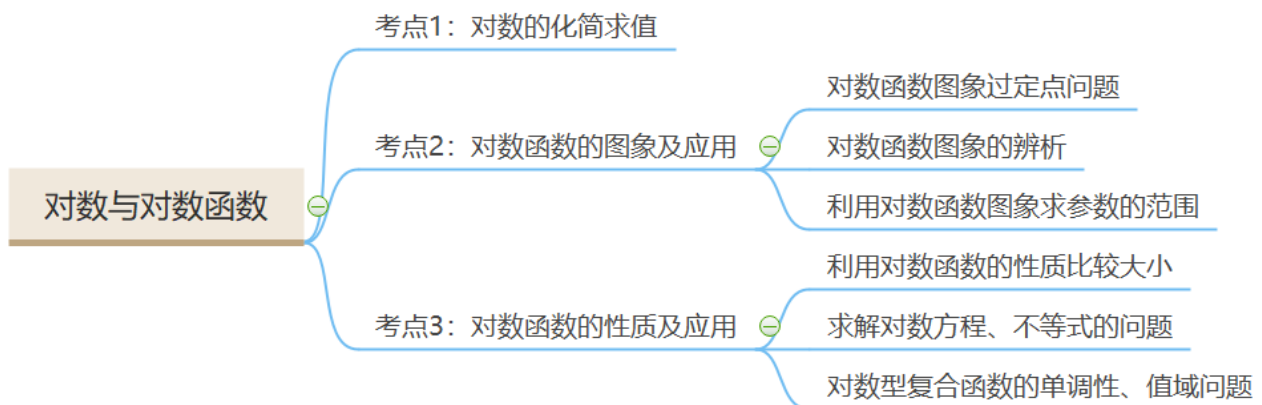


第12讲 对数与对数函数



走进教材 · 自主回顾

1. 对数的概念

如果 $a^x = N$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$), 那么数 x 叫做以 a 为底 N 的对数, 记作 $x = \log_a N$, 其中 a 叫做对数的底数, N 叫做真数.

2. 对数的性质、运算性质与换底公式

(1) 对数的性质: ① $a^{\log_a N} = N$; ② $\log_a a^b = b$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$).

(2) 对数的运算性质

如果 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, $M > 0$, $N > 0$, 那么

$$\textcircled{1} \log_a(MN) = \log_a M + \log_a N;$$

$$\textcircled{2} \log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N;$$

$$\textcircled{3} \log_a M^n = n \log_a M (n \in \mathbf{R}).$$

(3) 换底公式: $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$, 且 $c \neq 1$).

3. 对数函数及其性质

(1) 概念: 函数 $y = \log_a x$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 叫做对数函数, 其中 x 是自变量, 定义域是 $(0, +\infty)$.

(2) 对数函数的图象与性质

	$a > 1$	$0 < a < 1$
--	---------	-------------

图象		
性质	定义域: $(0, +\infty)$	
	值域: $\mathbf{R}$	
	当 $x=1$ 时, $y=0$, 即过定点 $(1, 0)$	
	当 $x>1$ 时, $y>0$; 当 $0<x<1$ 时, $y<0$	当 $x>1$ 时, $y<0$; 当 $0<x<1$ 时, $y>0$
	在 $(0, +\infty)$ 上是 增函数	在 $(0, +\infty)$ 上是 减函数

4. 反函数

指数函数 $y=a^x(a>0, \text{ 且 } a\neq 1)$ 与对数函数 $y=\log_a x(a>0, \text{ 且 } a\neq 1)$ 互为反函数, 它们的图象关于直线 $y=x$ 对称. 它们的定义域和值域正好互换.

02

考点探究 · 题型突破



考点 1 对数的化简求值

[名师点睛]

1. 在对数运算中, 先利用幂的运算把底数或真数进行变形, 化成分数指数幂的形式, 使幂的底数最简, 然后用对数运算法则化简合并.
2. 先将对数式化为同底数对数的和、差、倍数运算, 然后逆用对数的运算法则, 转化为同底对数真数的积、商、幂再运算.
3. $a^b=N \Leftrightarrow b=\log_a N(a>0, \text{ 且 } a\neq 1)$ 是解决有关指数、对数问题的有效方法, 在运算中应注意互化.

