

1. $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的导数就是切线的斜率, 即

$$k_{\text{切线}} = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

2. $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数简称导数, 即

$$f'(x) = y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

3. 利用导数的几何意义解释实际问题, 体会“**数形结合**”, “**以直代曲**”的数学思想方法.

$$s = s(t)$$

平均速度

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} \\ &= \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} \end{aligned}$$

瞬时速度

$$\begin{aligned} v(t_0) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} \end{aligned}$$

$$y = f(x)$$

平均变化率

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \end{aligned}$$

瞬时变化率 在 $x = x_0$ 处

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

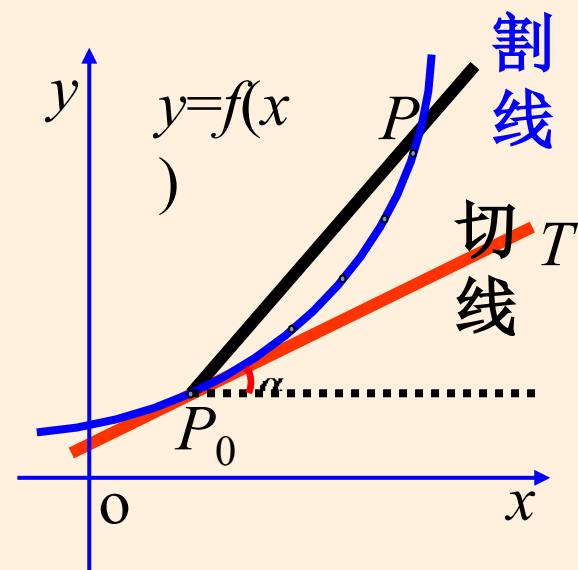
$$y' \Big|_{x=x_0} = f'(x_0)$$

函数 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的导数

$$k_{\text{切线}} = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

几何意义

割线 P_0P 的斜率



切线 P_0T 的斜率

复习引入

1. 导数的定义

如果当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时，平均变化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 无限趋近于一个确定的值，即 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 有极限，则称 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可导，并把这个确定的值叫做 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的**导数**(也称为**瞬时变化率**)，记作 $f'(x_0)$ 或 $y'|_{x=x_0}$ ，即

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

从求函数 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处导数的过程可以看到，当 $x = x_0$ 时， $f'(x_0)$ 是一个唯一确定的数。这样，当 x 变化时， $y = f'(x)$ 就是 x 的函数，我们称它为 $y = f(x)$ 的**导函数**(*derived function*) (简称**导数**)。 $y = f(x)$ 的导函数有时也记作 y' ，即

