

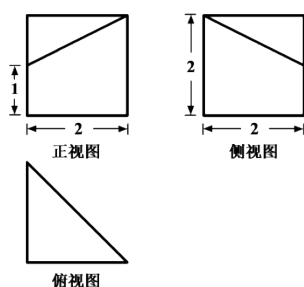
新疆生产建设兵团四校 2024 届高三数学第一学期期末学业水平测试模拟试题

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号、考场号和座位号填写在试题卷和答题卡上。用 2B 铅笔将试卷类型 (B) 填涂在答题卡相应位置上。将条形码粘贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”。
2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案不能答在试题卷上。
3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。
4. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 一个几何体的三视图如图所示，则该几何体的体积为 ()

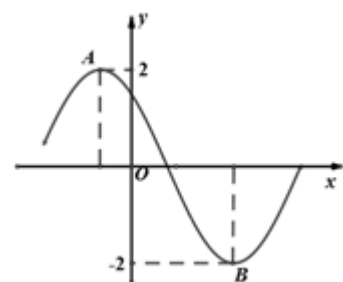


- A. $\frac{10}{3}$ B. 3
- C. $\frac{8}{3}$ D. $\frac{7}{3}$

2. 已知集合 $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{3-x}{x+2} \geq 0\}$, $B = \{y \in \mathbb{N} \mid y = x - 1, x \in A\}$, 则 $A \cup B =$ ()

- A. $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$ B. $\{-1, 0, 1, 2\}$ C. $\{0, 1, 2\}$ D. $\{x \mid -1 \leq x \leq 2\}$

3. 函数 $f(x) = 2 \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, 0 < \varphi < \pi$) 的部分图像如图所示，若 $AB = 5$ ，点 A 的坐标为 $(-1, 2)$ ，若将函数 $f(x)$ 向右平移 $m(m > 0)$ 个单位后函数图像关于 y 轴对称，则 m 的最小值为 ()



- A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{2}$

4. 设 i 是虚数单位，若复数 $m + \frac{10}{3+i}$ ($m \in \mathbb{R}$) 是纯虚数，则 m 的值为 ()

- A. -3 B. -1 C. 1 D. 3

5. 已知 $f(x) = \begin{cases} 2^x - 1, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$, 则 $f\left[f\left(\log_2 \frac{1}{3}\right)\right] = (\quad)$

- A. 2 B. $\frac{2}{3}$ C. $-\frac{2}{3}$ D. 3

6. 已知角 α 的顶点为坐标原点, 始边与 x 轴的非负半轴重合, 终边上有一点 $P(-3, 4)$, 则 $\sin 2\alpha = (\quad)$.

- A. $-\frac{12}{25}$ B. $-\frac{24}{25}$ C. $\frac{16}{5}$ D. $\frac{8}{5}$

7. 若不相等的非零实数 x, y, z 成等差数列, 且 x, y, z 成等比数列, 则 $\frac{x+y}{z} = (\quad)$

- A. $-\frac{5}{2}$ B. -2 C. 2 D. $\frac{7}{2}$

8. 一个正三角形的三个顶点都在双曲线 $x^2 + ay^2 = 1$ 的右支上, 且其中一个顶点在双曲线的右顶点, 则实数 a 的取值范围是 $(\quad)$

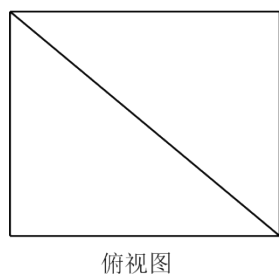
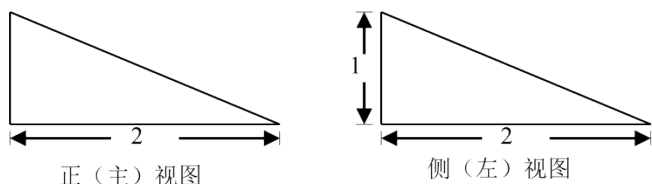
- A. $(3, +\infty)$ B. $(\sqrt{3}, +\infty)$ C. $(-\infty, -\sqrt{3})$ D. $(-\infty, -3)$

9. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} (x-2)(x-e^x) + 3, & x \geq \ln 2 \\ 3-2x, & x < \ln 2 \end{cases}$, 当 $x \in [m, +\infty)$ 时, $f(x)$ 的取值范围为 $(-\infty, e+2]$, 则实数 m 的

取值范围是 $(\quad)$

- A. $\left(-\infty, \frac{1-e}{2}\right]$ B. $(-\infty, 1]$ C. $\left[\frac{1-e}{2}, 1\right]$ D. $[\ln 2, 1]$

10. 某四棱锥的三视图如图所示, 则该四棱锥的体积为 $(\quad)$



- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{4}{3}$ C. 2 D. 4

11. 设 α, β 是方程 $x^2 - x - 1 = 0$ 的两个不等实数根, 记 $a_n = \alpha^n + \beta^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$). 下列两个命题 $(\quad)$

① 数列 $\{a_n\}$ 的任意一项都是正整数;

②数列 $\{a_n\}$ 存在某一项是5的倍数.

A. ①正确, ②错误

B. ①错误, ②正确

C. ①②都正确

D. ①②都错误

12. 已知双曲线 $C_1: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 与双曲线 $C_2: \frac{y^2}{4} - x^2 = 1$ 没有公共点, 则双曲线 C_1 的离心率的取值范围是()

A. $(1, \sqrt{3}]$

B. $[\sqrt{3}, +\infty)$

C. $(1, \sqrt{5}]$

D. $[\sqrt{5}, +\infty)$

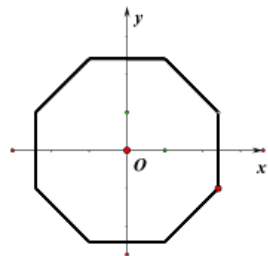
二、填空题: 本题共4小题, 每小题5分, 共20分。

13. 在各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2$, 且 $2a_1, a_3, 3a_2$ 成等差数列, 则 $a_n =$ _____.

14. 已知函数 $f(x) = x^2 + 2f'(1)\ln x$, 则曲线 $y = f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线斜率为_____.

15. 若函数 $f(x) = \sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x$ 的图像向左平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位得到函数 $g(x)$ 的图像. 则 $g(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}\right]$ 上的最小值为_____.

16. 集合 $A = \{(x, y) \mid |x| + |y| = a, a > 0\}$, $B = \{(x, y) \mid |xy| + 1 = |x| + |y|\}$, 若 $A \cap B$ 是平面上正八边形的顶点所构成的集合, 则下列说法正确的为_____



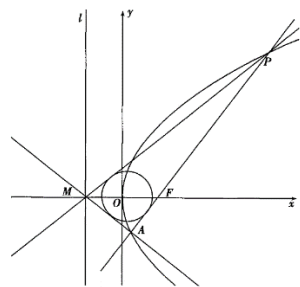
① a 的值可以为2;

② a 的值可以为 $\sqrt{2}$;

③ a 的值可以为 $2 + \sqrt{2}$;

三、解答题: 共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12分) 已知抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 准线 l 与 x 轴交于点 M , 点 P 在抛物线上, 直线 PF 与抛物线 C 交于另一点 A .



(1) 设直线 MP , MA 的斜率分别为 k_1 , k_2 , 求证: $k_1 + k_2$ 常数;

(2) ①设 $\triangle PMA$ 的内切圆圆心为 $G(a, b)$ 的半径为 r , 试用 r 表示点 G 的横坐标 a ;

②当 $\triangle PMA$ 的内切圆的面积为 $\frac{1}{2}\pi$ 时, 求直线 PA 的方程.

18. (12 分) 设椭圆 $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 的右焦点为 F , 过 F 的直线 l 与 C 交于 A, B 两点, 点 M 的坐标为 $(2, 0)$.

(1) 当直线 l 的倾斜角为 45° 时, 求线段 AB 的中点的横坐标;

(2) 设点 A 关于 x 轴的对称点为 C , 求证: M, B, C 三点共线;

(3) 设过点 M 的直线交椭圆于 G, H 两点, 若椭圆上存在点 P , 使得 $\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OH} = \lambda \overrightarrow{OP}$ (其中 O 为坐标原点), 求实数 λ 的取值范围.

