上海市浦东新区建平中学2024届高三上学期11月质量检测数学试题

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、填空题

1．已知全集为$\mathbf{R}$，集合$A=\left(0,+\infty\right)$，则$\overline{A}=$___.

2．半径为3的球的体积等于____.

3．已知向量$\vec{a}=(1,-2)$，$\vec{b}=(3,4)$，则向量$\vec{a}$在向量$\vec{b}$方向上的数量投影为_____.

4．双曲线$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$的焦点到渐近线的距离为______.

5．若x_1和x_2是函数$y=\cos 2x$互异的两个零点，则$|x_1-x_2|$的最小值为___.

6．设$\overline{z}$为复数z的共轭复数，若复数z满足$z^2+z+3=0$，则$z+\overline{z}=$___.

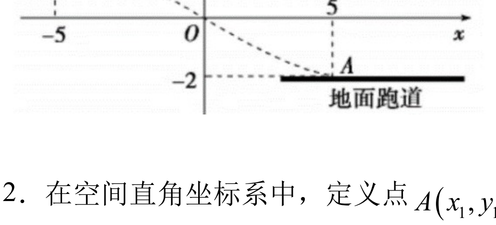
7．已知方程$2|x|+3|y|=6$的曲线是一个菱形，以此菱形的四个顶点为顶点的椭圆方程是___.

8．已知正四棱柱的侧棱长为2，体积为6，则该正四棱柱的表面积为___.

9．关于x的不等式$x\lg|x|>0$的解集是___.

10．已知α,β均为锐角，且$\cos(\alpha+\beta)=\sin(\alpha-\beta)$，则$\tan\alpha=$____.

11．如图所示，某飞行器在4千米高空水平飞行，从距着陆点A的水平距离10千米处下降，已知下降飞行轨迹为某三次函数图象的一部分，则此函数的解析式为___.



12．在空间直角坐标系中，定义点$A\left(x_1,y_1,z_1\right)$和点$B\left(x_2,y_2,z_2\right)$两点之间的“直角距

离” $d_{(A,B)}=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|+|z_1-z_2|$．若A和$B$两点之间的距离是$\sqrt{3}$，则A和$B$两点之间的“直角距离”的取值范围是___.

二、单选题

13．已知集合$A=\left\{x \middle| x=\frac{m\pi}{2}, m\in\mathbf{Z}\right\}$，集合$B=\left\{x \middle| x=\frac{n\pi}{4}, n\in\mathbf{Z}\right\}$，则$A\cap B=$（　）

A．$\varnothing$　　B．A　　C．B　　D．$\{x|x=k\pi, k\in\mathbf{Z}\}$

14．设$\vec{a}=(x_1,y_1),\vec{b}=(x_2,y_2)$，则“$\frac{y_1}{x_1}=\frac{y_2}{x_2}$”是“$\vec{a}//\vec{b}$”的（　）

A．充分非必要条件　　B．必要非充分条件　　C．充分必要条件　　D．非充分非必要条件

15．设无穷数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$\{S_n\}$为严格增数列，则数列$\{a_n\}$（　）

A．所有项都大于0　　B．至多有一项不大于0

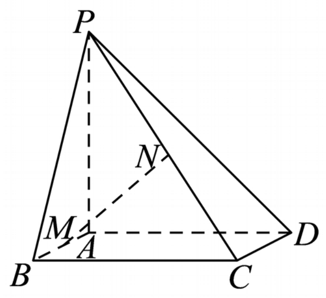
C．可以有不止一项的有限项不大于0　　D．可以有无穷多项不大于0

16．若空间中$n(n\geq 3)$个不同的点两两距离都相等，则正整数n的最大值为（　）

A．6　　B．5　　C．4　　D．3

三、解答题

17．如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$是矩形，$PA\perp$平面$ABCD$，$AB=1$，$AP=AD=2$.



(1)若点M，N分别为AB，PC的中点，求证：直线$MN//$平面PAD；

(2)求直线PB与平面PCD所成角的正弦值.

