

重难点突破 05 利用导数研究恒(能)成立问题

目录

01 方法技巧与总结	2
02 题型归纳总结	3
题型一：直接法	3
题型二：端点恒成立	5
题型三：端点不成立	6
题型四：分离参数之全分离，半分离，换元分离	7
题型五：洛必达法则	9
题型六：同构法与朗博同构	10
题型七：必要性探路	11
题型八： $\max$ ， $\min$ 函数问题	13
题型九：构造函数技巧	14
题型十：双变量最值问题	16
题型十一：恒成立问题求参数的具体值	17
03 过关测试	18

01

// 方法技巧与总结 //

1、利用导数研究不等式恒成立问题的求解策略：

- (1) 通常要构造新函数，利用导数研究函数的单调性，求出最值，从而求出参数的取值范围；
- (2) 利用可分离变量，构造新函数，直接把问题转化为函数的最值问题；
- (3) 根据恒成立或有解求解参数的取值时，一般涉及分离参数法，但压轴试题中很少碰到分离参数后构造的新函数能直接求出最值点的情况，进行求解，若参变分离不易求解问题，就要考虑利用分类讨论法和放缩法，注意恒成立与存在性问题的区别。

2、利用参变量分离法求解函数不等式恒（能）成立，可根据以下原则进行求解：

- (1) $\forall x \in D, m \leq f(x) \Leftrightarrow m \leq f(x)_{\min}$;
- (2) $\forall x \in D, m \geq f(x) \Leftrightarrow m \geq f(x)_{\max}$;
- (3) $\exists x \in D, m \leq f(x) \Leftrightarrow m \leq f(x)_{\max}$;
- (4) $\exists x \in D, m \geq f(x) \Leftrightarrow m \geq f(x)_{\min}$.

3、不等式的恒成立与有解问题，可按如下规则转化：

一般地，已知函数 $y=f(x)$ ， $x \in [a,b]$ ， $y=g(x)$ ， $x \in [c,d]$ 。

- (1) 若 $\forall x_1 \in [a,b]$ ， $\forall x_2 \in [c,d]$ ，有 $f(x_1) < g(x_2)$ 成立，则 $f(x)_{\max} < g(x)_{\min}$ ；
- (2) 若 $\forall x_1 \in [a,b]$ ， $\exists x_2 \in [c,d]$ ，有 $f(x_1) < g(x_2)$ 成立，则 $f(x)_{\max} < g(x)_{\max}$ ；
- (3) 若 $\exists x_1 \in [a,b]$ ， $\exists x_2 \in [c,d]$ ，有 $f(x_1) < g(x_2)$ 成立，则 $f(x)_{\min} < g(x)_{\max}$ ；
- (4) 若 $\forall x_1 \in [a,b]$ ， $\exists x_2 \in [c,d]$ ，有 $f(x_1) = g(x_2)$ 成立，则 $f(x)$ 的值域是 $g(x)$ 的值域的子集。

4、法则 1 若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足下列条件：

- (1) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ 及 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ；
- (2) 在点 a 的去心邻域 $(a-\varepsilon, a) \cup (a, a+\varepsilon)$ 内， $f(x)$ 与 $g(x)$ 可导且 $g'(x) \neq 0$ ；
- (3) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ ，

那么 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ 。

法则 2 若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足下列条件：(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ 及 $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ ；

- (2) $\exists A > 0$ ， $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $(-\infty, A)$ 与 $(A, +\infty)$ 上可导，且 $g'(x) \neq 0$ ；

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l,$$

$$\text{那么 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l.$$

法则3 若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足下列条件:

$$(1) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \text{ 及 } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty;$$

(2) 在点 a 的去心邻域 $(a-\varepsilon, a) \cup (a, a+\varepsilon)$ 内, $f(x)$ 与 $g(x)$ 可导且 $g'(x) \neq 0$;

$$(3) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l,$$

$$\text{那么 } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l.$$

注意: 利用洛必达法则求未定式的极限是微分学中的重点之一, 在解题中应注意:

(1) 将上面公式中的 $x \rightarrow a$, $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow a^+$, $x \rightarrow a^-$ 洛必达法则也成立.

(2) 洛必达法则可处理 $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, 1^∞ , ∞^0 , 0^0 , $\infty - \infty$ 型.

(3) 在着手求极限以前, 首先要检查是否满足 $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, 1^∞ , ∞^0 , 0^0 , $\infty - \infty$ 型定式,

否则滥用洛必达法则会出错. 当不满足三个前提条件时, 就不能用洛必达法则, 这时称洛必达法则不适用, 应从另外途径求极限.

(4) 若条件符合, 洛必达法则可连续多次使用, 直到求出极限为止.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{g''(x)}, \text{ 如满足条件, 可继续使用洛必达法则.}$$

02

// 题型归纳与总结 //

题型一: 直接法

【典例 1-1】(2024 · 河南信阳 · 模拟预测) 已知函数 $f(x) = x \ln x$, $h(x) = \sqrt{x}(x-1)$ ($x > 0$).

