

信阳市重点中学 2024 届数学高三第一学期期末质量检测模拟试题

注意事项：

1. 答题前，考生先将自己的姓名、准考证号码填写清楚，将条形码准确粘贴在条形码区域内。
2. 答题时请按要求用笔。
3. 请按照题号顺序在答题卡各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试卷上答题无效。
4. 作图可先使用铅笔画出，确定后必须用黑色字迹的签字笔描黑。
5. 保持卡面清洁，不要折暴、不要弄破、弄皱，不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的实轴长为 2，离心率为 2， F_1 、 F_2 分别为双曲线 C 的左、右焦点，点 P

在双曲线 C 上运动，若 $\triangle F_1PF_2$ 为锐角三角形，则 $|PF_1| + |PF_2|$ 的取值范围是 ()

- A. $(2\sqrt{7}, 8)$ B. $(2\sqrt{5}, 7)$ C. $(2\sqrt{5}, 8)$ D. $(2\sqrt{7}, 7)$

2. 用数学归纳法证明 $1 + 2 + 3 + \dots + n^2 = \frac{n^4 + n^2}{2}$ ，则当 $n = n + 1$ 时，左端应在 $n = n$ 的基础上加上 ()

- A. $n^2 + 1$ B. $(n + 1)^2$
C. $(n^2 + 1) + (n^2 + 2) + \dots + (n + 1)^2$ D. $\frac{(n+1)^4 + (n+1)^2}{2}$

3. 已知底面为边长为 2 的正方形，侧棱长为 1 的直四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， P 是上底面 $A_1B_1C_1D_1$ 上的动点. 给出以下四个结论中，正确的个数是 ()

- ①与点 D 距离为 $\sqrt{3}$ 的点 P 形成一条曲线，则该曲线的长度是 $\frac{\pi}{2}$ ；
②若 $DP \parallel$ 面 ACB_1 ，则 DP 与面 ACC_1A_1 所成角的正切值取值范围是 $\left[\frac{\sqrt{6}}{3}, \sqrt{2}\right]$ ；
③若 $DP = \sqrt{3}$ ，则 DP 在该四棱柱六个面上的正投影长度之和的最大值为 $6\sqrt{2}$.

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

4. 某医院拟派 2 名内科医生、3 名外科医生和 3 名护士共 8 人组成两个医疗分队，平均分到甲、乙两个村进行义务巡诊，其中每个分队都必须有内科医生、外科医生和护士，则不同的分配方案有

- A. 72 种 B. 36 种 C. 24 种 D. 18 种

5. 下列四个结论中正确的个数是

(1) 对于命题 $p: \exists x_0 \in R$ 使得 $x_0^2 - 1 \leq 0$ ，则 $\neg p: \exists x \in R$ 都有 $x^2 - 1 > 0$ ；

(2) 已知 $X: N(2, \sigma^2)$ ，则 $P(X > 2) = 0.5$

(3) 已知回归直线的斜率的估计值是 2，样本点的中心为 (4,5)，则回归直线方程为 $\hat{y} = 2x - 3$ ；

(4) “ $x \geq 1$ ”是“ $x + \frac{1}{x} \geq 2$ ”的充分不必要条件.

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

6. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，圆 $x^2 + y^2 = b^2$ 与双曲线在第一象限内的交点为 M，若 $|MF_1| = 3|MF_2|$ ，则该双曲线的离心率为

- A. 2 B. 3 C. $\sqrt{2}$ D. $\sqrt{3}$

7. 在 $(1-x)^5 + (1-x)^6 + (1-x)^7 + (1-x)^8$ 的展开式中，含 x^3 的项的系数是 ()