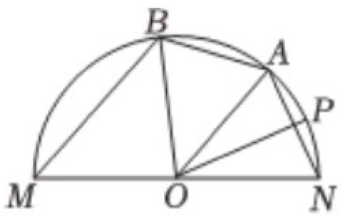
18．设{a_n}是公比为正数的等比数列$a_1=2$，$a_3=a_2+4$．

（Ⅰ）求{a_n}的通项公式;

（Ⅱ）设{b_n}是首项为1，公差为2的等差数列，求数列{a_n+b_n}的前n项和S_n．

19．某中学为美化校园将一个半圆形边角地改造为花园．如图所示，O为圆心，半径

为1千米，点A、B、P都在半圆弧上，设$\angle NOP=\angle POA=\theta$，$\angle AOB=2\theta$，其中$0<\theta<\frac{\pi}{4}$．



(1)若在花园内铺设一条参观的线路，由线段NA、AB、BM三部分组成，求当θ取何值时，参观的线路最长；

(2)若在花园内的扇形ONP和四边形$OMBA$内种满杜鹃花，求当θ取何值时，杜鹃花的种植总面积最大．

20．已知A,B分别是椭圆Γ: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$的左、右顶点，过点$P(0,-3)$、斜率为$k$的直线$l$交椭圆$\Gamma$于$M$、$N$两个不同的点．

(1)求椭圆Γ的焦距和离心率；

(2)若点B落在以线段MN为直径的圆的外部，求k的取值范围；

(3)若 $k>0$，设直线 AM、AN 分别交 y 轴于点 S、T, $\overrightarrow{PS}=\lambda\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{PT}=\mu\overrightarrow{OP}$，求 $\lambda+\mu$ 的取值范围．

21．若存在 $x_0\in D$ 使得 $f(x)\leq f(x_0)$ 对任意 $x\in D$ 恒成立，则称 x_0 为函数 $f(x)$ 在 D 上的最大值点，记函数 $f(x)$ 在 D 上的所有最大值点所构成的集合为 M

(1)若 $f(x)=-x^2+2x+1, D=\mathbf{R}$，求集合 M；

(2)若 $f(x)=\dfrac{(2^x-x)x}{4^x}, D=\mathbf{R}$，求集合 M；

(3)设 a 为大于 1 的常数，若 $f(x)=x+a\sin x, D=[0,b]$，证明，若集合 M 中有且仅有两个元素，则所有满足条件的 b 从小到大排列构成一个等差数列．

参考答案：

1．$\left(-\infty,0\right]$

【分析】利用补集的定义可求得集合$\overline{A}$.

【详解】因为全集为$\mathbf{R}$，集合$A=\left(0,+\infty\right)$，则$\overline{A}=\left(-\infty,0\right]$.

故答案为：$\left(-\infty,0\right]$.

2．36π

【分析】由球的体积公式$V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$代入运算即可.

【详解】解：因为球的半径为3，则球的体积为$\dfrac{4}{3}\pi\times3^3=36\pi$，

故答案为36π.

【点睛】本题考查了球的体积公式，属基础题.

3．-1

【分析】根据向量投影公式结合向量的坐标运算求解即可.

【详解】由题意可得：$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times3+\left(-2\right)\times4=-5,\left|\vec{b}\right|=\sqrt{3^2+4^2}=5$，

所以向量$\vec{a}$在向量$\vec{b}$方向上的数量投影为$\left|\vec{a}\right|\cos\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle=\left|\vec{a}\right|\times\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}=\dfrac{-5}{5}=-1$.

故答案为：-1.

4．2

【详解】试题分析：由题意得，双曲线的右焦点$F(\sqrt{13},0)$，其中一条渐近线的方程为

$y=\frac{2}{3}x \Rightarrow 2x-3y=0$，所以焦点到渐近线的距离为$d=\frac{2\sqrt{13}}{\sqrt{2^2+3^2}}=2$.

考点：点到直线的距离公式及双曲线的性质.

5．$\frac{\pi}{2}$/$\frac{1}{2}\pi$

【分析】分析可知，$(x_1,0)$、$(x_2,0)$为函数$y=\cos 2x$的两个对称中心，可知$|x_1-x_2|$的最小值为函数$y=\cos 2x$的最小正周期的一半，结合余弦型函数的周期公式可求得结果.

