

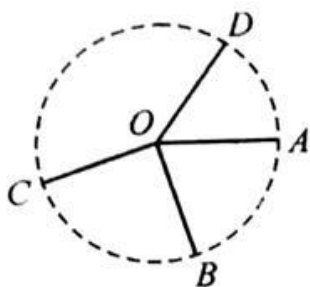
专题 04 圆中的重要模型-四点共圆模型

四点共圆是初中数学的常考知识点，近年来，特别是四点共圆判定的题目出现频率较高。相对四点共圆性质的应用，四点共圆的判定往往难度较大，往往是填空题或选择题的压轴题，而计算题或选择中四点共圆模型的应用（特别是最值问题），通常能简化运算或证明的步骤，使问题变得简单。本文主要介绍四点共圆的四种重要模型。

四点共圆：若在同一平面内，有四个点在同一个圆上，则称这四个点共圆，一般简称为“四点共圆”。

模型 1、定点定长共圆模型（圆的定义）

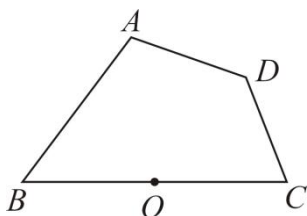
【模型解读】若四个点到一定点的距离相等，则这四个点共圆。这也是圆的基本定义，到定点的距离等于定长点的集合。



条件：如图，平面内有五个点 O 、 A 、 B 、 C 、 D ，使得 $OA=OB=OC=OD$ ，

结论： A 、 B 、 C 、 D 四点共圆（其中圆心为 O ）。

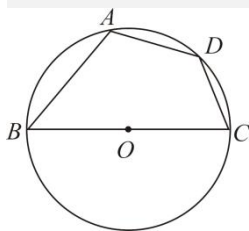
例 1.（2022·江苏·二模）如图，点 O 为线段 BC 的中点，点 A 、 C 、 D 到点 O 的距离相等，若 $\angle ABC = 50^\circ$ ，则 $\angle ADC$ 的度数是_____。



【答案】 130

【分析】根据题意得到四边形 $ABCD$ 共圆，利用圆内接四边形对角互补即可求出所求角的度数。

【详解】解：由题意得到 $OA=OB=OC=OD$ ，作出圆 O ，如图所示，

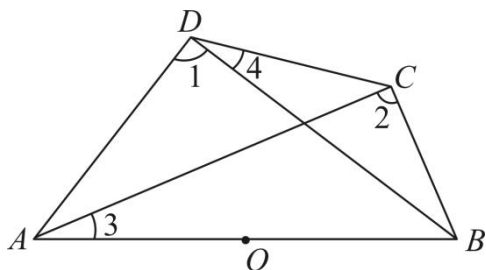


$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为圆 O 的内接四边形， $\therefore \angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$ ，

$\because \angle ABC = 50^\circ$ ， $\therefore \angle ADC = 130^\circ$ ，故答案为：130。

【点睛】此题考查了圆内接四边形的性质，熟练掌握圆内接四边形的性质是解本题的关键.

例 2. (2022·安徽合肥·校考一模) 如图, O 是 AB 的中点, 点 B, C, D 到点 O 的距离相等, 连接 AC, BD . 下列结论不一定成立的是 ()



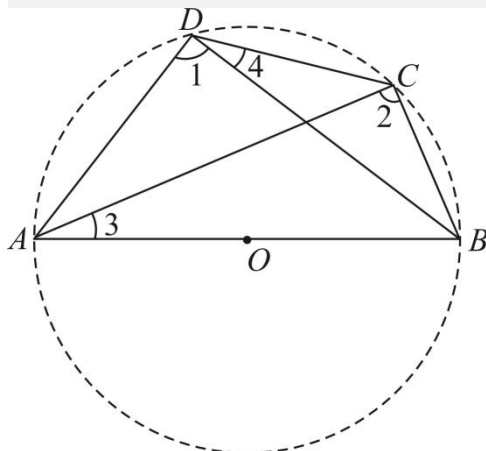
- A. $\angle 1 = \angle 2$
- B. $\angle 3 = \angle 4$
- C. $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$
- D. AC 平分 $\angle BAD$

【答案】 D

【分析】以点 O 为圆心， OA 长为半径作圆，再根据圆内接四边形的性质，圆周角定理逐项判断即可。

【详解】如图，以点 O 为圆心， OA 长为半径作圆.

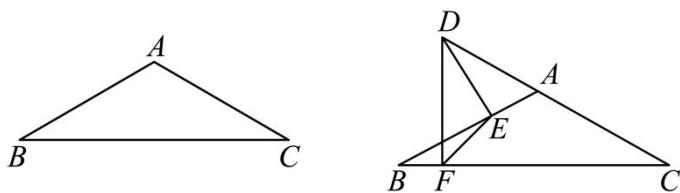
由题意可知： $OA=OB=OC=OD$ ，即点 A 、 B 、 C 、 D 都在圆 O 上。



- A. $\because \widehat{AB} = \widehat{AB}$, $\therefore \angle 1 = \angle 2$, 故 A 不符合题意;
- B. $\because \widehat{BC} = \widehat{BC}$, $\therefore \angle 3 = \angle 4$, 故 B 不符合题意;
- C. $\because$ 四边形 $ABCD$ 是 $\odot O$ 的内接四边形, $\therefore \angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$, 故 C 不符合题意;
- D. $\because \widehat{BC}$ 和 $\widehat{CD}$ 不一定相等, $\therefore \angle BAC$ 和 $\angle DAC$ 不一定相等,
- $\therefore AC$ 不一定平分 $\angle BAD$, 故 D 符合题意. 故选: D.

【点睛】 本题考查圆周角定理及其推论，充分理解圆周角定理是解答本题的关键.

例 3. (2022 春·福建厦门·九年级校考阶段练习) 如图, 等腰三角形 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC=120^\circ$, $AB=3$. (1) 求 BC 的长. (2) 如图, 点 D 在 CA 的延长线上, $DE \perp AB$ 于 E , $DF \perp BC$ 于 F , 连 EF . 求 EF 的最小值.



【答案】(1) $BC=3\sqrt{3}$; (2) EF 的最小值为 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

【分析】(1) 过点 A 作 $AM \perp BC$ 于点 M , 根据等腰三角形的性质得 $\angle B=30^\circ$, $BM=CM$, 由直角三角形的性质得 $BM=\frac{3}{2}\sqrt{3}$, 进而即可求解;

(2) 连接 BD , 取 BD 的中点 O , 连接 OE, OF , 易得 B, D, E, F 四点共圆, 从而得 $\triangle OEF$ 是等边三角形, 进而得 $EF=\frac{1}{2}BD$, 由 $BD \perp CD$ 时, BD 的值最小, 进而即可求解.