- A. 74 B. 121 C. -74 D. -121

8. 2019 年末，武汉出现新型冠状病毒肺炎 (COVID-19) 疫情，并快速席卷我国其他地区，传播速度很快.因这种病毒是以前从未在人体中发现的冠状病毒新毒株，所以目前没有特异治疗方法，防控难度很大.武汉市出现疫情最早，感染人员最多，防控压力最大，武汉市从 2 月 7 日起举全市之力入户上门排查确诊的新冠肺炎患者、疑似的新冠肺炎患者、无法明确排除新冠肺炎的发热患者和与确诊患者的密切接触者等“四类”人员，强化网格化管理，不落一户、不漏一人.在排查期间，一户 6 口之家被确认为“与确诊患者的密切接触者”，这种情况下医护人员要对其家庭成员随机地逐一进行“核糖核酸”检测，若出现阳性，则该家庭为“感染高危户”.设该家庭每个成员检测呈阳性的概率均为 p

($0 < p < 1$) 且相互独立，该家庭至少检测了 5 个人才能确定为“感染高危户”的概率为 $f(p)$ ，当 $p = p_0$ 时， $f(p)$ 最大，则 $p_0 =$ ()

- A. $1 - \frac{\sqrt{6}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$

9. 已知 $\alpha \in (0, \pi)$ ，且 $\tan \alpha = 2$ ，则 $\cos 2\alpha + \cos \alpha =$ ()

- A. $\frac{2\sqrt{5}-3}{5}$ B. $\frac{\sqrt{5}-3}{5}$ C. $\frac{\sqrt{5}+3}{5}$ D. $\frac{2\sqrt{5}+3}{5}$

10. 设 i 是虚数单位，若复数 $z = 1 + i$ ，则 $\frac{|z|^2}{z} + z^2 =$ ()

- A. $1 + i$ B. $1 - i$ C. $-1 - i$ D. $-1 + i$

11. 设复数 z 满足 $|z| = \frac{z + \bar{z}}{2} + 1$ ， z 在复平面内对应的点的坐标为 (x, y) 则 ()

- A. $x^2 = 2y + 1$ B. $y^2 = 2x + 1$

C. $x^2 = 2y - 1$

D. $y^2 = 2x - 1$

12. 复数 $z = (2+i)(1+i)$ 的共轭复数为 ()

A. $3 - 3i$

B. $3 + 3i$

C. $1 + 3i$

D. $1 - 3i$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知 F 为抛物线 $C: x^2 = 8y$ 的焦点， P 为 C 上一点， $M(-4, 3)$ ，则 $\triangle PMF$ 周长的最小值是_____.

14. 记等差数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 S_n 和 T_n ，若 $\frac{S_n}{T_n} = \frac{3n+5}{n+7}$ ，则 $\frac{a_7}{b_7} =$ _____.

15. 数列 $\{a_n\}$ 满足递推公式 $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ ，且 $a_1 = a_2$ ， $a_{2019} \cdot a_{2020} = 2020$ ，则 $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{2019}^2 =$ _____.

16. 成都市某次高三统考，成绩 X 经统计分析，近似服从正态分布 $X \sim N(100, \sigma^2)$ ，且 $P(86 < X \leq 100) = 0.15$ ，若该市有 8000 人参考，则估计成都市该次统考中成绩 X 大于 114 分的人数为_____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知函数 $f(x) = e^x + be^{-x} - 2a \sin x (a, b \in R)$.

(1) 若 $a = 0$ ， $b = 1$ ，求函数 $f(x)$ 的单调区间；

(2) $b = -1$ 时，若 $f(x) > 0$ 对一切 $x \in (0, \pi)$ 恒成立，求 a 的取值范围.

18. (12 分) 已知 $a > 0$ ， $b > 0$ ， $a + b = 2$.

(I) 求 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b+1}$ 的最小值；

(II) 证明： $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq \frac{2}{ab}$.

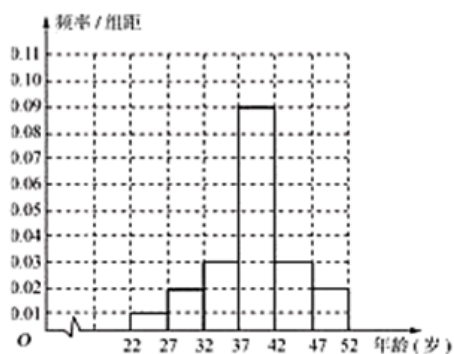
19. (12 分) 已知函数 $f(x) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a + b\right)\sin x + \left(\frac{1}{2}a - \sqrt{3}b\right)\cos x$ ，且 $f(0) = -1$ ， $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$.