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

2. 导数的几何意义

函数 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的导数 $f'(x_0)$ 就是切线的斜率，即

$$k_{\text{切线}} = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

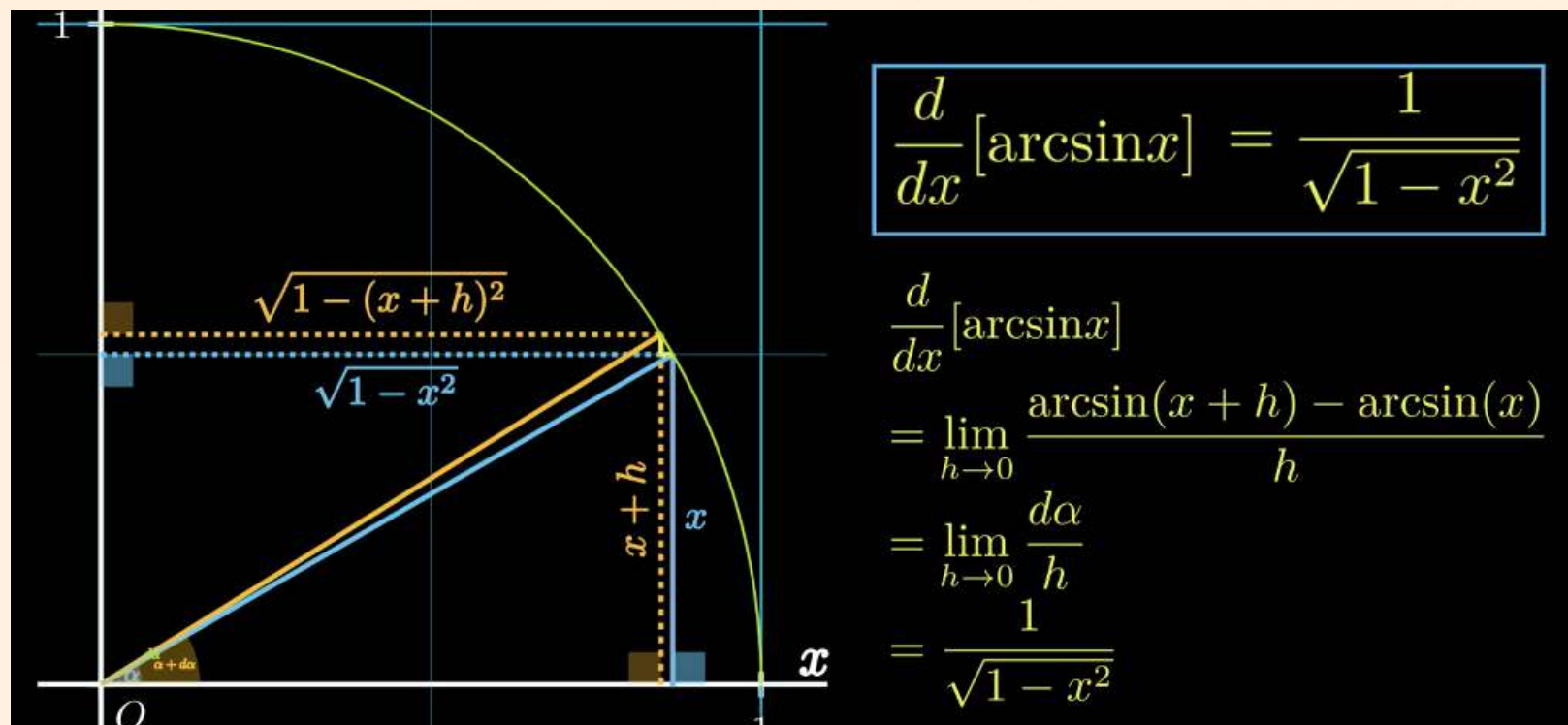
3. 如何求函数 $y = f(x)$ 的导数?

(1) 求函数的增量 $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$;

(2) 求函数的增量与自变量的增量的比值： $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$;

(3) 求极限，得导函数 $y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

导数公式表

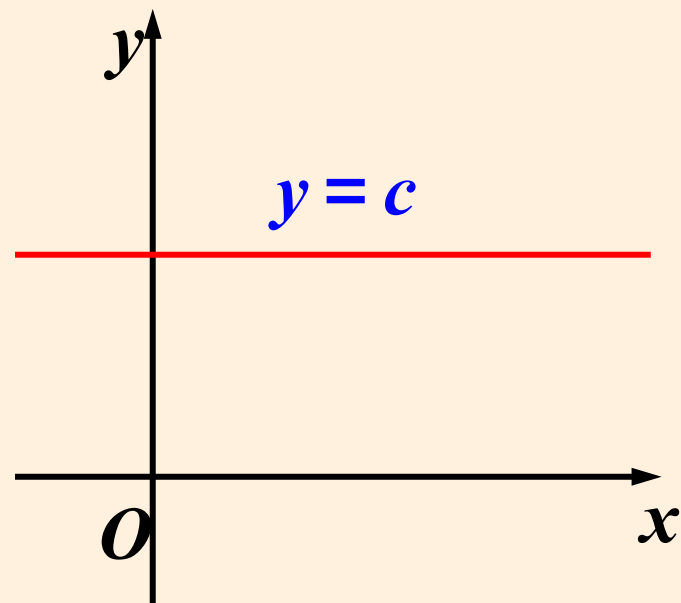


探究新知

1. 函数 $y=f(x)=c$ 的导数

$$Q \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{c - c}{\Delta x} = 0,$$

$$\therefore y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0.$$



即 $c'=0$, 也就是说任意一个常数的导数是0.