[典例]

1. (2022·浙江绍兴·模拟预测) 已知 $\lg a + b = 2, a^b = 10$, 则 $a =$ _____; $b =$ _____.

【答案】 10 1

【解析】 $a^b = 10 \Rightarrow b = \log_a 10$,

$$\therefore \lg a + b = \frac{1}{\log_a 10} + \log_a 10 = 2, \text{ 解得 } \log_a 10 = 1 \Rightarrow a = 10, \therefore b = 1.$$

故答案为: 10; 1.

2. (2022·全国·高三专题练习) 化简求值

$$(1) \log_3 \frac{5}{4} + \log_3 \frac{36}{5} - 3^{\log_3 2} + (\sqrt{2} - 1)^{\lg 1};$$

$$(2) (\lg 2)^2 + \lg 5 \times \lg 2 + \lg 5 + \ln 1;$$

$$(3) \ln 2e^2 + \log_3 7 \cdot \log_7 81 - \ln 2 - \log_2 \sqrt{2} - \log_2 \sqrt{8};$$

$$(4) 2^{\log_2 3} - \log_3 7 \cdot \log_7 9 + \log_{18} 6 + \log_{18} 3.$$

【解】(1) $\log_3 \frac{5}{4} + \log_3 \frac{36}{5} - 3^{\log_3 2} + (\sqrt{2} - 1)^{\lg 1}$
 $= \log_3 9 - 2 + (\sqrt{2} - 1)^0 = 2 - 2 + 1 = 1;$

(2) $(\lg 2)^2 + \lg 5 \times \lg 2 + \lg 5 + \ln 1$
 $= (\lg 2 + \lg 5) \times \lg 2 + \lg 5 + 0 = \lg 2 + \lg 5 = 1;$

(3) $\ln 2e^2 + \log_3 7 \cdot \log_7 81 - \ln 2 - \log_2 \sqrt{2} - \log_2 \sqrt{8}$
 $= \ln 2 + \ln e^2 + \frac{\ln 7}{\ln 3} \cdot \frac{\ln 3^4}{\ln 7} - \ln 2 - \log_2 2^{\frac{1}{2}} - \log_2 2^{\frac{3}{2}}$
 $= \ln 2 + 2 + 4 - \ln 2 - \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = 4;$

(4) $2^{\log_2 3} - \log_3 7 \cdot \log_7 9 + \log_{18} 6 + \log_{18} 3$
 $= 3 - \frac{\lg 7}{\lg 3} \cdot \frac{\lg 3^2}{\lg 7} + \log_{18} (6 \times 3) = 3 - 2 + 1 = 2$

3. (2022·全国·高三专题练习) (1) 计算 $3^{\log_3 2} + 27^{\frac{1}{3}} + \lg 50 + \lg 2;$

(2) 已知 $\log_2 [\log_3 (\lg x)] = 1$, 求实数 x 的值;

(3) 若 $18^a = 5$, $\log_{18} 9 = b$, 用 a, b , 表示 $\log_{36} 45$.

【解】(1) 原式 $= 2 + 3 + \lg(5 \times 10) + \lg 2 = 5 + \lg 5 + 1 + \lg 2 = 6 + \lg 5 + \lg 2 = 6 + \lg 10 = 7;$

(2) 因为 $\log_2 [\log_3 (\lg x)] = 1$, 所以 $\log_3 (\lg x) = 2$, 所以 $\lg x = 3^2 = 9$, 所以 $x = 10^9$;

(3) 因为 $18^a = 5$, 所以 $\log_{18} 5 = a$, 所以 $\log_{36} 45 = \frac{\log_{18} 45}{\log_{18} 36} = \frac{\log_{18} (5 \times 9)}{\log_{18} (18 \times 2)} = \frac{\log_{18} 5 + \log_{18} 9}{\log_{18} 18 + \log_{18} (18 \div 9)} =$

$$\frac{\log_{18} 5 + \log_{18} 9}{\log_{18} 18 + \log_{18} 18 - \log_{18} 9} = \frac{a + b}{2 - b}.$$

[举一反三]

1. (多选) (2021·全国·高三专题练习) 设 a, b, c 都是正数, 且 $4^a = 6^b = 9^c$, 那么 ()

A. $ab+bc=2ac$ B. $ab+bc=ac$ C. $\frac{2}{c}=\frac{2}{a}+\frac{1}{b}$ D. $\frac{1}{c}=\frac{2}{b}-\frac{1}{a}$

【答案】AD

【解析】由于 a, b, c 都是正数, 故可设 $4^a = 6^b = 9^c = M$,

$\therefore a = \log_4 M, b = \log_6 M, c = \log_9 M$, 则 $\frac{1}{a} = \log_M 4, \frac{1}{b} = \log_M 6, \frac{1}{c} = \log_M 9$.