(1) 求 $f(x)$ 的解析式；

(2) 已知 $g(x) = x^2 - 2x + m - 3 (1 < m \leq 4)$ ，若对任意的 $x_1 \in [0, \pi]$ ，总存在 $x_2 \in [-2, m]$ ，使得 $f(x_1) = g(x_2)$ 成立，求 m 的取值范围.

20. (12 分) 武汉有“九省通衢”之称，也称为“江城”，是国家历史文化名城.其中著名的景点有黄鹤楼、户部巷、东湖风景区等等.

(1) 为了解五一劳动节当日江城某旅游景点游客年龄的分布情况，从年龄在 22 岁到 52 岁的游客中随机抽取了 1000 人，制成了如图的频率分布直方图：



现从年龄在 $[42, 52]$ 内的游客中，采用分层抽样的方法抽取 10 人，再从抽取的 10 人中随机抽取 4 人，记 4 人中年龄在 $[47, 52]$ 内的人数为 ξ ，求 $P(\xi = 3)$ ；

(2) 为了给游客提供更舒适的旅游体验，该旅游景点游船中心计划在 2020 年劳动节当日投入至少 1 艘至多 3 艘 A 型游船供游客乘坐观光.由 2010 到 2019 这 10 年间的的历史数据资料显示每年劳动节当日客流量 X （单位：万人）都大于 1.将每年劳动节当日客流量数据分成 3 个区间整理得表：

劳动节当日客流量 X	$1 < X < 3$	$3 \leq X \leq 5$	$X > 5$
频数（年）	2	4	4

以这 10 年的数据资料记录的 3 个区间客流量的频率作为每年客流量在该区间段发生的概率，且每年劳动节当日客流量相互独立.

该游船中心希望投入的 A 型游船尽可能被充分利用，但每年劳动节当日 A 型游船最多使用量（单位：艘）要受当日客流量 X （单位：万人）的影响，其关联关系如下表：

劳动节当日客流量 X	$1 < X < 3$	$3 \leq X \leq 5$	$X > 5$
A 型游船最多使用量	1	2	3

若某艘 A 型游船在劳动节当日被投入且被使用，则游船中心当日可获得利润 3 万元；若某艘 A 型游船劳动节当日被投入却不被使用，则游船中心当日亏损 0.5 万元.记 Y （单位：万元）表示该游船中心在劳动节当日获得的总利润， Y 的数学期望越大游船中心在劳动节当日获得的总利润越大，问该游船中心在 2020 年劳动节当日应投入多少艘 A 型游船才能使其当日获得的总利润最大？

21. (12 分) 已知函数 $f(x) = \frac{x-a}{x+1} + \ln(x+1), a \in R$.

- (1) 讨论 $f(x)$ 的单调性；
- (2) 函数 $g(x) = x^2 + \frac{2}{x}$ ，若对于 $\forall x_1 \in (-1, +\infty), \exists x_2 \in [1, 2]$ ，使得 $f(x_1) \geq g(x_2)$ 成立，求 a 的取值范围.

22. (10 分) 在平面直角坐标系 $\square\square\square$ 中，以 $\square$ 为极点， $\square$ 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，已知曲线 $\square$ ：

$\rho \cos^2 \theta = 4 \rho \sin \theta$ ($\rho > 0$), 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = -2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \rho, \\ y = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \rho \end{cases}$ (ρ 为参数). 直线 l 与曲线 C 交于 A, B 两点.

(I) 写出曲线 C 的直角坐标方程和直线 l 的普通方程 (不要求具体过程);

(II) 设 $A(-2, -1)$, 若 $|AB|, |OA|, |OB|$ 成等比数列, 求 ρ 的值.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、A

【解析】

由已知先确定出双曲线方程为 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$, 再分别找到 $\triangle F_1PF_2$ 为直角三角形的两种情况, 最后再结合

$|PF_1| - |PF_2| = 2$ 即可解决.