追问：若 $y=c$ (如图示) 表示路程关于时间的函数，则 $y'=0$ 的物理意义是什么？

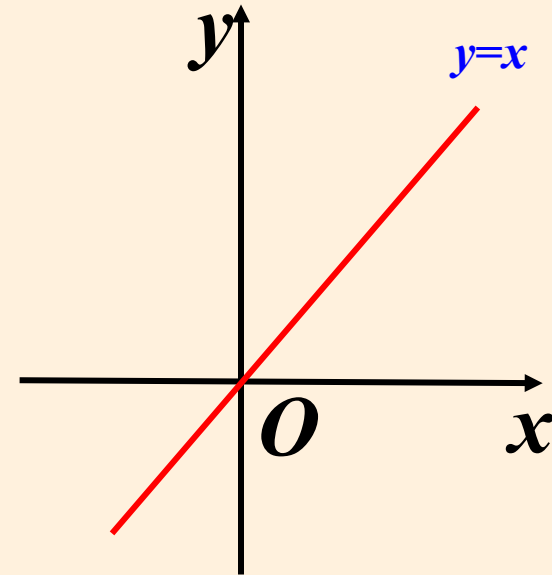
若 $y=c$ 表示路程关于时间的函数，则 $y'=0$ 可以解释为某物体的瞬时速度始终为0，即一直处于静止状态. 所以路程保持不变，是关于时间的常值函数.

2. 函数 $y=f(x)=x$ 的导数

$$Q \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x) - x}{\Delta x} = 1,$$

$$\therefore y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 1 = 1.$$

即 $x' = 1$



追问：若 $y=x$ (如图示)表示路程关于时间的函数，则 $y'=1$ 的物理意义是什么？

若 $y=x$ (如图示)表示路程关于时间的函数，则 $y'=1$ 可以解释为某物体做瞬时速度为1的匀速直线运动.可以解释为某物体做瞬时速度为1的匀速直线运动.

3. 函数 $y = f(x) = x^2$ 的导数

$$\begin{aligned} Q \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\ &= \frac{x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \end{aligned}$$

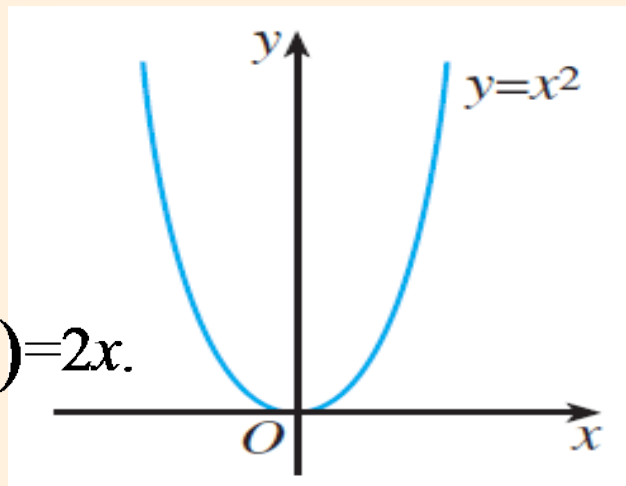
$$= 2x + \Delta x,$$

$$\therefore y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

即 $(x^2)' = 2x$

追问1： $y' = 2x$ 的几何意义是什么？

表示函数 $y = x^2$ 的图象上点 (x, y) 处切线的斜率为 $2x$ ，说明随着 x 的变化，切线的斜率也在变化。



追问2： 若表示路程关于时间的函数，则的物理意义是什么？

某物体做变速直线运动，它在时刻 x 的瞬时速度为 $2x$ 。

另一方面，从导数作为函数在一点的瞬时变化率来看， $y' = 2x$ 表明：当 $x < 0$ 时，随着 x 的增加， $|y'|$ 越来越小， $y = x^2$ 减少得越来越慢；当 $x > 0$ 时，随着 x 的增加， $|y'|$ 越来越大， $y = x^2$ 增加得越来越快。

4. 函数 $y = f(x) = x^3$ 的导数

$$\begin{aligned} Q \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} \\ &= \frac{x^3 + 3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} \end{aligned}$$