【详解】由题意可知，$(x_1,0)$、$(x_2,0)$为函数$y=\cos 2x$的两个对称中心，

则$|x_1-x_2|$的最小值为函数$y=\cos 2x$的最小正周期的一半，即$|x_1-x_2|_{\min}=\frac{1}{2}\times\frac{2\pi\pi}{2}=\frac{}{2}$.

故答案为：$\frac{\pi}{2}$.

6．-1

【分析】由题意可知，z、$\overline{z}$是关于实系数方程$x^2+x+3=0$的两个虚根，利用韦达定理可求得$z+\overline{z}$的值.

【详解】对于方程$x^2+x+3=0$，$\Delta=1-4\times3<0$，

由题意可知，z、$\overline{z}$是关于实系数方程$x^2+x+3=0$的两个虚根，

由韦达定理可得$z+\overline{z}=-1$.

故答案为：-1.

7．$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

【分析】作出方程$2|x|+3|y|=6$所表示的菱形，求出菱形四个顶点的坐标，设所求椭圆的方程为$mx^2+ny^2=1$，求出m、n的值，即可得出所求椭圆的方程.

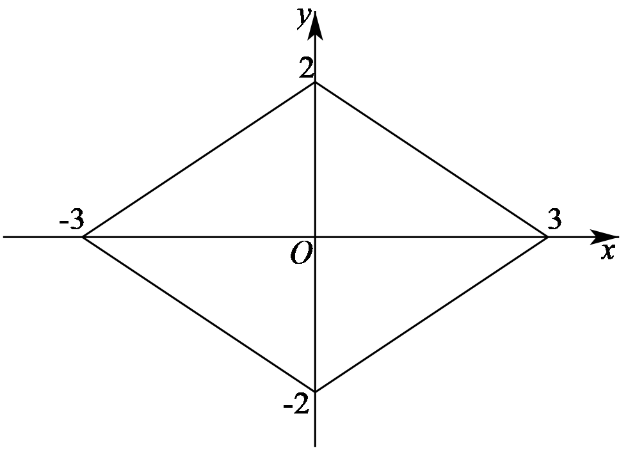
【详解】当$x\geq 0$，$y\geq 0$时，方程$2|x|+3|y|=6$可化为$2x+3y=6$；

当$x\leq 0$，$y\geq 0$时，方程$2|x|+3|y|=6$可化为$-2x+3y=6$；

当$x\leq 0$，$y\leq 0$时，方程$2|x|+3|y|=6$可化为$-2x-3y=6$；

当$x\geq 0$，$y\leq 0$时，方程$2|x|+3|y|=6$可化为$2x-3y=6$.

作出方程$2|x|+3|y|=6$所表示的图形如下图所示：



可知方程$2|x|+3|y|=6$的曲线是一个菱形，

且该菱形的四个顶点坐标分别为$(3,0)$、$(0,2)$、$(-3,0)$、$(0,-2)$，

因为椭圆过该菱形的四个顶点，设椭圆的方程为$mx^2+ny^2=1$，

则$\begin{cases}9m=1\\4n=1\end{cases}$，解得$m=\frac{1}{9}$，$n=\frac{1}{4}$，因此，所求椭圆的方程为$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

故答案为：$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

8．$6+8\sqrt{3}$

【分析】先求出正四棱柱的底面边长，再根据多面体的表面积公式即可得解.

【详解】设正四棱柱的的底面边长为a，

则$2a^2=6$，解得$a=\sqrt{3}$，

所以该正四棱柱的表面积为$2\times\left(\sqrt{3}\right)^2+4\times2\times\sqrt{3}=6+8\sqrt{3}$.

故答案为：$6+8\sqrt{3}$.

9．$\left(-1,0\right)\cup\left(1,+\infty\right)$

【分析】分$x>0$、$x<0$两种情况解不等式$x\lg|x|>0$，结合对数函数的单调性可得出原不等式的解集.

【详解】由$|x|>0$可得$x\neq0$.

当$x>0$时，由$x\lg|x|=x\lg x>0$可得$\lg x>0$，解得$x>1$；

当$x<0$时，由$x\lg|x|=x\lg\left(-x\right)>0$可得$\lg\left(-x\right)<0$，可得$0<-x<1$，解得$-1<x<0$.