【详解】

由已知可得 $2a = 2$, $\frac{c}{a} = 2$, 所以 $a = 1, c = 2, b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{3}$, 从而双曲线方程为

$x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$, 不妨设点 P 在双曲线 C 右支上运动, 则 $|PF_1| - |PF_2| = 2$, 当 $|PF_1| \perp |PF_2|$ 时,

此时 $|PF_1|^2 + |PF_2|^2 = 16 = (|PF_1| - |PF_2|)^2 + 2|PF_1||PF_2|$, 所以 $|PF_1||PF_2| = 6$,

$(|PF_1| + |PF_2|)^2 = |PF_1|^2 + |PF_2|^2 + 2|PF_1||PF_2| = 28$, 所以 $|PF_1| + |PF_2| = 2\sqrt{7}$;

当 $|PF_2| \perp x$ 轴时, $|PF_1|^2 = |PF_2|^2 + 16$, 所以 $|PF_1| + |PF_2| = \frac{16}{2} = 8$, 又 $\triangle F_1PF_2$ 为锐角三

角形, 所以 $|PF_1| + |PF_2| \in (2\sqrt{7}, 8)$.

故选: A.

【点睛】

本题考查双曲线的性质及其应用，本题的关键是找到 $\triangle F_1PF_2$ 为锐角三角形的临界情况，即 $\triangle F_1PF_2$ 为直角三角形，是一道中档题.

2、C

【解析】

首先分析题目求用数学归纳法证明 $1+1+3+\dots+n^1=\frac{n^2+n}{2}$ 时，当 $n=k+1$ 时左端应在 $n=k$ 的基础上加上的式子，可以分别

使得 $n=k$ ，和 $n=k+1$ 代入等式，然后把 $n=k+1$ 时等式的左端减去 $n=k$ 时等式的左端，即可得到答案.

【详解】

当 $n=k$ 时，等式左端 $=1+1+\dots+k^1$ ，

当 $n=k+1$ 时，等式左端 $=1+1+\dots+k^1+k^1+1+k^1+1+\dots+(k+1)^1$ ，增加了项 $(k^1+1)+(k^1+1)+(k^1+3)+\dots+(k+1)^1$.

故选：C.

【点睛】

本题主要考查数学归纳法，属于中档题./

3、C

【解析】

①与点 D 距离为 $\sqrt{3}$ 的点 P 形成以 D_1 为圆心，半径为 $\sqrt{2}$ 的 $\frac{1}{4}$ 圆弧 MN ，利用弧长公式，可得结论；②当 P 在 A_1

(或 C_1) 时， DP 与面 ACC_1A_1 所成角 $\angle DA_1O$ (或 $\angle DC_1O$) 的正切值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$ 最小，当 P 在 O_1 时， DP 与面 ACC_1A_1 所

成角 $\angle DO_1O$ 的正切值为 $\sqrt{2}$ 最大，可得正切值取值范围是 $[\frac{\sqrt{6}}{3}, \sqrt{2}]$ ；③设 $P(x, y, 1)$ ，则 $x^2 + y^2 + 1 = 3$ ，即

$x^2 + y^2 = 2$ ，可得 DP 在前后、左右、上下面上的正投影长，即可求出六个面上的正投影长度之和.

【详解】

如图：

①错误，因为 $D_1P = \sqrt{DP^2 - DD_1^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 - 1^2} = \sqrt{2}$ ，与点 D 距离为 $\sqrt{3}$ 的点 P 形成以 D_1 为圆心，半径为 $\sqrt{2}$

的 $\frac{1}{4}$ 圆弧 MN ，长度为 $\frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$ ；

②正确，因为面 $A_1DC_1 \parallel$ 面 ACB_1 ，所以点 P 必须在面对角线 A_1C_1 上运动，当 P 在 A_1 (或 C_1) 时， DP 与面 ACC_1A_1

所成角 $\angle DA_1O$ (或 $\angle DC_1O$) 的正切值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$ 最小 (O 为下底面面对角线的交点)，当 P 在 O_1 时， DP 与面 ACC_1A_1

