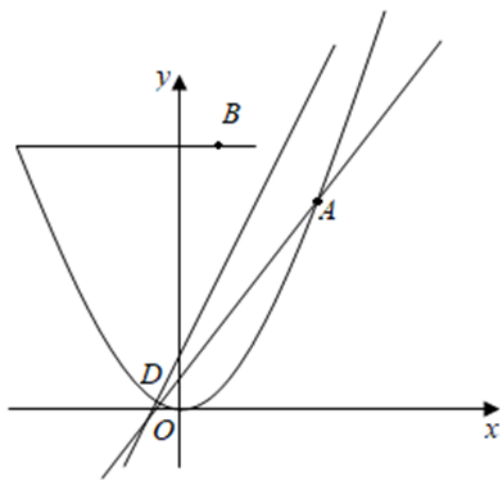
【详解】

抛物线 $C: x^2=2py(p>0)$ 的焦点为 $F(0,1)$ ，

则 $\frac{p}{2}=1$ ，即 $p=2$ ，

设 A 点的坐标为 $(m, \frac{1}{4}m^2)$ ， B 点的坐标为 $(n, 11)$ ， $n \leq 3$ ，

如图：



$$\therefore \begin{cases} \frac{11 - \frac{1}{4}m^2}{n - m} = -\frac{1}{2} \\ \frac{11 + \frac{1}{4}m^2}{2} = 2 \times \frac{m+n}{2} + 2 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} m=6 \\ n=2 \end{cases}, \text{ 或 } \begin{cases} m=-\frac{34}{3} \\ n=\frac{35}{9} \end{cases} \text{ (舍去),}$$

$\therefore A(6,9)$

∴直线 AF 的方程为 $y = \frac{4}{3}x + 1$,

设直线 AF 与抛物线的另一个交点为 D ,

$$\text{由 } \begin{cases} y = \frac{4}{3}x + 1 \\ x^2 = 4y \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} x = 6 \\ y = 9 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = -\frac{2}{3} \\ y = \frac{1}{9} \end{cases},$$

$$\therefore D\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{9}\right),$$

$$\therefore |AD| = \sqrt{\left(6 + \frac{2}{3}\right)^2 + \left(9 - \frac{1}{9}\right)^2} = \frac{100}{9},$$

故直线 AF 被 C 截得的弦长为 $\frac{100}{9}$.

故选: B .

【点睛】

本题主要考查了抛物线的标准方程, 简单几何性质, 点关于直线对称, 属于中档题.

6、D

【解析】

由 $S_2 = \frac{1}{9}, S_3 = \frac{7}{27}$, 可求出等比数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = \frac{2^{n-1}}{27}$, 进而可知当 $1 \leq n \leq 5$ 时, $a_n < 1$; 当 $n \geq 6$ 时,

$a_n > 1$, 从而可知 $a_1 a_2 \cdots a_n$ 的最小值为 $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$, 求解即可.

【详解】

设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 则 $q > 0$,

$$\text{由题意得, } a_3 = S_3 - S_2 = \frac{4}{27}, \text{ 得 } \begin{cases} a_1 q^2 = \frac{4}{27} \\ a_1 + a_1 q = \frac{1}{9} \\ q > 0 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a_1 = \frac{1}{27} \\ q = 2 \end{cases},$$

$$\text{得 } a_n = \frac{2^{n-1}}{27}.$$

当 $1 \leq n \leq 5$ 时, $a_n < 1$; 当 $n \geq 6$ 时, $a_n > 1$,

则 $a_1 a_2 \cdots a_n$ 的最小值为 $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 = (a_3)^5 = \left(\frac{4}{27}\right)^5$.

故选：D.

【点睛】

本题考查等比数列的通项公式的求法，考查等比数列的性质，考查学生的计算求解能力，属于中档题.

7、B

【解析】

根据函数表达式,把分母设为新函数,首先计算函数定义域,然后求导,根据导函数的正负判断函数单调性,对应函数图像得到答案.

【详解】

设 $g(x) = x - \ln x - 1$, $g(1) = 0$, 则 $f(x) = \frac{1}{x - \ln x - 1}$ 的定义域为 $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$. $g'(x) = 1 - \frac{1}{x}$, 当 $x \in (1, +\infty)$,

$g'(x) > 0$, $g(x)$ 单增, 当 $x \in (0, 1)$, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单减, 则 $g(x) \geq g(1) = 0$. 则 $f(x)$ 在 $x \in (0, 1)$ 上单增,

$x \in (1, +\infty)$ 上单减, $f(x) > 0$. 选 B.

【点睛】

本题考查了函数图像的判断,用到了换元的思想,简化了运算,同学们还可以用特殊值法等方法进行判断.

8、B

【解析】

利用复数的运算法则、虚部的定义即可得出

【详解】

$$z = \frac{5}{3+4i} = \frac{5(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i,$$

则复数 z 的虚部为 $-\frac{4}{5}$.

故选：B.

【点睛】

本题考查了复数的运算法则、虚部的定义，考查了推理能力与计算能力，属于基础题.

9、A

【解析】

根据 2018 年的家庭总收入为 80000 元，且就医费用占 10% 得到就医费用 $80000 \times 10\% = 8000$ ，再根据 2019 年的就医费用比 2018 年的就医费用增加了 4750 元，得到 2019 年的就医费用，然后由 2019 年的就医费用占总收入 15%，得到 2019 年的家庭总收入再根据储蓄费用占总收入 25% 求解.

【详解】

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/388011015027006062>