$\because \log_M 4 + \log_M 9 = 2\log_M 6, \therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{2}{b}$, 即 $\frac{1}{c} = \frac{2}{b} - \frac{1}{a}$, 去分母整理得, $ab+bc=2ac$.

故选 AD.

2. (2022·山东滨州·二模) $\log_2 \sin 15^\circ - \log_{\frac{1}{2}} \cos 345^\circ =$ _____.

【答案】-2

【解析】解: 因为 $\cos 345^\circ = \cos(360^\circ - 15^\circ) = \cos 15^\circ$,

所以

$$\log_2 \sin 15^\circ - \log_{\frac{1}{2}} \cos 345^\circ = \log_2 \sin 15^\circ + \log_2 \cos 15^\circ = \log_2 (\sin 15^\circ \cos 15^\circ) = \log_2 \left(\frac{1}{2} \sin 30^\circ \right) = \log_2 \frac{1}{4} = -2,$$

故答案为: -2.

3. (2022·全国·高三专题练习) (1) $2\log_3 2 - \log_3 \frac{32}{9} + \log_3 8 - 5^{\log_5 3}$;

(2) $(\log_2 125 + \log_4 25 + \log_8 5) \cdot (\log_5 2 + \log_{25} 4 + \log_{125} 8)$.

【解】(1) 原式 $= 2\log_3 2 - 5\log_3 2 + 2 + 3\log_3 2 - 3 = -1$.

(2) 原式 $= \left(\log_2 5^3 + \frac{\log_2 25}{\log_2 4} + \frac{\log_2 5}{\log_2 8} \right) \cdot \left(\log_5 2 + \frac{\log_5 4}{\log_5 25} + \frac{\log_5 8}{\log_5 125} \right)$

$$= \left(3\log_2 5 + \frac{2\log_2 5}{2\log_2 2} + \frac{\log_2 5}{3\log_2 2} \right) \cdot \left(\log_5 2 + \frac{2\log_5 2}{2\log_5 5} + \frac{3\log_5 2}{3\log_5 5} \right) = \left(3 + 1 + \frac{1}{3} \right) \log_2 5 \cdot (3\log_5 2) = 13\log_2 5 \cdot \frac{\log_2 2}{\log_2 5} = 13.$$

4. (2022·全国·高三专题练习) 化简求值:

(1) $\log_3 5 \cdot \log_3 15 - (\log_3 5)^2 - \frac{1}{\log_5 3} + 3^{\log_3 5}$.

(2) $(\lg 2)^2 + \lg 20 \times \lg 5 + 3^{\log_9 4}$;

(3) $\lg 20 - \lg 2 + \log_2 3 \cdot \log_9 16 - e^{\ln 2} + 2\sin 330^\circ$.

$$(4) \lg 25 + \frac{2}{3} \lg 8 + \lg 5 \cdot \lg 20 + (\lg 2)^2.$$

$$(5) (\log_2 3 + \log_5 3) \cdot (\log_3 5 + \log_9 5) \lg 2.$$

【解】(1) $\log_3 5 \cdot \log_3 15 - (\log_3 5)^2 - \frac{1}{\log_5 3} + 3^{\log_3 5}$