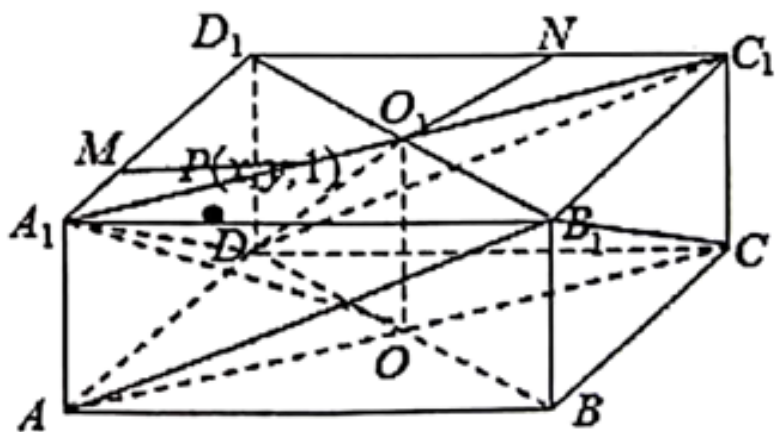
所成角 $\angle DO_1O$ 的正切值为 $\sqrt{2}$ 最大，所以正切值取值范围是 $\left[\frac{\sqrt{6}}{3}, \sqrt{2}\right]$ ；

③正确，设 $P(x, y, 1)$ ，则 $x^2 + y^2 + 1 = 3$ ，即 $x^2 + y^2 = 2$ ， DP 在前后、左右、上下面上的正投影长分别为

$\sqrt{y^2 + 1}$ ， $\sqrt{x^2 + 1}$ ， $\sqrt{x^2 + y^2}$ ，所以六个面上的正投影长度之

$$2(\sqrt{y^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{2}) \leq 2\left(2\sqrt{\frac{y^2 + 1 + x^2 + 1}{2}} + \sqrt{2}\right) = 6\sqrt{2}，\text{当且仅当 } P \text{ 在 } O_1 \text{ 时取等号。}$$

故选：C。



【点睛】

本题以命题的真假判断为载体，考查了轨迹问题、线面角、正投影等知识点，综合性强，属于难题。

4、B

【解析】

根据条件 2 名内科医生，每个村一名，3 名外科医生和 3 名护士，平均分成两组，则分 1 名外科，2 名护士和 2 名外科医生和 1 名护士，根据排列组合进行计算即可。

【详解】

2 名内科医生，每个村一名，有 2 种方法，

3 名外科医生和 3 名护士，平均分成两组，要求外科医生和护士都有，则分 1 名外科，2 名护士和 2 名外科医生和 1 名护士，

若甲村有 1 外科，2 名护士，则有 $\square_3^1 \square_3^2 = 3 \times 3 = 9$ ，其余的分到乙村，

若甲村有 2 外科，1 名护士，则有 $\square_3^2 \square_3^1 = 3 \times 3 = 9$ ，其余的分到乙村，

则总共的分配方案为 $2 \times (9 + 9) = 2 \times 18 = 36$ 种，

故选：B。

【点睛】

本题主要考查了分组分配问题，解决这类问题的关键是先分组再分配，属于常考题型。

5、C

【解析】

由题意，(1)中，根据全称命题与存在性命题的关系，即可判定是正确的；(2)中，根据正态分布曲线的性质，即可判定是正确的；(3)中，由回归直线方程的性质和直线的点斜式方程，即可判定是正确；(4)中，基本不等式和充要条件的判定方法，即可判定。

【详解】

由题意，(1)中，根据全称命题与存在性命题的关系，可知命题 $p: \exists x_0 \in R$ 使得 $x_0^2 - 1 \leq 0$ ，则 $\neg p: \forall x \in R$ 都有 $x^2 - 1 > 0$ ，是错误的；

(2)中，已知 $X \sim N(2, \sigma^2)$ ，正态分布曲线的性质，可知其对称轴的方程为 $x = 2$ ，所以 $P(X > 2) = 0.5$ 是正确的

(3)中，回归直线的斜率的估计值是 2，样本点的中心为 (4,5)，由回归直线方程的性质和直线的点斜式方程，可得回归直线方程为 $\hat{y} = 2x - 3$ 是正确；