【详解】(1) 过点 A 作 $AM \perp BC$ 于点 M ,

$\because$ 等腰三角形 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC=120^\circ$, $AB=3$, $\therefore \angle B=(180^\circ-120^\circ) \div 2=30^\circ$, $BM=CM$,

$\therefore BM=3 \div 2 \times \sqrt{3}=\frac{3}{2}\sqrt{3}$, $\therefore BC=2BM=2 \times \frac{3}{2}\sqrt{3}=3\sqrt{3}$;

(2) 连接 BD , 取 BD 的中点 O , 连接 OE, OF , $\because DE \perp AB$ 于 E , $DF \perp BC$ 于 F ,

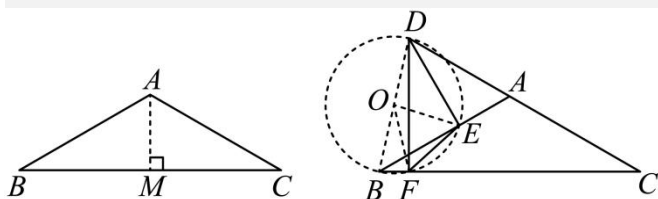
$\therefore$ 在 $Rt\triangle BDF$ 与 $Rt\triangle BDE$ 中, $OB=OD=OE=OF=\frac{1}{2}BD$,

$\therefore B, D, E, F$ 四点共圆, $\therefore \angle EOF=2\angle EBF=2 \times 30^\circ=60^\circ$,

$\therefore \triangle OEF$ 是等边三角形, $\therefore EF=OF=\frac{1}{2}BD$,

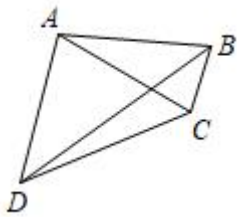
$\because \angle C=\angle EBF=30^\circ$, $\therefore$ 当 $BD \perp CD$ 时, $BD=\frac{1}{2}BC=\frac{3\sqrt{3}}{2}$, 此时, BD 的值最小,

$\therefore EF$ 的最小值 $=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2} \times \frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$.



【点睛】本题主要考查圆的基本性质以及等腰三角形, 直角三角形的性质定理, 添加辅助线, 构造四边形的外接圆, 是解题的关键.

例 4. (2022·河北·唐山九年级阶段练习) 如图所示, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB=AC=AD$, $\angle BAC=26^\circ$, $\angle CAD=74^\circ$, 则 $\angle BCD=$ _____ $^\circ$, $\angle DBC=$ _____ $^\circ$.



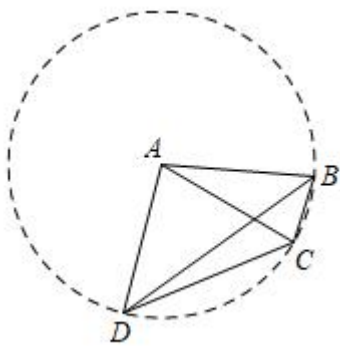
【答案】 130 37

【分析】根据题意可得点 B, C, D 在以 A 为圆心的圆上，根据圆周角定理求得 $\angle BDC$ ， $\angle DBC$ ，根据三角形内角和定理求得 $\angle BCD$ 。

【详解】 $\because AB=AC=AD$ ， $\therefore$ 点 B, C, D 在以 A 为圆心的圆上，

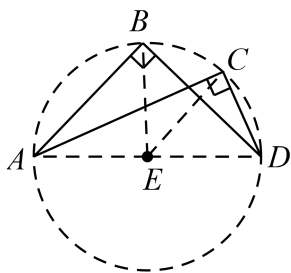
$\because \angle BAC=26^\circ \therefore \angle BDC=\frac{1}{2} \angle BAC=13^\circ$ ， $\because \angle CAD=74^\circ$ ， $\therefore \angle DBC=\frac{1}{2} \angle CAD=37^\circ$ 。

$\therefore \angle BCD=180^\circ - \angle DBC - \angle BDC=180^\circ - 13^\circ - 37^\circ=130^\circ$ 故答案为：130，37

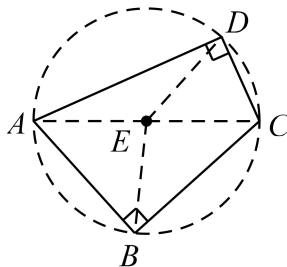


【点睛】此题考查了圆周角定理，三角形内角和定理，综合运用以上知识是解题的关键。

模型 2、定边对双直角共圆模型



同侧型



异侧型

1) 定边对双直角模型（同侧型）

条件：若平面上 A, B, C, D 四个点满足 $\angle ABD = \angle ACD = 90^\circ$ ，

结论： A, B, C, D 四点共圆，其中 AD 为直径。

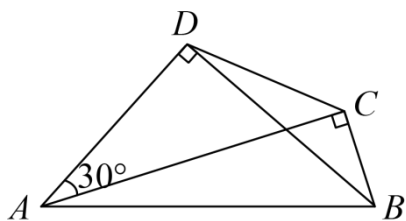
2) 定边对双直角模型（异侧型）

条件：若平面上 A 、 B 、 C 、 D 四个点满足 $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$ ，

结论： A 、 B 、 C 、 D 四点共圆，其中 AC 为直径。

例 1.（2022 秋·山西临汾·九年级统考期末）如图在四边形 $ABCD$ 中， $\angle ADB = \angle ACB = 90^\circ$ ，若 $\angle DAC = 30^\circ$ ，

则 $\frac{DC}{AB}$ 的值为（ ）



A. $\frac{1}{9}$

B. $\frac{1}{4}$

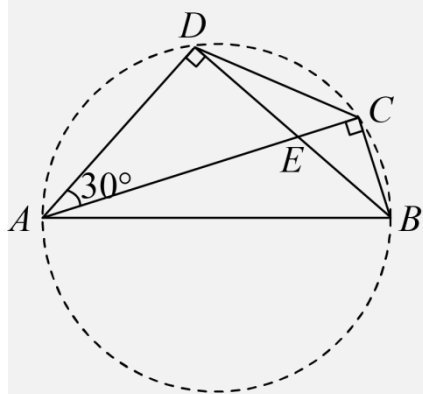
C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{1}{2}$

【答案】D

【分析】首先根据题意得到点 A 、 B 、 C 、 D 四点共圆，然后证明出 $\triangle CED \sim \triangle BEA$ ，进而得到 $\frac{CD}{AB} = \frac{DE}{AE}$ ，然后利用 30° 直角三角形的性质得到 $\frac{DE}{AE} = \frac{1}{2}$ ，进而求解即可。

【详解】如图所示， $\because \angle ADB = \angle ACB = 90^\circ \therefore$ 点 A 、 B 、 C 、 D 四点共圆，



$$\because \widehat{CB} = \widehat{CB} \therefore \angle BAC = \angle BDC \therefore \angle DEC = \angle AEB \therefore \triangle CED \sim \triangle BEA \therefore \frac{CD}{AB} = \frac{DE}{AE}$$

$$\because \angle ADB = 90^\circ, \angle DAC = 30^\circ \therefore DE = \frac{1}{2} AE \therefore \frac{DE}{AE} = \frac{1}{2} \therefore \frac{CD}{AB} = \frac{DE}{AE} = \frac{1}{2}. \text{ 故选: D.}$$

【点睛】此题考查了四点共圆，同弧所对的圆周角相等，相似三角形的性质等知识，解题的关键是熟练掌握以上知识点。

例 2.（2022 春·山东国·九年级专题练习）定义：三角形一个内角的平分线和与另一个内角相邻的外角平分线相交所成的锐角称为该三角形第三个内角的遥望角。

(1) 如图 1, $\angle E$ 是 $\triangle ABC$ 中 $\angle A$ 的遥望角. ①若 $\angle A=40^\circ$, 直接写出 $\angle E$ 的度数是_____;

②求 $\angle E$ 与 $\angle A$ 的数量关系, 并说明理由. (2) 如图 2, 四边形 $ABCD$ 中, $\angle ABC=\angle ADC=90^\circ$, 点 E 在 BD 的延长线上, 连 CE , 若 $\angle BEC$ 是 $\triangle ABC$ 中 $\angle BAC$ 的遥望角, 求证: $DA=DE$.