(1) 试比较 $f(x)$ 与 $h(x)$ 的大小;

(2) 若 $f(x) \leq (x-1)(ax-a+1)$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

【典例 1-2】(2024·山西·模拟预测) 已知函数 $f(x)=\frac{2}{ax}$, $g(x)=\ln x-ax$, $a \neq 0$.

(1) 讨论函数 $g(x)$ 的单调性;

(2) 当 $a > 0$ 时, $F(x)=g(x)-f(x) \leq 0$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

【变式 1-1】(2024·四川绵阳·模拟预测) 已知函数 $f(x)=a\ln x-\frac{1}{x}+x(a \in \mathbb{R})$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的零点个数;

(2) 若关于 x 的不等式 $f(x) \leq 2x - \frac{2}{e}$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 求 a 的取值范围.

【变式 1-2】(2024·湖南衡阳·三模) 已知函数 $f(x)=(x-1)e^x-ax^2+1$.

(1) 当 $a=e$ 时, 求函数 $f(x)$ 在点 $P(1, f(1))$ 处的切线方程;

(2) 若 $x \in [0, +\infty)$, 不等式 $f(x) \geq 0$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

【变式 1-3】(2024·四川成都·模拟预测) 设 $f(x)=(a^2-1)e^x+\sin x-3$

(1) 当 $a=\sqrt{2}$, 求函数 $f(x)$ 的零点个数.

(2) 函数 $h(x)=f(x)-\sin x-x^2+2ax+2$, 若对任意 $x \geq 0$, 恒有 $h(x) > 0$, 求实数 a 的取值范围

题型二：端点恒成立

【典例 2-1】(2024·广西·三模) 已知函数 $f(x) = e^x - x$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的极值;

(2) 若对任意 $x > 0$, $f(x) > \frac{1}{2}ax^2 + 1$, 求 a 的取值范围.

【典例 2-2】(2024·四川·模拟预测) 已知函数 $f(x) = e^x - \frac{a}{3}x^3 - 1$.

(1) 若 $f(x)$ 有 3 个极值点, 求 a 的取值范围;

(2) 若 $x \geq 0$, $f(x) \geq ax^2 + x$, 求 a 的取值范围.

【变式 2-1】(2024·山西·三模) 已知函数 $f(x) = ae^x - x + 1$

(1) 当 $a = 1$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线与两坐标轴围成的三角形的面积;

(2) 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \geq ax^2$ 恒成立, 求 a 的取值范围

【变式 2-2】(2024·河北·模拟预测) 已知函数 $f(x) = \frac{ax}{e^x}$, $g(x) = \sin x + \cos x$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 求 $f(x)$ 的极值;

(2) 当 $x \in (0, \pi)$ 时, $f(x) \leq g(x)$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

题型三：端点不成立

【典例 3-1】(2024·河南郑州·模拟预测) 已知 $f(x) = (x-a-1)e^x - \frac{1}{2}ax^2 + a^2x - 1$. ($a \in \mathbf{R}$)

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $a = -1$, 且存在 $x \in (0, +\infty)$, 使得 $f(x) \leq \ln x + \frac{1}{2}x^2 + (b+1)x$, 求 b 的取值范围.

【典例 3-2】(2024·山东泰安·三模) 已知函数 $f(x) = x\left(a - \frac{\ln x}{x}\right)$ ($a > 0$).

(1) 讨论 $f(x)$ 的最值;

(2) 若 $a = 1$, 且 $f(x) \leq \frac{ke^x - x}{x}$, 求 k 的取值范围.

【变式 3-1】(2024·四川·模拟预测) 已知函数 $f(x) = ax \ln x - 2x + b$ ($a, b \in \mathbf{R}$) 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y = -x$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的极值;

(2) 设 $g(x) = e^x \left[xf\left(\frac{1}{x}\right) + 2 \right] + mx$ ($m \in \mathbf{R}$), 若 $g(x) \geq 0$ 恒成立, 求 m 的取值范围.

【变式 3-2】(2024·安徽合肥·模拟预测) $f(x) = e^{x-a}$ ($a \in \mathbf{R}$).

(1) 若 $f(x)$ 的图象在点 $A(x_0, f(x_0))$ 处的切线经过原点, 求 x_0 ;

(2) 对任意的 $x \in [0, +\infty)$, 有 $f(x) \geq \sin x$, 求 a 的取值范围.

【变式 3-3】 (2024 · 浙江金华 · 三模) 已知函数 $f(x) = ax + x \ln x$ 在 $x = e$ (e 为自然对数的底数) 处取得极值.

(1) 求实数 a 的值;

(2) 若不等式 $\frac{f(x)}{x} > k \left(1 + \frac{1}{x}\right)$ 恒成立, 求 k 的范围.

题型四：分离参数之全分离，半分离，换元分离

【典例 4-1】 (2024 · 陕西咸阳 · 三模) 已知函数 $f(x) = \frac{a \ln x}{x} + x - 1$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 求函数 $g(x) = f(x) - x$ 极值;

(2) 若对任意 $x \in [1, +\infty)$, $f(x) \geq a + 1$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

【典例 4-2】 (2024 · 湖南衡阳 · 模拟预测) 已知函数 $f(x) = e^x - x$, 函数 $g(x) = x^2 + \frac{2}{a}x - 2$ ($a \neq 0$).