$$= \log_3 5 \times \log_3 (5 \times 3) - (\log_3 5)^2 - \log_3 5 + 5$$

$$= \log_3 5 \times (1 + \log_3 5) - (\log_3 5)^2 - \log_3 5 + 5$$

$$= \log_3 5 + (\log_3 5)^2 - (\log_3 5)^2 - \log_3 5 + 5 = 5 ;$$

(2) $(\lg 2)^2 + \lg 20 \times \lg 5 + 3^{\log_9 4}$

$$= (\lg 2)^2 + (\lg 2 + 1) \cdot \lg 5 + 3^{\log_3 2}$$

$$= (\lg 2)^2 + \lg 2 \cdot \lg 5 + \lg 5 + 2$$

$$= \lg 2 (\lg 2 + \lg 5) + \lg 5 + 2 = \lg 2 + \lg 5 + 2 = 3 ;$$

(3) $\lg 20 - \lg 2 + \log_2 3 \cdot \log_9 16 - e^{\ln 2} + 2 \sin 330^\circ$

$$= \lg \frac{20}{2} + \log_2 3 \cdot \log_{3^2} 2^4 - 2 + 2 \sin(-30^\circ)$$

$$= \lg 10 + \log_2 3 \cdot 2 \cdot \log_3 2 - 2 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 1 + 2 - 2 - 1 = 0 ;$$

(4) $\lg 25 + \frac{2}{3} \lg 8 + \lg 5 \cdot \lg 20 + (\lg 2)^2$

$$= 2 \lg 5 + 2 \lg 2 + \lg 5 \cdot \lg (10 \times 2) + (\lg 2)^2$$

$$= 2(\lg 5 + \lg 2) + \lg 5(1 + \lg 2) + (\lg 2)^2$$

$$= 2 + \lg 5 + \lg 2(\lg 5 + \lg 2) = 3 ;$$

(5) $(\log_2 3 + \log_5 3) \cdot (\log_3 5 + \log_9 5) \lg 2$

$$= \left(\frac{\lg 3}{\lg 2} + \frac{\lg 3}{\lg 5}\right) \cdot \left(\frac{\lg 5}{\lg 3} + \frac{\lg 5}{\lg 9}\right) \lg 2$$

$$= \frac{\lg 3(\lg 2 + \lg 5)}{\lg 2 \cdot \lg 5} \cdot \frac{\lg 5(\lg 3 + \lg 9)}{\lg 3 \cdot \lg 9} \cdot \lg 2$$

$$= \frac{\lg 3 + 2 \cdot \lg 3}{2 \lg 3} = \frac{3}{2}.$$

5. (2022·全国·高三专题练习) (1) 求 $\log_2 \frac{1}{25} \cdot \log_3 8 \cdot \log_{\frac{1}{5}} 27$ 的值.

(2) 已知 $\log_9 5 = a$, $3^b = 7$, 试用 a, b 表示 $\log_{21} 35$

【解】(1) 原式 $= \log_2 5^{-2} \cdot \log_3 2^3 \cdot \log_{5^{-1}} 3^3 = (-2 \log_2 5) \cdot (3 \log_3 2) \cdot (-3 \log_5 3)$
 $= 18 \cdot \frac{\lg 5}{\lg 2} \cdot \frac{\lg 2}{\lg 3} \cdot \frac{\lg 3}{\lg 5} = 18$

(2) 由 $3^b = 7$ 得到 $\log_3 7 = b$,

由 $\log_9 5 = a$, 得到 $a = \frac{1}{2} \log_3 5$, 即 $\log_3 5 = 2a$.

$$\log_{21} 35 = \frac{\log_3 35}{\log_3 21} = \frac{\log_3 5 + \log_3 7}{\log_3 7 + \log_3 3} = \frac{2a + b}{b + 1}.$$



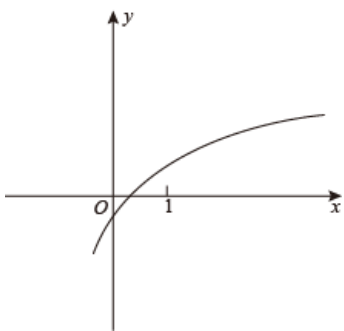
考点2 对数函数的图象及应用

[名师点睛]

1. 在识别函数图象时, 要善于利用已知函数的性质、函数图象上的特殊点(与坐标轴的交点、最高点、最低点等)排除不符合要求的选项.
2. 一些对数型方程、不等式问题常转化为相应的函数图象问题, 利用数形结合法求解.