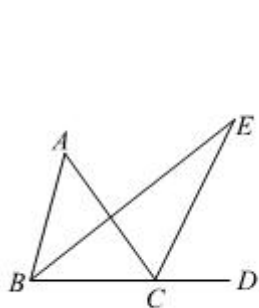


图1

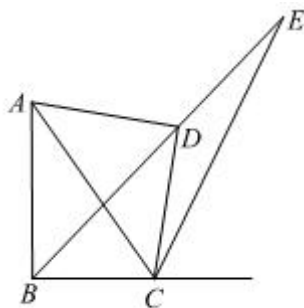


图2

【答案】(1) ① 20° ; ② $\angle E = \frac{1}{2} \angle A$, 理由见解析; (2) 证明见解析

【分析】(1) ①根据题目定义推出 $\angle E = \frac{1}{2} \angle A$, 从而得出结论; ②直接根据求解①过程证明即可;

(2) 首先根据题意推出 A, B, C, D 四点共圆, 然后作四边形 $ABCD$ 的外接圆交 CE 于点 F , 连接 AF, DF , 再根据圆的内接四边形的性质等推出 $\angle AFD = \angle DFE$, 然后根据“遥望角”的定义推出 $\angle E = \angle DAF$, 即可证 $\triangle DAF \cong \triangle DEF$, 从而得出结论.

【详解】(1) 解: ① $\because \angle E$ 是 $\triangle ABC$ 中 $\angle A$ 的遥望角,

$$\therefore \angle EBC = \frac{1}{2} \angle ABC, \quad \angle ECD = \frac{1}{2} \angle ACD,$$

$$\therefore \angle E = \angle ECD - \angle EBD = \frac{1}{2} (\angle ACD - \angle ABC) = \frac{1}{2} \angle A,$$

$\because \angle A = 40^\circ, \therefore \angle E = 20^\circ$. 故答案为: 20° ;

② $\angle E = \frac{1}{2} \angle A$, 理由如下: $\because \angle E$ 是 $\triangle ABC$ 中 $\angle A$ 的遥望角,

$$\therefore \angle EBC = \frac{1}{2} \angle ABC, \quad \angle ECD = \frac{1}{2} \angle ACD,$$

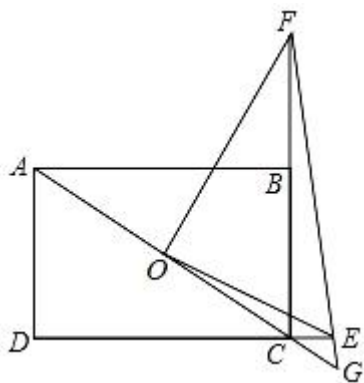
$$\therefore \angle E = \angle ECD - \angle EBD = \frac{1}{2} (\angle ACD - \angle ABC) = \frac{1}{2} \angle A;$$

(2) 证明: $\because \angle ABC = \angle ADC = 90^\circ, \therefore A, B, C, D$ 四点共圆, 作四边形 $ABCD$ 的外接圆交 CE 于点 F , 连接 AF, DF ,

∵ $BE \perp AC$, $CF \perp AB$, ∴ B、C、E、F 四点共圆, ∴ $\angle FME = 2\angle ACF = 80^\circ$.

考点: 1. 直角三角形斜边上的中线; 2. 等腰三角形的判定与性质.

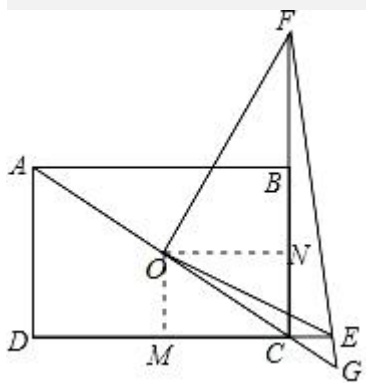
例 4. (2022·四川成都·统考二模) 如图, 在矩形 ABCD 中, $AB=9$, $AD=6$, 点 O 为对角线 AC 的中点, 点 E 在 DC 的延长线上且 $CE=1.5$, 连接 OE, 过点 O 作 $OF \perp OE$ 交 CB 延长线于点 F, 连接 FE 并延长交 AC 的延长线于点 G, 则 $\frac{FG}{OG} = \underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

【分析】作 $OM \perp CD$ 于 M, $ON \perp BC$ 于 N, 根据三角形中位线定理分别求出 OM、ON, 根据勾股定理求出 OE, 根据相似三角形的性质求出 FN, 得到 FC 的长, 证明 $\triangle GFC \sim \triangle GOE$, 根据相似三角形的性质列出比例式, 代入计算得到答案.

【详解】解: 作 $OM \perp CD$ 于 M, $ON \perp BC$ 于 N,



∵ 四边形 ABCD 为矩形, ∴ $\angle D = 90^\circ$, $\angle ABC = 90^\circ$, ∴ $OM \parallel AD$, $ON \parallel AB$,

∵ 点 O 为 AC 的中点, ∴ $OM = \frac{1}{2}AD = 3$, $ON = \frac{1}{2}AB = 4.5$, $CM = 4.5$, $CN = 3$,

∵ $CE = 1.5$, ∴ $ME = CM + CE = 6$, 在 $Rt\triangle OME$ 中, $OE = \sqrt{OM^2 + ME^2} = \sqrt{3^2 + 6^2} = 3\sqrt{5}$,

∵ $\angle MON = 90^\circ$, $\angle EOF = 90^\circ$, ∴ $\angle MOE + \angle NOE = \angle NOF + \angle NOE = 90^\circ$,

∴ $\angle MOE = \angle NOF$, 又 $\angle OME = \angle ONF = 90^\circ$, ∴ $\triangle OME \sim \triangle ONF$,

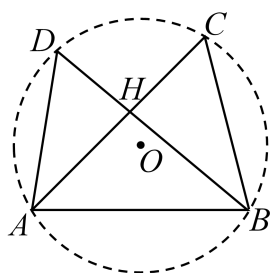
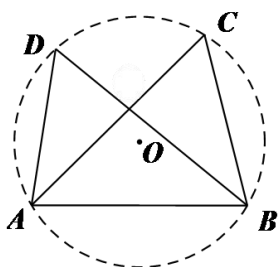
$$\therefore \frac{OM}{ON} = \frac{ME}{FN}, \text{ 即 } \frac{3}{4.5} = \frac{6}{FN}, \text{ 解得, } FN=9, \therefore FC=FN+NC=12,$$

$\therefore \angle FOE = \angle FCE = 90^\circ$, $\therefore F、O、C、E$ 四点共圆, $\therefore \angle GFC = \angle GOE$, 又 $\angle G = \angle G$, $\therefore \triangle GFC \sim \triangle GOE$,

$$\therefore \frac{FG}{OG} = \frac{FC}{OE} = \frac{12}{3\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}, \text{ 故答案为: } \frac{4\sqrt{5}}{5}.$$