(1) 若直线 $x = t$ ($t \in \mathbb{R}$) 与函数 $f(x)$ 交于点 A , 直线 $x = e' - t$ ($t \in \mathbb{R}$) 与函数 $g(x)$ 交于点 B , 且函数 $f(x)$ 在点 A 处的切线与函数 $g(x)$ 在点 B 处的切线相互平行或重合, 求 a 的取值范围;

(2) 函数 $h(x) = x \ln x - \frac{a}{2}g(x)$ 在其定义域内有两个不同的极值点 x_1, x_2 , 且 $x_1 > x_2$, 存在实数 $\lambda > 0$ 使得不等式 $e^{1+\lambda} < x_1 \cdot x_2^2$ 恒成立, 求实数 λ 的取值范围.

【变式 4-1】 已知函数 $f(x) = (x^2 + 2x + 2)e^x$.

(1)若函数 $m(x)=\frac{1}{3}ax^3+2ax^2+4ax$, $F(x)=f(x)+m(x)$, 讨论函数 $F(x)$ 的单调性;

(2)若不等式 $f(x)\geq(x^2+2)e^x+(x+1)^2(\ln x+bx+1)$ 恒成立, 求实数 b 的取值范围.

【变式 4-2】(2024·山东济南·三模) 已知函数 $f(x)=a^x+2^x-2$, 其中 $a>0$ 且 $a\neq 1$.

(1)若 $f(x)$ 是偶函数, 求 a 的值;

(2)若 $x>0$ 时, $f(x)>0$, 求 a 的取值范围.

【变式 4-3】(2024·辽宁沈阳·模拟预测) 设函数 $f(x)=x\ln x-x-\frac{1}{2}ax^2$ 的两个极值点分别为

$x_1, x_2 (x_1 < x_2)$.

(1)求实数 a 的取值范围;

(2)若不等式 $\lambda < a(x_1+x_2)$ 恒成立, 求正数 λ 的取值范围 (其中 $e=2.71828\ldots$ 为自然对数的底数).

【变式 4-4】(2024·全国·模拟预测) 已知函数 $f(x)=ae^x+x+2$, 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线与 x 轴平行.

(1)求实数 a 的值;

(2)若对于任意 $x\in[e, +\infty)$, $f(x)\leq\lambda x$ 恒成立, 求实数 λ 的取值范围.

【变式 4-5】(2024·四川绵阳·模拟预测) 已知函数 $f(x)=\frac{m}{2}x^2-x-\ln x (m\in R)$.

(1)当 $m=2$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2)若 $\forall x>0$, 不等式 $f(x)>x^2$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

题型五：洛必达法则

【典例 5-1】已知函数 $f(x)=a \ln x+bx(a, b \in R)$ 在 $x=\frac{1}{2}$ 处取得极值，且曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线与直线 $x-y+1=0$ 垂直.

(1)求实数 a, b 的值;

(2)若 $\forall x \in [1, +\infty)$ ，不等式 $f(x) \leq (m-2)x - \frac{m}{x}$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

【典例 5-2】设函数 $f(x)=1-e^{-x}$. 当 $x \geq 0$ 时， $f(x) \leq \frac{x}{ax+1}$ ，求 a 的取值范围.

【变式 5-1】设函数 $f(x)=\frac{\sin x}{2+\cos x}$. 如果对所有 $x \geq 0$ ，都有 $f(x) \leq ax$ ，求 a 的取值范围.

【变式 5-2】(2024·浙江宁波·模拟预测) 已知函数 $f(x)=e^x-ax-1$.

(1)讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2)若对任意的 $x \geq 0, f(x) \geq 0$ 恒成立，求 a 的范围.

题型六：同构法与朗博同构

【典例 6-1】已知函数 $f(x) = e^x, g(x) = \frac{1}{x}$.

(1) 若 $h(x) = f(x) - mg(x) (m \in \mathbf{R})$, 判断 $h(x)$ 的零点个数;

(2) 当 $x > 0$ 时, 不等式 $exf(x) \geq \frac{a+1}{g(x)} + \ln x + 2$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

【典例 6-2】(2024 · 全国 · 模拟预测) 已知函数 $f(x) = ax^2 - 2e^a \ln x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 当 $x > 2$ 时, $f(x) > 0$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

【变式 6-1】已知函数 $f(x) = x(a - e^{2x})$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 极值点的个数;

(2) 对任意的 $x > 0$, 都有 $f(x) \leq -\ln x - 1$, 求实数 a 的取值范围.

【变式 6-2】(2024 · 海南海口 · 一模) 已知函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x-1} + 1$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 已知 $\lambda > 0$, 若存在 $x \in (1, +\infty)$, 不等式 $\frac{\lambda x}{(\sqrt{e})^{\lambda x} + 1} \geq \frac{(\sqrt{e})^{\lambda x} - 1}{x-1} \geq \ln x$ 成立, 求实数 λ 的最大值.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/388054011067006130>