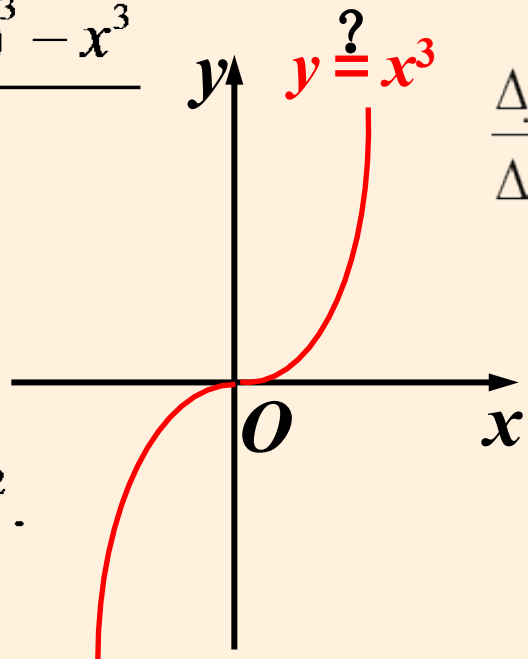
$$= 3x^2 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2,$$

$$\therefore y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [3x^2 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2] = 3x^2.$$

即 $(x^3)' = 3x^2$

追问2: $y' = 3x^2$ 的几何意义是什么?



$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

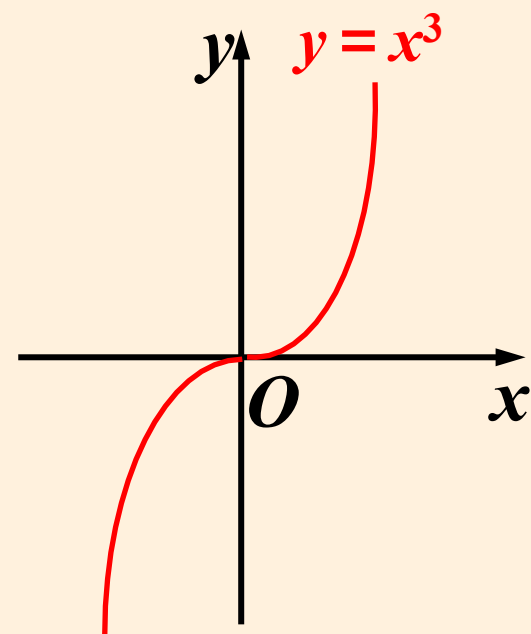
追问1: 还有没有其它得到 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 的方法

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} \\ &= \frac{(x + \Delta x - x)[(x + \Delta x)^2 + (x + \Delta x)x + x^2]}{\Delta x} \\ &= (x + \Delta x)^2 + (x + \Delta x)x + x^2 \\ &= 3x^2 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 \end{aligned}$$

$y' = 3x^2$ 表示函数 $y = x^3$ 的图像上的点 (x, y) 处切线的斜率为 $3x^2$, 这说明随 x 的变化, 切线的斜率也在变化, 且恒为非负数.

追问3：随着 x 的变化，函数 $y=x^3$ 的导数 $y'=3x^2$ 也在变化，导数随 x 的变化反映出了函数 $y=x^3$ 怎样的变化？

当 $x>0$ 时，随着 x 的增加， $|y'|$ 越来越大， $y=x^3$ 增加得越来越快；当 $x<0$ 时，随着 x 的增加， $|y'|$ 越来越小， $y=x^3$ 增加得越来越慢. 从导函数的非负性来看，除 $x=0$ 时函数的导数为0外，函数的导数恒为正，因此函数在定义域上恒为增函数.



5. 函数 $y = f(x) = \frac{1}{x}$ 的导数

$$\begin{aligned} Q \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x} \\ &= \frac{x - (x + \Delta x)}{x(x + \Delta x)\Delta x} = -\frac{1}{x^2 + x \cdot \Delta x}, \end{aligned}$$

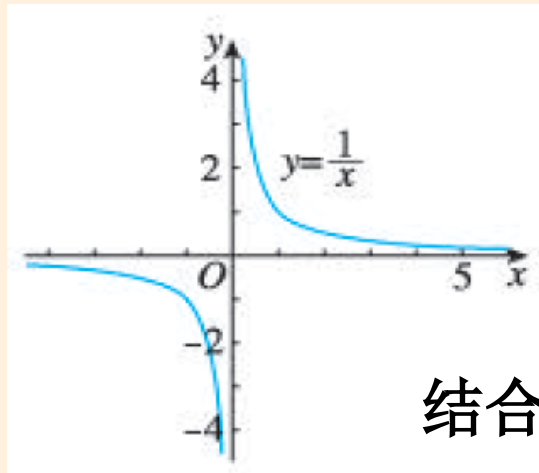
$$\therefore y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x^2 + x \cdot \Delta x} \right) = -\frac{1}{x^2}.$$