19. (12 分) 已知函数 $f(x) = |ax + 1| + |x - 1|$.

(1) 若 $a = 2$, 解关于 x 的不等式 $f(x) < 9$;

(2) 若当 $x > 0$ 时, $f(x) > 1$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

20. (12 分) 已知函数 $f(x) = a \ln x - \frac{be^x}{x}$, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $2x - y - 2 - e = 0$.

(1) 求 a, b 的值;

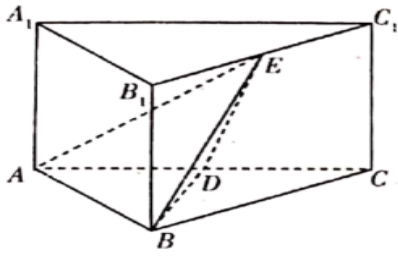
(2) 证明函数 $f(x)$ 存在唯一的极大值点 x_0 , 且 $f(x_0) < 2 \ln 2 - 2$.

21. (12 分) 已知点 P 是抛物线 $C: y = \frac{1}{4}x^2 - 3$ 的顶点, A, B 是 C 上的两个动点, 且 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = -4$.

(1) 判断点 $D(0, 1)$ 是否在直线 AB 上? 说明理由;

(2) 设点 M 是 $\triangle PAB$ 的外接圆的圆心, 点 M 到 x 轴的距离为 d , 点 $N(1, 0)$, 求 $|MN| - d$ 的最大值.

22. (10 分) 如图, 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AB = BC = AA_1 = 1$, $AC = \sqrt{3}$, 点 D, E 分别为 AC 和 B_1C_1 的中点.



(I) 棱 AA_1 上是否存在点 P 使得平面 $PBD \perp$ 平面 ABE ? 若存在, 写出 PA 的长并证明你的结论; 若不存在, 请说明理由.

(II) 求二面角 $A-BE-D$ 的余弦值.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

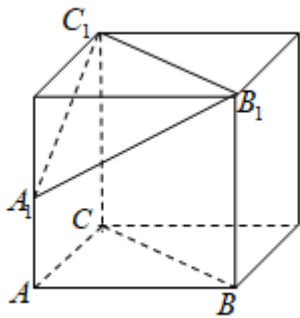
1、A

【解析】

根据题意, 可得几何体, 利用体积计算即可.

【详解】

由题意, 该几何体如图所示:



$$\text{该几何体的体积 } V = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times 2 - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = \frac{10}{3}.$$

故选: A.

【点睛】

本题考查了常见几何体的三视图和体积计算, 属于基础题.

2、A

【解析】

解出集合 A 和 B 即可求得两个集合的并集.

【详解】

$$\therefore \text{集合 } A = \{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{3-x}{x+2} \geq 0\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 < x \leq 3\} = \{-1, 0, 1, 2, 3\},$$

$$B = \{y \in \mathbb{N} \mid y = x - 1, x \in A\} = \{-2, -1, 0, 1, 2\},$$

$$\therefore A \cup B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}.$$

故选: A.

【点睛】

此题考查求集合的并集, 关键在于准确求解不等式, 根据描述法表示的集合, 准确写出集合中的元素.

3、B

【解析】

根据图象以及题中所给的条件, 求出 A, ω 和 φ , 即可求得 $f(x)$ 的解析式, 再通过平移变换函数图象关于 y 轴对称, 求得 m 的最小值.

【详解】

由于 $AB = 5$, 函数最高点与最低点的高度差为 4,

$$\text{所以函数 } f(x) \text{ 的半个周期 } \frac{T}{2} = 3, \text{ 所以 } T = \frac{2\pi}{\omega} = 6 \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{3},$$

$$\text{又 } A(-1, 2), 0 < \varphi < \pi, \text{ 则有 } 2\sin\left(-1 \times \frac{\pi}{3} + \varphi\right) = 2, \text{ 可得 } \varphi = \frac{5\pi}{6},$$

$$\text{所以 } f(x) = 2\sin\left(\frac{\pi}{3}x + \frac{5\pi}{6}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{3}x + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = 2\cos\frac{\pi}{3}(x+1),$$

将函数 $f(x)$ 向右平移 m 个单位后函数图像关于 y 轴对称, 即平移后为偶函数,

所以 m 的最小值为 1,

故选: B.