【点睛】本题考查了矩形的性质、相似三角形的判定和性质、圆周角定理的应用，掌握相似三角形的判定定理和性质定理是解题的关键。

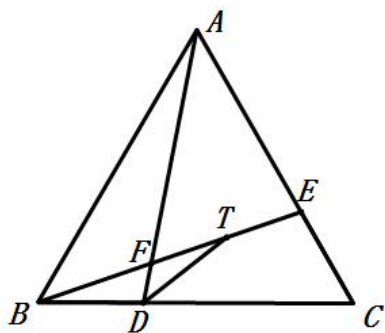
模型 3、定边对定角共圆模型



条件：如图 1，平面上 $A、B、C、D$ 四个点满足 $\angle ADB = \angle ACB$ ，结论： $A、B、C、D$ 四点共圆。

条件：如图 2， $AC、BD$ 交于 H ， $AH \cdot CH = BH \cdot DH$ ，结论： $A、B、C、D$ 四点共圆。

例 1. (2023·黑龙江哈尔滨·九年级校联考阶段练习) 如图，等边 $\triangle ABC$ 中， D 在 BC 上， E 在 AC 上， $BD = CE$ ，连 $BE、AD$ 交于 F ， T 在 EF 上，且 $DT = CE$ ， $AF = 50$ ， $TE = 16$ ，则 $FT = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



【答案】17

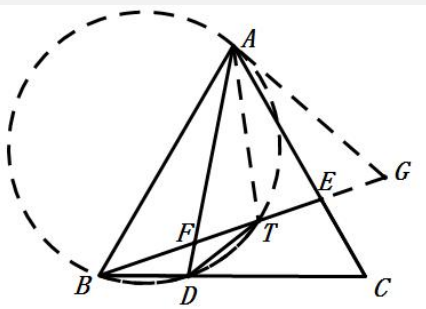
【分析】用“SAS”可判定 $\triangle ABD \cong \triangle BCE$ ，得到 $\angle AFE = 60^\circ$ ，延长 FE 至点 G ，使得 $FG = FA$ ，连 AG ， AT ，得到 $\triangle AFG$ 是等边三角形，证明 $A、B、D、T$ 四点共圆，设法证明 $\triangle FAT \cong \triangle GAE$ (ASA)，即可求得答案。

【详解】 $\because \triangle ABC$ 为等边三角形， $\therefore AB = AC = BC$ ， $\angle ABD = \angle BCE = 60^\circ$ ，

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle BCE$ 中，
$$\begin{cases} AB = BC \\ \angle ABD = \angle BCE = 60^\circ \\ BD = CE \end{cases}, \therefore \triangle ABD \cong \triangle BCE \text{ (SAS)}, \therefore \angle BAD = \angle CBE,$$

$\because \angle ADC = \angle CBE + \angle BFD = \angle BAD + \angle B$, $\therefore \angle BFD = \angle B = \angle AFE = 60^\circ$;

延长 FE 至点 G, 使得 FG=FA, 连 AG, AT,



$\because \angle AFE = 60^\circ$, $\therefore \triangle AFG$ 是等边三角形, $\therefore AG = AF = FG = 50$, $\angle AGF = \angle FAG = 60^\circ$,

$\because \angle BAF + \angle EAF = \angle CAG + \angle EAF = 60^\circ$, $\therefore \angle BAF = \angle CAG$,

$\because DT = CE$, $\therefore \angle DBT = \angle BTD$, $\because \angle BAD = \angle CBE$, $\therefore \angle BAD = \angle BTD$,

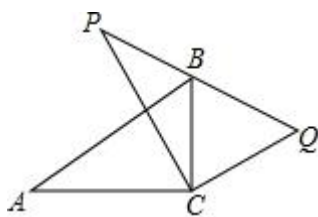
$\therefore A, B, D, T$ 四点共圆, $\therefore \angle BAD = \angle DAT$, $\therefore \angle FAT = \angle GAE$,

在 $\triangle FAT$ 和 $\triangle GAE$ 中,
$$\begin{cases} \angle FAT = \angle GAE \\ AF = AG \\ \angle AFG = \angle AGF = 60^\circ \end{cases}, \therefore \triangle FAT \cong \triangle GAE \text{ (ASA)}, \therefore FT = GE,$$

$\because FG = 50$, $TE = 16$, $\therefore FT = \frac{1}{2}(FG - TE) = 17$. 故答案为: 17.

【点睛】本题主要考查了等边三角形的判定和性质, 全等三角形的判定和性质, 圆周角定理等, 作出辅助线, 判断出 $\triangle FAT \cong \triangle GAE$ 是解本题的关键.

例 2. (2022 秋·湖南长沙·九年级校考阶段练习) 如图, 已知 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 4$, $BC = 3$, $\angle CPB = \angle A$, 过点 C 作 CP 的垂线, 与 BP 的延长线交于点 Q, 则 CQ 的最大值为 ()



A. 4

B. 5

C. $\frac{15}{4}$

D. $\frac{16}{5}$

【答案】C

【分析】由 $\angle PCQ = \angle ACB = 90^\circ$, $\angle CPB = \angle A$, 证明 $\triangle CPQ \sim \triangle CAB$, 推出 $QC = \frac{3}{4}PC$, 当 PC 有最大值时, CQ 有最大值, 根据 $\angle CPB = \angle A$, 得到点 A, C, B, P 四点共圆, 若 PC 有最大值, 则 PC 应为直径, 由 $\angle ACB = 90^\circ$, 得到 AB 是圆的直径, 勾股定理求出 $PC = AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 5$, 即可得到答案.

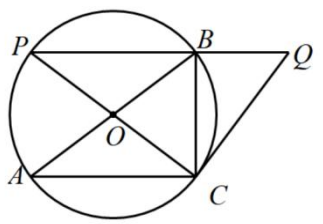
【详解】解：∵ $CQ \perp CP$ ∴ $\angle PCQ = \angle ACB = 90^\circ$ ∵ $\angle CPB = \angle A$ ∴ $\triangle CPQ \sim \triangle CAB$

$$\therefore \frac{PC}{AC} = \frac{QC}{BC} \therefore \frac{PC}{4} = \frac{QC}{3} \therefore QC = \frac{3}{4}PC, \therefore \text{当 } PC \text{ 有最大值时, } CQ \text{ 有最大值,}$$

∵ $\angle CPB = \angle A$, ∴ 点 A 、 C 、 B 、 P 四点共圆,

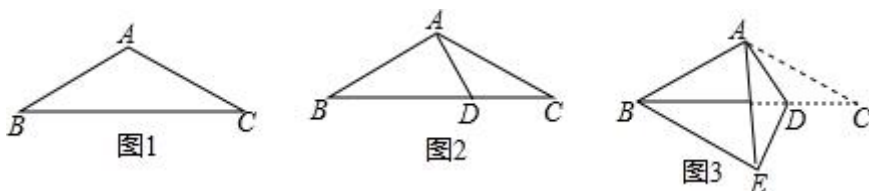
若 PC 有最大值, 则 PC 应为直径, ∵ $\angle ACB = 90^\circ$, ∴ AB 是圆的直径,

$$\therefore PC = AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 5, \therefore QC \text{ 的最大值为 } \frac{3}{4} \times 5 = \frac{15}{4}, \text{ 故选: C.}$$



【点睛】此题考查了相似三角形的判定和性质, 勾股定理, 四点共圆的判定和性质, 正确掌握四点共圆的性质是解题的关键.

例 3. (2023·浙江绍兴·九年级校联考期中) 如图 1, 在等腰三角形 ABC 中, $AB=AC=4$, $BC=6$. 如图 2, 在底边 BC 上取一点 D , 连结 AD , 使得 $\angle DAC = \angle ACD$. 如图 3, 将 $\triangle ACD$ 沿着 AD 所在直线折叠, 使得点 C 落在点 E 处, 连结 BE , 得到四边形 $ABED$. 则 BE 的长是 ()



- A. 1 B. $\frac{6}{5}$ C. $\frac{32}{15}$ D. $\frac{17}{4}$

【答案】A

【分析】只要证明 $\triangle ABD \sim \triangle MBE$, 得 $\frac{AB}{BM} = \frac{BD}{BE}$, 求出 BM 、 BD 即可解决问题.