即 $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

追问2: 求出曲线在点(1,1)处的切线方程.

$$x + y - 2 = 0$$

追问1: 画出函数 $y = \frac{1}{x}$ 的图象. 根据函数 $y = \frac{1}{x}$ 的图象, 结合函数的导数, 描述它的变化情况.



结合函数图象及其导数 $y' = -\frac{1}{x^2}$ 发现,

当 $x < 0$ 时, 随着 x 的增加, 函数 $y = \frac{1}{x}$ 减少得越来越快; 当 $x > 0$ 时, 随着 x 的增加, 函数 $y = \frac{1}{x}$ 减少得越来越慢.

6. 函数 $y = f(x) = \sqrt{x}$ 的导数

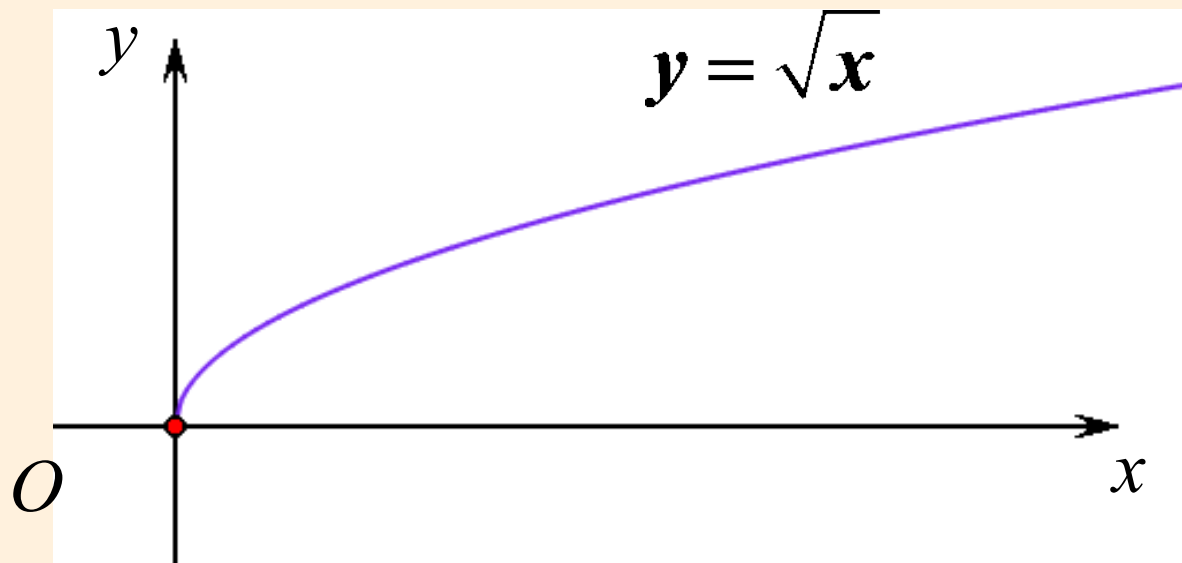
$$Q \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$$

$$= \frac{(\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}$$

$$\therefore y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

即 $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$



追问1: 该函数的定义域及其导数的定义域是否一样?

不一样，
原函数的定义域为 $\{x|x \geq 0\}$ ，
导数的定义域为 $\{x|x > 0\}$ 。

问题: 前面几个函数都是我们学过的一类基本初等函数——幂函数，
根据这些幂函数的导数结果，

$$x' = 1, \quad = x^0$$

$$(x^2)' = 2x,$$

$$(x^3)' = 3x^2,$$

$$(x^3)' = 3x^2,$$

$$(x^{-1})' = -x^{-2},$$

$$(x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}},$$

你能总结出对于一般幂函数 $f(x) = x^\alpha$ 的导函数公式吗？

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：
<https://d.book118.com/388073106035006050>