【点睛】

该题主要考查三角函数的图象和性质, 根据图象求出函数的解析式是解决该题的关键, 要求熟练掌握函数图象之间的变换关系, 属于简单题目.

4、A

【解析】

根据复数除法运算化简, 结合纯虚数定义即可求得 m 的值.

【详解】

由复数的除法运算化简可得

$$m + \frac{10}{3+i} = m + 3 - i,$$

因为是纯虚数，所以 $m + 3 = 0$ ，

$$\therefore m = -3,$$

故选：A.

【点睛】

本题考查了复数的概念和除法运算，属于基础题.

5、A

【解析】

利用分段函数的性质逐步求解即可得答案.

【详解】

$$\text{Q } \log_2 \frac{1}{3} < 0, \therefore f(\log_2 \frac{1}{3}) = -\log_2 \frac{1}{3} = \log_2 3 > 0;$$

$$\therefore f[f(\log_2 \frac{1}{3})] = f(\log_2 3) = 3 - 1 = 2;$$

故选：A.

【点睛】

本题考查了函数值的求法，考查对数的运算和对数函数的性质，是基础题，解题时注意函数性质的合理应用.

6、B

【解析】

根据角终边上的点坐标，求得 $\sin \alpha, \cos \alpha$ ，代入二倍角公式即可求得 $\sin 2\alpha$ 的值.

【详解】

$$\text{因为终边上有一点 } P(-3, 4), \text{ 所以 } \sin \alpha = \frac{4}{5}, \cos \alpha = -\frac{3}{5},$$

$$\therefore \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \times \frac{4}{5} \times \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{24}{25}$$

故选：B

【点睛】

此题考查二倍角公式，熟练记忆公式即可解决，属于简单题目.

7、A

【解析】

由题意, 可得 $y = \frac{x+z}{2}$, $z^2 = xy$, 消去 y 得 $x^2 + xz - 2z^2 = 0$, 可得 $\frac{x}{z} = -2$, 继而得到 $y = -\frac{z}{2}$, 代入即得解

【详解】

由 x, y, z 成等差数列,

所以 $y = \frac{x+z}{2}$, 又 x, z, y 成等比数列,

所以 $z^2 = xy$, 消去 y 得 $x^2 + xz - 2z^2 = 0$,

所以 $\left(\frac{x}{z}\right)^2 + \frac{x}{z} - 2 = 0$, 解得 $\frac{x}{z} = 1$ 或 $\frac{x}{z} = -2$,

因为 x, y, z 是不相等的非零实数,

所以 $\frac{x}{z} = -2$, 此时 $y = -\frac{z}{2}$,

所以 $\frac{x+y}{z} = -2 - \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}$.

故选: A

【点睛】

本题考查了等差等比数列的综合应用, 考查了学生概念理解, 转化划归, 数学运算的能力, 属于中档题.

8、D

【解析】

因为双曲线分左右支, 所以 $a < 0$, 根据双曲线和正三角形的对称性可知: 第一象限的顶点坐标为 $(1+t, \frac{\sqrt{3}}{3}t)(t > 0)$,

将其代入双曲线可解得.

【详解】

因为双曲线分左右支, 所以 $a < 0$,

根据双曲线和正三角形的对称性可知: 第一象限的顶点坐标为 $(1+t, \frac{\sqrt{3}}{3}t)(t > 0)$, 将其代入双曲线方程得:

$$(1+t)^2 + a\left(\frac{\sqrt{3}}{3}t\right)^2 = 1,$$

$$\text{即 } t = \frac{-2}{\frac{1}{3}a+1}, \text{ 由 } t > 0 \text{ 得 } a < -3.$$

故选: D.

【点睛】

本题考查了双曲线的性质, 意在考查学生对这些知识的理解掌握水平.