【详解】解：∵ $AB=AC$, ∴ $\angle ABC = \angle C$,

∵ $\angle DAC = \angle ACD$, ∴ $\angle DAC = \angle ABC$, ∵ $\angle C = \angle C$, ∴ $\triangle CAD \sim \triangle CBA$,

$$\therefore \frac{CA}{CB} = \frac{CD}{CA}, \therefore \frac{4}{6} = \frac{CD}{4}, \therefore CD = \frac{8}{3}, BD = BC - CD = 6 - \frac{8}{3} = \frac{10}{3},$$

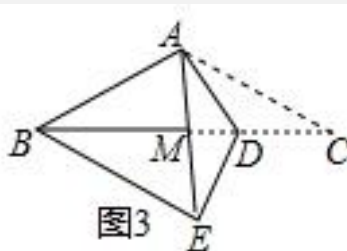
∵ $\angle DAM = \angle DAC = \angle DBA$, $\angle ADM = \angle ADB$, ∴ $\triangle ADM \sim \triangle BDA$,

$$\therefore \frac{AD}{BD} = \frac{DM}{DA}, \text{ 即 } \frac{\frac{8}{3}}{\frac{10}{3}} = \frac{DM}{\frac{8}{3}}, \therefore DM = \frac{32}{15}, MB = BD - DM = \frac{10}{3} - \frac{32}{15} = \frac{6}{5},$$

$\because \angle ABM = \angle C = \angle MED$, $\therefore A、B、E、D$ 四点共圆,

$\therefore \angle ADB = \angle BEM$, $\angle EBM = \angle EAD = \angle ABD$, $\therefore \triangle ABD \sim \triangle MBE$,

$\therefore \frac{AB}{BM} = \frac{BD}{BE}$, $\therefore BE = \frac{BM \cdot BD}{AB} = \frac{6 \times \frac{10}{3}}{5} = 4$. 故选: A .



【点睛】本题考查翻折变换、等腰三角形的判定和性质、相似三角形的判定和性质等知识，解题的关键是充分利用相似三角形的性质解决问题，本题需要三次相似解决问题，题目比较难，属于中考选择题中的压轴题。

例 4. (2023·浙江·九年级假期作业) 请阅读以下材料，完成相应任务.

我们知道，过任意一个三角形的三个顶点能作一个圆，那么过任意一个四边形的四个顶点能作一个圆吗？

李雷经过实践探究发现了如下结论：

如果线段同侧两点（与线段在同一平面内）分别与线段两端点的连线所组成的夹角相等，那么这两点和线段两端点四点共圆．下面是李雷证明上述命题的过程（不完整）.

已知：如图 1，点 C, D 是线段 AB 同侧两点，且 $\angle ACB = \angle ADB$.

求证：点 A, B, C, D 四点共圆.

证明：作 $\triangle ABC$ 的外接圆 $\odot O$ ，假设点 D 在 $\odot O$ 外或在 $\odot O$ 内.

如图 2，若点 D 在 $\odot O$ 外. 设 AD 与 $\odot O$ 交于点 E ，连接 BE ，

则 $\angle ACB = \angle AEB$ （依据一），

又 $\because \angle AEB = \angle ADB + \angle DBE$ （依据二），

$\therefore \angle ACB = \angle ADB + \angle DBE$.

$\therefore \angle ACB > \angle ADB$. 这与已知条件“ $\angle ACB = \angle ADB$ ”矛盾，故点 D 在 $\odot O$ 外不成立；

如图 3，若点 D 在 $\odot O$ 内，……

（请同学们补充完整省略的部分证明过程）

综上所述，作 $\triangle ABC$ 的外接圆 $\odot O$ ，点 D 在 $\odot O$ 上，即点 A, B, C, D 四点共圆.

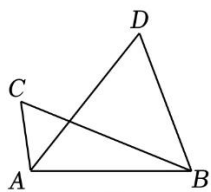


图1

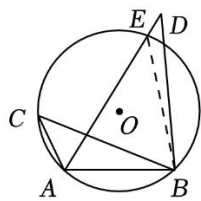


图2

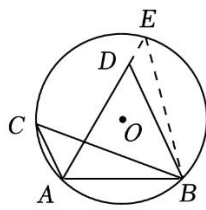


图3

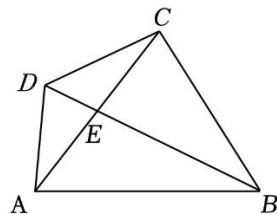


图4

(1) 填空：将材料中依据一、依据二补充完整；

依据一：_____； 依据二：_____。

(2) 请按照上面的证明思路，写出该证明的剩余部分；

(3) 填空：如图 4，在四边形 $ABCD$ 中， $\angle ABD = \angle ACD$ ，对角线 AC ， BD 交于点 E ， E 为 AC 中点，若 $BD = 6$ ， $BE = 4$ ，则 $AC = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】 (1) 同弧所对的圆周角相等；三角形的外角等于与它不相邻的两个内角的和 (2) 见解析 (3) $4\sqrt{2}$

【分析】 (1) 由圆周角定理和三角形的外角性质即可得出结论；

(2) 作 $\triangle ABC$ 的外接圆 $\odot O$ ，假设点 D 在 $\odot O$ 外或在 $\odot O$ 内。由反证法、圆周角定理以及三角形的外角性质即可得出结论；(3) 证点 A ， B ， C ， D 四点共圆，再由相似三角形得 $AE \cdot CE = BE \cdot DE$ ，然后由 E 为 AC 中点，得 $AE = CE = \frac{1}{2}AC$ ，即可解决问题。

【详解】 (1) 解：依据一：同弧所对的圆周角相等；

依据二：三角形的外角等于与它不相邻的两个内角的和；

故答案为：同弧所对的圆周角相等；三角形的外角等于与它不相邻的两个内角的和；

(2) 如图 3，若点 D 在 $\odot O$ 内，延长 AD 与 $\odot O$ 交于点 E ，连接 BE ，

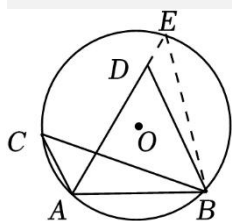


图3

则 $\angle ACB = \angle AEB$ ，又 $\because \angle ADB = \angle ADB + \angle DBE$ ，

$\therefore \angle ACB = \angle AEB + \angle DBE$ ， $\therefore \angle ACB < \angle ADB$ 。

这与已知条件“ $\angle ACB = \angle ADB$ ”矛盾，故点 D 在 $\odot O$ 内不成立；

(3) $\because \angle ABD = \angle ACD$ ， $\therefore$ 点 A ， B ， C ， D 四点共圆，

$\because \angle AEB = \angle CED$ ， $\therefore \triangle AEB \sim \triangle DEC$ ， $\therefore \frac{AE}{DE} = \frac{BE}{CE}$ ， $\therefore AE \cdot CE = BE \cdot DE$ ，

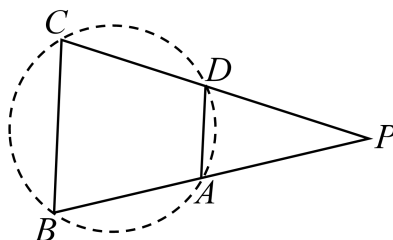
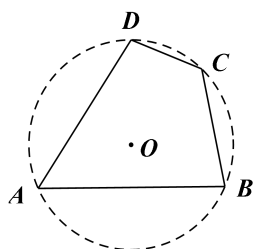
$\therefore E$ 为 AC 中点, $\therefore AE = CE = \frac{1}{2}AC$,

$\therefore BD = 6$, $BE = 4$, $\therefore DE = BD - BE = 2$, $\therefore \frac{1}{2}AC \cdot \frac{1}{2}AC = 4 \times 2$,

解得: $AC = 4\sqrt{2}$ (负值已舍去), 故答案为: $4\sqrt{2}$.