综上所述，不等式$x\lg|x|>0$的解集为$\left(-1,0\right)\cup\left(1,+\infty\right)$.

故答案为：$\left(-1,0\right)\cup\left(1,+\infty\right)$.

10．1

【分析】利用两角和的余弦公式和两角差的正弦公式化简等式，最后利用同角的三角函数关系式中的商关系求出$\tan\alpha$的值.

【详解】因为$\cos(\alpha+\beta)=\sin(\alpha-\beta)$，

所以$\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$，

所以$\cos\alpha(\sin\beta+\cos\beta)=\sin\alpha(\cos\beta+\sin\beta)$.

因为α，β均为锐角，所以$\sin\beta+\cos\beta\neq 0$，

所以$\cos\alpha=\sin\alpha$，所以$\tan\alpha=1$.

【点睛】本题考查了两角和的余弦公式和两角差的正弦公式，考查了同角三角函数关系式中的商关系.

11． $y=\frac{1}{125}x^3-\frac{3}{5}x$

【分析】设所求函数解析式为$y=ax^3+bx^2+cx+d$，将相应点的坐标代入函数解析式，可得出$b=d=0$，$125a+5c=-2$，再利用导数的几何意义可得出$\mathbf{75a+c=0}$，可求出a、c的值，由此可得出所求函数的解析式.

【详解】设所求函数解析式为$y=ax^3+bx^2+cx+d$，由题意知图象经过点$(0,0)$，故$d=0$，

即$y=ax^3+bx^2+cx$，

又因为函数$y=ax^3+bx^2+cx$图象过点$(-5,2)$和$(5,-2)$，

所以，$\begin{cases}-125a+25b-5c=2\\125a+25b+5c=-2\end{cases}$，可得$b=0$，则$125a+5c=-2$①，

由于该函数图象在点$(-5,2)$的切线平行于x轴，且$y'=3ax^2+c$，

则$x=-5$时，有$\mathbf{75a+c=0}$②，联立①②可得$a=\frac{1}{125}$，$c=-\frac{3}{5}$，

故该三次函数的解析式为$y=\frac{1}{125}x^3-\frac{3}{5}x$.

故答案为：$y=\frac{1}{125}x^3-\frac{3}{5}x$.

12．$\left[\sqrt{3},3\right]$

【分析】根据空间两点距离公式，结合三角代换法、辅助角公式、正弦型函数的最值性质进行求解即可.

【详解】因为$AB=\sqrt{\left(x_1-x_2\right)^2+\left(y_1-y_2\right)^2+\left(z_1-z_2\right)^2}=\sqrt{3}$，

所以设$\left|x_1-x_2\right|=\sqrt{3}\cos\theta\sin\varphi,\left|y_1-y_2\right|=\sqrt{3}\sin\theta\sin\varphi,\left|z_1-z_2\right|=\sqrt{3}\cos\varphi$，

其中$\theta,\varphi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，因此$d_{(A,B)}=\left|x_1-x_2\right|+\left|y_1-y_2\right|+\left|z_1-z_2\right|=\left|x_1-x_2\right|$

$=\sqrt{3}\cos\theta\sin\varphi+\sqrt{3}\sin\theta\sin\varphi+\sqrt{3}\cos\varphi$

$=\sqrt{3}\sin\varphi\left(\cos\theta+\sin\theta\right)+\sqrt{3}\cos\varphi=\sqrt{6}\sin\varphi\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{3}\cos\varphi$，

因为$\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，所以$\theta+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$，因此$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\in\left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$，

设$t=\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\in\left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$，

于是有$d_{(A,B)}=\sqrt{6}\sin\varphi\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{3}\cos\varphi=\sqrt{6}t\sin\varphi+\sqrt{3}\cos\varphi$

$=\sqrt{6t^2+3}\sin\left(\varphi+\arctan\frac{1}{\sqrt{2}t}\right)$，

因为$\varphi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，所以$\varphi+\arctan\frac{1}{\sqrt{2}t}\in\left[\arctan\frac{1}{\sqrt{2}t},\arctan\frac{1}{\sqrt{2}t}+\frac{\pi}{2}\right]$，