[典例]

1. (2022·山东潍坊·二模) 已知函数 $f(x) = \log_a(x-b)$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的图像如图所示, 则以下说法正确的是 ()



- A. $a+b < 0$ B. $ab < -1$ C. $0 < a^b < 1$ D. $\log_a |b| > 0$

【答案】C

【解析】由图象可知 $f(x)$ 在定义域内单调递增, 所以 $a > 1$,

令 $f(x) = \log_a(x-b) = 0$ ，即 $x = b+1$ ，所以函数 $f(x)$ 的零点为 $b+1$ ，结合函数图象可知 $0 < b+1 < 1$ ，所以 $-1 < b < 0$ ，

因此 $a+b > 0$ ，故 A 错误；

$-a < ab < 0$ ，又因为 $a > 1$ ，所以 $-a < -1$ ，因此 $ab < -1$ 不一定成立，故 B 错误；

因为 $a^{-1} < a^b < a^0$ ，即 $\frac{1}{a} < a^b < 1$ ，且 $0 < \frac{1}{a} < 1$ ，所以 $0 < a^b < 1$ ，故 C 正确；

因为 $0 < |b| < 1$ ，所以 $\log_a |b| < \log_a 1$ ，即 $\log_a |b| < 0$ ，故 D 错误，

故选：C.

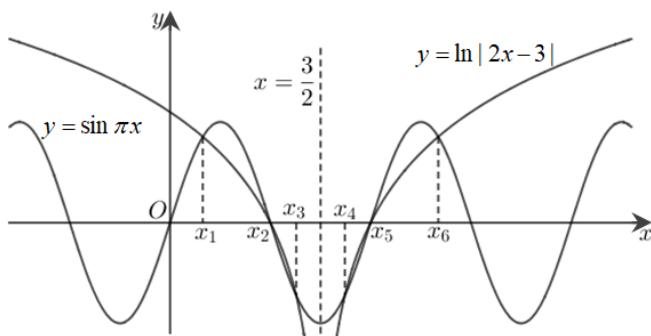
2. (2022·广东广州·二模) 函数 $f(x) = \sin \pi x - \ln|2x-3|$ 的所有零点之和为_____.

【答案】9

【解析】由 $f(x) = 0 \Leftrightarrow \sin \pi x = \ln|2x-3|$ ，令 $y = \sin \pi x$ ， $y = \ln|2x-3|$ ，

显然 $y = \sin \pi x$ 与 $y = \ln|2x-3|$ 的图象都关于直线 $x = \frac{3}{2}$ 对称，

在同一坐标系内作出函数 $y = \sin \pi x$ ， $y = \ln|2x-3|$ 的图象，如图，



观察图象知，函数 $y = \sin \pi x$ ， $y = \ln|2x-3|$ 的图象有 6 个公共点，其横坐标依次为 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ ，

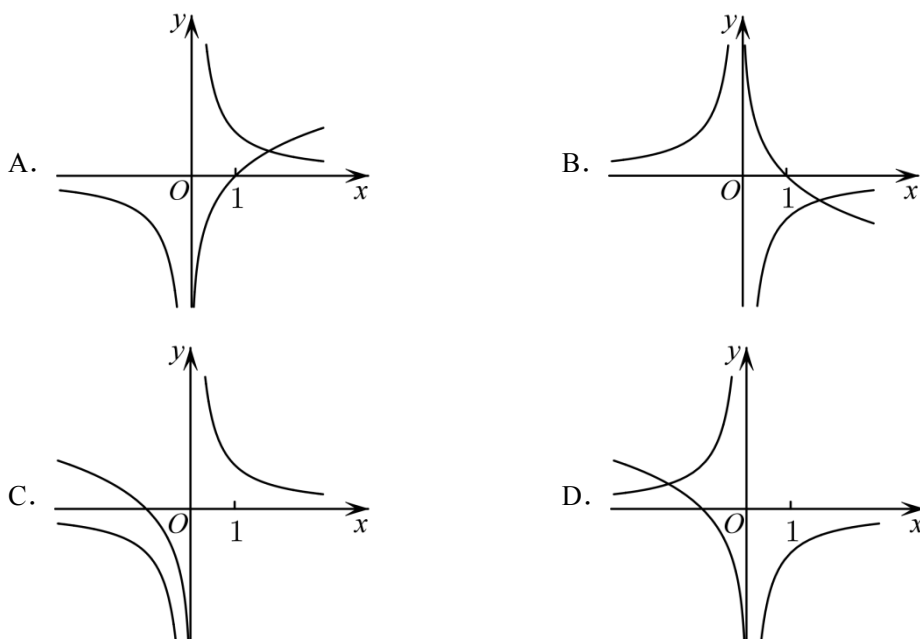
这 6 个点两两关于直线 $x = \frac{3}{2}$ 对称，有 $x_1 + x_6 = x_2 + x_5 = x_3 + x_4 = 3$ ，则 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 9$ ，