9、C

【解析】

求导分析函数在 $x \geq \ln 2$ 时的单调性、极值，可得 $x \geq \ln 2$ 时， $f(x)$ 满足题意，再在 $x < \ln 2$ 时，求解 $f(x) \leq e+2$ 的 x 的范围，综合可得结果.

【详解】

当 $x \geq \ln 2$ 时， $f'(x) = -(x-1)(e^x - 2)$ ，

令 $f'(x) > 0$ ，则 $\ln 2 < x < 1$ ； $f'(x) < 0$ ，则 $x > 1$ ，

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $(\ln 2, 1)$ 单调递增，在 $(1, +\infty)$ 单调递减.

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值为 $f(1) = e+2$ ，

$\therefore x \geq \ln 2$ 时， $f(x)$ 的取值范围为 $(-\infty, e+2]$ ，

$\therefore \ln 2 \leq m \leq 1$

又当 $x < \ln 2$ 时，令 $f(x) = 3 - 2x \leq e+2$ ，则 $x \geq \frac{1-e}{2}$ ，即 $\frac{1-e}{2} \leq x < \ln 2$ ，

$\therefore \frac{1-e}{2} \leq m < \ln 2$

综上所述， m 的取值范围为 $\left[\frac{1-e}{2}, 1\right]$.

故选 C.

【点睛】

本题考查了利用导数分析函数值域的方法，考查了分段函数的性质，属于难题.

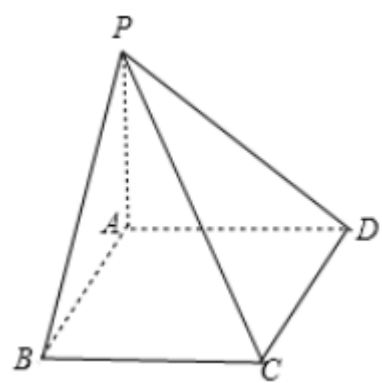
10、B

【解析】

由三视图知该四棱锥是底面为正方形，且一侧棱垂直于底面，由此求出四棱锥的体积.

【详解】

由三视图知该四棱锥是底面为正方形，且一侧棱垂直于底面，画出四棱锥的直观图，如图所示：



则该四棱锥的体积为 $V = \frac{1}{3} S_{\text{正方形}ABCD} \cdot PA = \frac{1}{3} \times 2^2 \times 1 = \frac{4}{3}$.

故选: B.

【点睛】

本题考查了利用三视图求几何体体积的问题, 是基础题.

11、A

【解析】

利用韦达定理可得 $\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = -1$, 结合 $a_n = \alpha^n + \beta^n$ 可推出 $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, 再计算出 $a_1 = 1, a_2 = 3$, 从而推出①

正确; 再利用递推公式依次计算数列中的各项, 以此判断②的正误.

【详解】

因为 α, β 是方程 $x^2 - x - 1 = 0$ 的两个不等实数根,

所以 $\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = -1$,

因为 $a_n = \alpha^n + \beta^n$,

所以 $a_{n+1} = \alpha^{n+1} + \beta^{n+1}$

$$= (\alpha^n + \beta^n)\alpha + (\alpha^n + \beta^n)\beta - \beta^n\alpha - \alpha^n\beta$$

$$= (\alpha^n + \beta^n)(\alpha + \beta) - \alpha\beta(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1})$$

$$= (\alpha^n + \beta^n) + (\alpha^{n-1} + \beta^{n-1}) = a_n + a_{n-1},$$

即当 $n \geq 3$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 中的任一项都等于其前两项之和,

$$\text{又 } a_1 = \alpha + \beta = 1, a_2 = \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 3,$$

$$\text{所以 } a_3 = a_2 + a_1 = 4, a_4 = a_3 + a_2 = 7, a_5 = a_4 + a_3 = 11,$$

以此类推, 即可知数列 $\{a_n\}$ 的任意一项都是正整数, 故①正确;

若数列 $\{a_n\}$ 存在某一项是 5 的倍数, 则此项个位数字应当为 0 或 5,

由 $a_1 = 1, a_2 = 3$, 依次计算可知,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/388071124007006051>