【点睛】本题是四点共圆综合题目, 考查了四点共圆、反证法、圆周角定理、相似三角形的判定和性质以及三角形的外角性质等知识, 本题综合性强, 熟练掌握圆周角定理, 证明四点共圆是解题的关键, 属于中考常考题型.

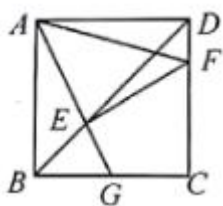
模型 4、对角互补共圆模型



条件: 如图 1, 平面上 A 、 B 、 C 、 D 四个点满足 $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$, 结论: A 、 B 、 C 、 D 四点共圆.

条件: 如图 2, BA 、 CD 的延长线交于 P , $PA \cdot PB = PD \cdot PC$, 结论: A 、 B 、 C 、 D 四点共圆.

例 1. (2022 春·九年级课时练习) 如图所示, 正方形 $ABCD$ 中, BD 为对角线, 点 E 为 BD 上一点, 过 E 作 $EF \perp AE$, 交 DC 于 F , 求证: $AE = FE$.



【答案】见解析.

【分析】先根据正方形的性质可得 $\angle CDA = 90^\circ$, 再根据 $EF \perp AE$ 得到 $\angle AEF = 90^\circ$, 从而得证 A , E , F , D 共圆, $\angle EAF = \angle BDC = 45^\circ$, 继而得出 $AE = FE$.

【详解】在正方形 $ABCD$ 中, $\angle ADC = 90^\circ$, $\angle BDC = 45^\circ$

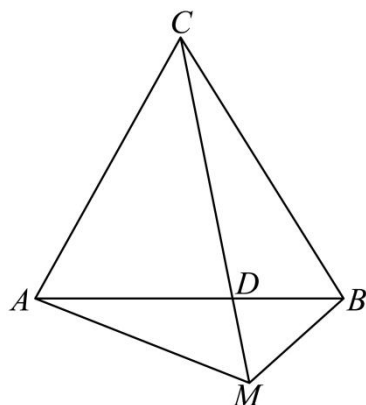
$\therefore EF \perp AE \therefore \angle AEF = 90^\circ \therefore \angle ADC + \angle AEF = 180^\circ$

$\therefore A$, E , F , D 共圆, $\therefore \angle EAF = \angle BDC = 45^\circ$,

$\therefore \angle EAF = \angle EFA = 45^\circ \therefore AE = FE$.

【点睛】本题考查了正方形的性质, 四点共圆, 以及等腰三角形的判定, 熟练掌握相关知识是解题的关键

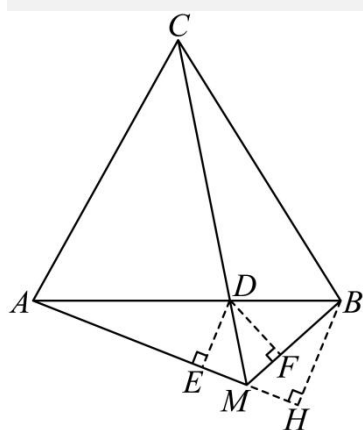
例 2. (2023·河南周口·校考三模) 在 $\triangle ABC$ 中, $CA=CB$, M 是 $\triangle ABC$ 外一动点, 满足 $\angle CAM + \angle CBM = 180^\circ$, 若 $\angle CMA = 60^\circ$, $MA=4$, $MB=2$, 则 MD 的长度为_____.



【答案】 $\frac{4}{3}$ / $1\frac{1}{3}$

【分析】过点 B 作 $BH \perp AM$ 交 AM 的延长线于点 H , 过点 D 作 $DE \perp AM$ 于点 E , 过点 D 作 $DF \perp MB$ 于点 F , 点 A, M, B, C 四点共圆, 得 $\angle AMC = \angle BMC = 60^\circ$, 解直角三角形 $DE = DF = \frac{\sqrt{3}}{2} MD$, $BH = \frac{\sqrt{3}}{2} MB$, 面积法求解, $S_{\triangle AMB} = \frac{1}{2} AM \cdot DE + \frac{1}{2} BM \cdot DF = \frac{1}{2} AM \cdot BH$, 得 $MD = \frac{4}{3}$.

【详解】解析: 过点 B 作 $BH \perp AM$ 交 AM 的延长线于点 H , 过点 D 作 $DE \perp AM$ 于点 E , 过点 D 作 $DF \perp MB$ 于点 F , 如图所示:



$\because \angle CAM + \angle CBM = 180^\circ \therefore$ 点 A, M, B, C 四点共圆

$\because CA=CB \therefore \angle AMC = \angle BMC = 60^\circ \therefore DE = DF = MD \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} MD$, $\angle AMB = 120^\circ$

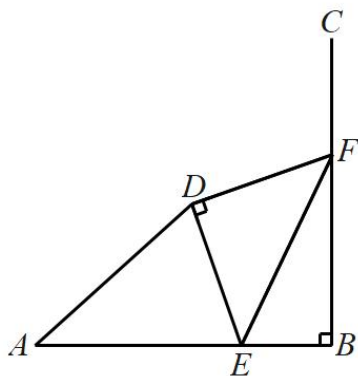
$\therefore \angle BMH = 60^\circ$, $\therefore BH = MB \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} MB$,

$\because MA=4$, $MB=2 \therefore S_{\triangle AMB} = \frac{1}{2} AM \cdot DE + \frac{1}{2} BM \cdot DF = \frac{1}{2} AM \cdot BH$,

$\therefore 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} MD + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} MD = 4 \times \sqrt{3}$, $\therefore MD = \frac{4}{3}$

【点睛】本题考查四点共圆，圆周角定理，解直角三角形，角平分线性质的定理，添加辅助构造直角三角形是解题的关键。

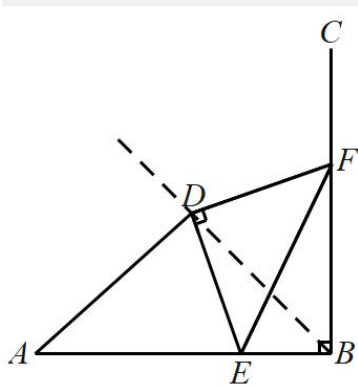
例 3. (2023·江苏·九年级假期作业) 如图， $AB \perp BC$ ， $AB=5$ ，点 E 、 F 分别是线段 AB 、射线 BC 上的动点，以 EF 为斜边向上作等腰 $\text{Rt}\triangle DEF$ ， $\angle D=90^\circ$ ，连接 AD ，则 AD 的最小值为 ____.