(4)中，当 $x \geq 1$ 时，可得 $x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2$ 成立，当 $x + \frac{1}{x} \geq 2$ 时，只需满足 $x > 0$ ，所以“ $x \geq 1$ ”是“ $x + \frac{1}{x} \geq 2$ ”成立的充分不必要条件。

【点睛】

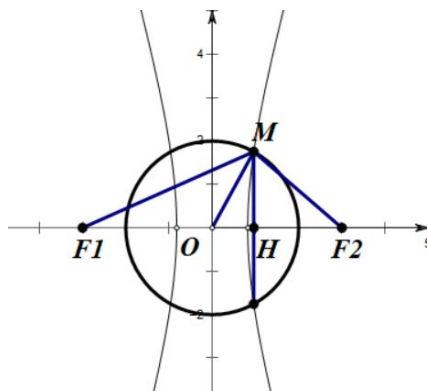
本题主要考查了命题的真假判定及应用，其中解答中熟记含有量词的否定、正态分布曲线的性质、回归直线方程的性质，以及基本不等式的应用等知识点的应用，逐项判定是解答的关键，着重考查了分析问题和解决问题的能力，属于基础题。

6、D

【解析】

本题首先可以通过题意画出图像并过 M 点作 F_1F_2 垂线交 F_1F_2 于点 H ，然后通过圆与双曲线的相关性质判断出三角形 OMF_2 的形状并求出高 MH 的长度， MH 的长度即 M 点纵坐标，然后将 M 点纵坐标代入圆的方程即可得出 M 点坐标，最后将 M 点坐标代入双曲线方程即可得出结果。

【详解】



根据题意可画出以上图像，过 M 点作 F_1F_2 垂线并交 F_1F_2 于点 H ，

因为 $|MF_1| = 3|MF_2|$ ， M 在双曲线上，

所以根据双曲线性质可知， $|MF_1| - |MF_2| = 2a$ ，即 $3|MF_2| - |MF_2| = 2a$ ， $|MF_2| = a$ ，

因为圆 $x^2 + y^2 = b^2$ 的半径为 b ， OM 是圆 $x^2 + y^2 = b^2$ 的半径，所以 $OM = b$ ，

因为 $OM = b$ ， $|MF_2| = a$ ， $OF_2 = c$ ， $a^2 + b^2 = c^2$ ，

所以 $\angle OMF_2 = 90^\circ$ ，三角形 OMF_2 是直角三角形，

因为 $MH \perp OF_2$ ，所以 $OF_2 \cdot MH = OM \cdot MF_2$ ， $MH = \frac{ab}{c}$ ，即 M 点纵坐标为 $\frac{ab}{c}$ ，

将 M 点纵坐标代入圆的方程中可得 $x^2 + \frac{a^2b^2}{c^2} = b^2$ ，解得 $x = \frac{b^2}{c}$ ， $M\left(\frac{b^2}{c}, \frac{ab}{c}\right)$ ，

将 M 点坐标代入双曲线中可得 $\frac{b^4}{a^2c^2} - \frac{a^2}{c^2} = 1$ ，

化简得 $b^4 - a^4 = a^2c^2$ ， $(c^2 - a^2)^2 - a^4 = a^2c^2$ ， $c^2 = 3a^2$ ， $e = \frac{c}{a} = \sqrt{3}$ ，故选 D。

【点睛】

本题考查了圆锥曲线的相关性质，主要考察了圆与双曲线的相关性质，考查了圆与双曲线的综合应用，考查了数形结合思想，体现了综合性，提高了学生的逻辑思维能力，是难题。

7、D

【解析】

根据 $(1-x)^5 + (1-x)^6 + (1-x)^7 + (1-x)^8$ ，利用通项公式得到含 x^3 的项为： $(C_5^3 + C_6^3 + C_7^3 + C_8^3)(-x)^3$ ，进而得到其系数，

【详解】

因为在 $(1-x)^5 + (1-x)^6 + (1-x)^7 + (1-x)^8$ ，

所以含 x^3 的项为： $(C_5^3 + C_6^3 + C_7^3 + C_8^3)(-x)^3$ ，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/388073052007006051>