【答案】 $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

【分析】连接 BD 并延长，利用四点共圆的判定定理得到 B ， E ， D ， F 四点共圆，再利用等腰直角三角形的性质和圆周角定理得到 $\angle DBF = \angle DEF = 45^\circ$ ，得到点 D 的轨迹，最后利用垂线段最短和等腰直角三角形的性质解答即可得出结论。

【详解】解：连接 BD 并延长，如图，



$\because AB \perp BC$ ， $\therefore \angle ABC = 90^\circ$ ， $\angle EDF = 90^\circ$ ， $\therefore \angle ABC + \angle EDF = 180^\circ$ ， $\therefore B$ ， E ， D ， F 四点共圆，

$\because \triangle DEF$ 为等腰直角三角形， $\therefore \angle DEF = \angle DFE = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle DBF = \angle DEF = 45^\circ$ ， $\therefore \angle DBF = \angle DBE = 45^\circ$ ， $\therefore$ 点 D 的轨迹为 $\angle ABC$ 的平分线上，

$\therefore$ 垂线段最短， $\therefore$ 当 $AD \perp BD$ 时， AD 取最小值，

$\therefore AD$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{2}}{2} AB = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ ，故答案为： $\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

【点睛】本题主要考查了直角三角形的性质，等腰直角三角形的性质，四点共圆的判定，圆周角定理，点

的轨迹，垂线段的性质，利用已知条件求得点 D 的轨迹是解题的关键。

例 4. (2023·河南南阳·校考三模) 综合实践课上，刘老师介绍了四点共圆的判定定理：若平面上四点连成四边形的对角互补或一个外角等于其内对角，那么这四点共圆。在实际应用中，如果运用这个定理，往往可以让复杂的问题简单化，以下是小明同学对一道四边形问题的分析，请帮助他补充完整。

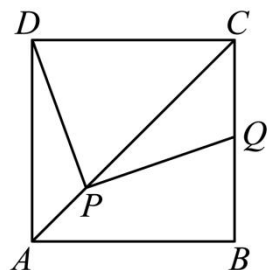


图1

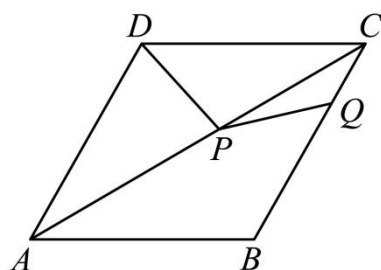


图2

特殊情况分析：(1)如图 1，正方形 $ABCD$ 中，点 P 为对角线 AC 上一个动点，连接 PD ，将射线 PD 绕点 P 顺时针旋转 $\angle ADC$ 的度数，交直线 BC 于点 Q 。

小明的思考如下：

连接 DQ ， $\because AD \parallel CQ$ ， $\angle ADC = \angle DCQ = 90^\circ$ ，
 $\therefore \angle ACQ = \angle DAC$ ，(依据 1)
 $\because \angle DPQ = 90^\circ$ ， $\therefore \angle DPQ + \angle DCQ = 180^\circ$ ，
 $\therefore$ 点 D 、 P 、 Q 、 C 共圆，
 $\therefore \angle PDQ = \angle PCQ$ ， $\angle DQP = \angle PCD$ ，(依据 2)
 $\therefore \angle PDQ = \angle DQP$ ， $\therefore DP = QP$ 。(依据 3)

填空：①依据 1 应为_____，②依据 2 应为_____，③依据 3 应为_____；

一般结论探究：(2)将图 1 中的正方形 $ABCD$ 改为菱形 $ABCD$ ，其他条件不变，(1)中的结论是否成立，若成立，请仅以图 2 的形式证明，若不成立，请说明理由；

结论拓展延伸：(3)如图 2，若 $\angle ADC = 120^\circ$ ， $AD = 3$ ，当 $\triangle PQC$ 为直角三角形时，请直接写出线段 PQ 的长。

【答案】(1)两直线平行，内错角相等；同弧所对的圆周角相等；等角对等边

(2)成立，理由见解析(3) $PQ = \sqrt{3}$ 或 3

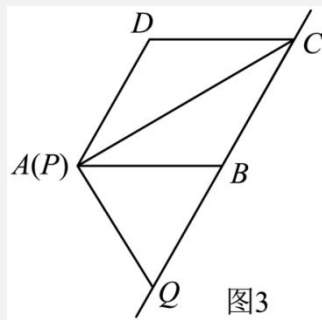
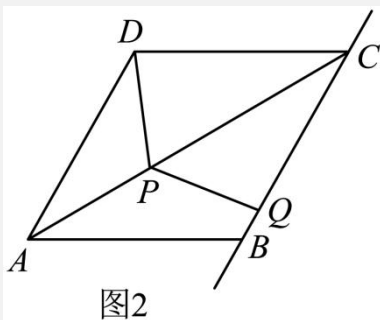
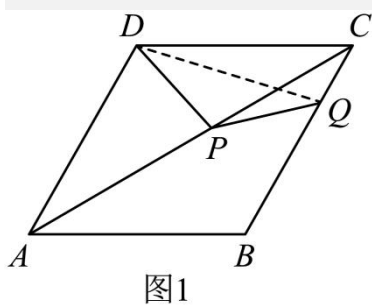
【分析】(1)根据材料中的证明过程，即可得到答案；(2)连接 DQ ，如图 1 所示，由菱形的性质得到 $BC \parallel AD$ ，从而确定点 D 、 P 、 C 、 Q 共圆，再由圆周角定理得到 $\angle DQP = \angle ACD$ ， $\angle ACB = \angle PDQ$ ，进而结合菱形性质及等腰三角形的性质即可得证；(3)如图 2 所示，当 $\angle ADC = 120^\circ$ 时， $\angle DCB = 60^\circ$ ，从而由 $\triangle PQC$ 为直角三角形可分两种情况讨论求解即可得到答案。

【详解】(1) 解：由题意可知：①两直线平行，内错角相等，

②同弧所对的圆周角相等，③等角对等边，

故答案为：两直线平行，内错角相等；同弧所对的圆周角相等；等角对等边；

(2) 解：(1) 中结论仍然成立，理由如下：连接 DQ ，如图 1 所示：



$\because$ 在菱形 $ABCD$ 中 $BC \parallel AD$ ， $\therefore \angle ADC + \angle DCQ = 180^\circ$ ， $\angle DPQ = \angle ADC$ ，

$\therefore \angle DPQ + \angle DCQ = 180^\circ$ ， $\therefore$ 点 D 、 P 、 C 、 Q 共圆， $\therefore \angle DQP = \angle ACD$ ， $\angle ACB = \angle PDQ$ ，

$\because AC$ 为菱形 $ABCD$ 的对角线， $\therefore \angle ACB = \angle ACD$ ， $\therefore \angle PDQ = \angle DQP$ ， $\therefore DP = PQ$ ；

(3) 解： $PQ = \sqrt{3}$ 或 3. 由于点 P 为对角线 AC 上一个动点，分两类情况讨论如下：

①当 $\angle PQC = 90^\circ$ 时，如图 2 所示：

$\because$ 在菱形 $ABCD$ 中， $AD = CD = 3$ ， $\angle ADC = 120^\circ$ ， $\therefore \angle DAC = \angle ACD = \frac{180^\circ - \angle ADC}{2} = 30^\circ$ ，

$\because BC \parallel AD$ ， $\therefore \angle ACQ = \angle DAC = 30^\circ$ ， $\therefore \angle CPQ = 90^\circ - \angle ACQ = 60^\circ$ ，

由 (2) 中知点 D 、 P 、 C 、 Q 共圆，知 $\angle DPQ + \angle DCQ = 180^\circ$ ， $\therefore \angle DPQ = 120^\circ$ ，

$\therefore \angle DPC = \angle DPQ - \angle CPQ = 120^\circ - 60^\circ = 60^\circ$ ， $\therefore \angle ACD + \angle DPC = 90^\circ$ ，即 $\angle CDP = 90^\circ$ ，

$\therefore$ 在 $Rt\triangle CDP$ 中， $\angle DCP = 30^\circ$ ，则 $DP = \frac{CD}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ ， $\therefore$ 由 (2) 知 $PQ = DP = \sqrt{3}$ ；

②当 $\angle CAQ = 90^\circ$ 时，如图 3 所示：

在菱形 $ABCD$ 中， $\angle ADC = 120^\circ$ ，则 $\angle ABC = 120^\circ$ ， $\angle DAB = 60^\circ$ ，

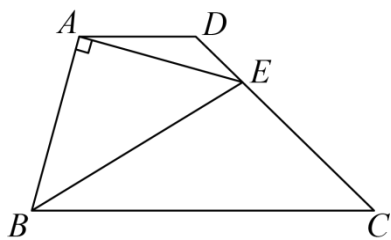
$\therefore \angle ACB = \angle CAB = 30^\circ$ ， $\angle BAQ = \angle ABQ = 60^\circ$ ， $\therefore$ 点 P 与点 A 重合，

由 (2) 可知， $DP = PQ$ ， $\therefore PQ = AD = 3$ ，综上所述： $PQ = \sqrt{3}$ 或 3.

【点睛】本题考查特殊平行四边形综合，涉及正方形性质、菱形性质、含 30° 的直角三角形三边关系、等腰三角形的判定与性质、等边三角形的判定与性质、四点共圆、圆周角定理等知识，熟练掌握相关几何知识并灵活运用是解决问题的关键。

课后专项训练

1. (2023·浙江·统考中考真题) 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle C = 45^\circ$, 以 AB 为腰作等腰直角三角形 BAE , 顶点 E 恰好落在 CD 边上, 若 $AD = 1$, 则 CE 的长是 ()



- A. $\sqrt{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. 2 D. 1

【答案】A

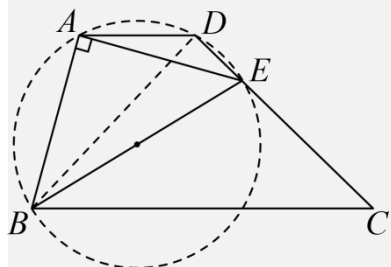
【分析】先根据等腰三角形的性质可得 $BE = \sqrt{2}AB$, $\angle ABE = \angle AEB = 45^\circ$, $\angle BAE = 90^\circ$, 再判断出点 A, B, E, D 四点共圆, 在以 BE 为直径的圆上, 连接 BD , 根据圆周角定理可得 $\angle BDE = 90^\circ$, $\angle ADB = \angle AEB = 45^\circ$, 然后根据相似三角形的判定可得 $\triangle ABD \sim \triangle EBC$, 根据相似三角形的性质即可得.

【详解】解: $\because \triangle BAE$ 是以 AB 为腰的等腰直角三角形,

$$\therefore BE = \sqrt{2}AB, \angle ABE = \angle AEB = 45^\circ, \angle BAE = 90^\circ,$$

$$\because AD \parallel BC, \angle C = 45^\circ, \therefore \angle ADE = 180^\circ - \angle C = 135^\circ, \therefore \angle ADE + \angle ABE = 180^\circ,$$

$\therefore$ 点 A, B, E, D 四点共圆, 在以 BE 为直径的圆上, 如图, 连接 BD ,



由圆周角定理得: $\angle BDE = 90^\circ$, $\angle ADB = \angle AEB = 45^\circ$, $\therefore \angle ADB = \angle C = \angle CBD = 45^\circ$,

$$\therefore \angle ABD + \angle DBE = 45^\circ = \angle EBC + \angle DBE, \therefore \angle ABD = \angle EBC,$$

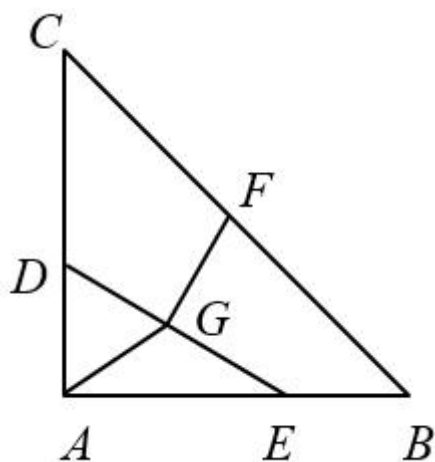
在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle EBC$ 中, $\begin{cases} \angle ADB = \angle C \\ \angle ABD = \angle EBC \end{cases}, \therefore \triangle ABD \sim \triangle EBC,$

$$\therefore \frac{CE}{AD} = \frac{EB}{AB} = \sqrt{2}, \therefore CE = \sqrt{2}AD = \sqrt{2} \times 1 = \sqrt{2}, \text{ 故选: A.}$$

【点睛】本题考查了圆内接四边形、圆周角定理、相似三角形的判定与性质、等腰三角形的性质等知识点, 正确判断出点 A, B, E, D 四点共圆, 在以 BE 为直径的圆上是解题关键.

2. (2021·浙江嘉兴·统考中考真题) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = AC = 5$, 点 D 在 AC 上, 且 $AD = 2$, 点 E 是 AB 上的动点, 连结 DE , 点 F, G 分别是 BC, DE 的中点, 连接 AG, FG , 当 $AG = FG$ 时, 线段 DE

长为 ()



A. $\sqrt{13}$

B. $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{41}}{2}$

D. 4

【答案】A

【分析】连接 DF , EF , 过点 F 作 $FN \perp AC$, $FM \perp AB$, 结合直角三角形斜边中线等于斜边的一半求得点 A , D , F , E 四点共圆, $\angle DFE = 90^\circ$, 然后根据勾股定理及正方形的判定和性质求得 AE 的长度, 从而求解.

【详解】解: 连接 DF , EF , 过点 F 作 $FN \perp AC$, $FM \perp AB$

$\because$ 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, 点 G 是 DE 的中点, $\therefore AG = DG = EG$

又 $\because AG = FG \therefore$ 点 A , D , F , E 四点共圆, 且 DE 是圆的直径 $\therefore \angle DFE = 90^\circ$

$\because$ 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 5$, 点 F 是 BC 的中点, $\therefore CF = BF = \frac{1}{2}BC = \frac{5\sqrt{2}}{2}$, $FN = FM = \frac{5}{2}$

又 $\because FN \perp AC$, $FM \perp AB$, $\angle BAC = 90^\circ \therefore$ 四边形 $NAMF$ 是正方形 $\therefore AN = AM = FN = \frac{5}{2}$

又 $\because \angle NFD + \angle DFM = 90^\circ$, $\angle DFM + \angle MFE = 90^\circ \therefore \angle NFD = \angle MFE$

$\therefore \triangle NFD \cong \triangle MFE \therefore ME = DN = AN - AD = \frac{1}{2} \therefore AE = AM + ME = 3$

$\therefore$ 在 $Rt\triangle DAE$ 中, $DE = \sqrt{AD^2 + AE^2} = \sqrt{13}$ 故选: A.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/388074061110007020>