所以函数 $f(x) = \sin \pi x - \ln|2x-3|$ 的所有零点之和为 9.

故答案为：9

[举一反三]

1. (2022·浙江绍兴·模拟预测) 在同一直角坐标系中，函数 $y = \log_a(-x)$ ， $y = \frac{a-1}{x}$ ($a > 0$)，且 $a \neq 1$ 的图象可能是 ()



【答案】C

【解析】解：因为函数 $y = \log_a(-x)$ 的图象与函数 $y = \log_a x$ 的图象关于 y 轴对称，

所以函数 $y = \log_a(-x)$ 的图象恒过定点 $(-1, 0)$ ，故选项 A、B 错误；

当 $a > 1$ 时，函数 $y = \log_a x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，所以函数 $y = \log_a(-x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减，

又 $y = \frac{a-1}{x}$ ($a > 1$) 在 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 上单调递减，故选项 D 错误，选项 C 正确。

故选：C.

2. (2022·江苏·二模) 已知实数 a, b, c 满足 $\ln a = 2^b = c^{-\frac{1}{2}}$ ，则下列关系式中不可能成立的是 ()

A. $a > b > c$

B. $a > c > b$

C. $c > a > b$

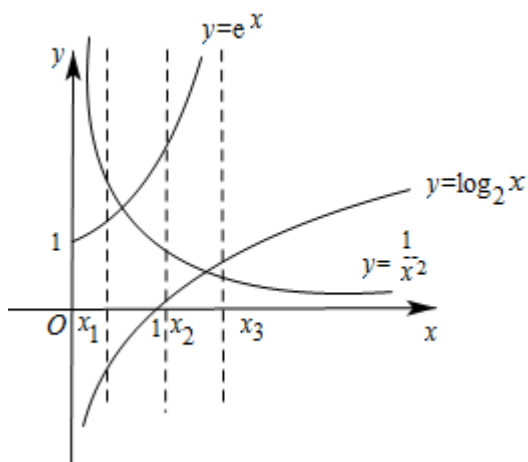
D. $c > b > a$

【答案】D

【解析】设 $\ln a = 2^b = c^{-\frac{1}{2}} = t$ ， $t > 0$ ，

则 $a = e^t$ ， $b = \log_2 t$ ， $c = \frac{1}{t^2}$ ，

在同一坐标系中分别画出函数 $y = e^x$ ， $y = \log_2 x$ ， $y = \frac{1}{x^2}$ 的图象，



当 $t = x_1$ 时, $c > a > b$,

当 $t = x_2$ 时, $a > c > b$,

当 $t = x_3$ 时, $a > b > c$,

由此可以看出, 不可能出现 $c > b > a$ 这种情况,

故选: D.



考点 3 对数函数的性质及应用

[名师点睛]

1. 比较对数值的大小与解形如 $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ 的不等式, 主要是应用函数的单调性求解, 如果 a 的取值不确定, 需要分 $a > 1$ 与 $0 < a < 1$ 两种情况讨论.

2. 与对数函数有关的复合函数的单调性问题, 必须弄清三方面的问题: 一是定义域, 所有问题都必须在定义域内讨论; 二是底数与 1 的大小关系; 三是复合函数的构成, 即它是由哪些基本初等函数复合而成的.

[典例]

1. (2022·浙江金华·三模) 若函数 $f(x) = x(2^x - 2^{-x})$, 设 $a = \frac{1}{2}$, $b = \log_4 \frac{1}{3}$, $c = \log_5 \frac{1}{4}$, 则下列选项正确的是 ()

A. $f(a) < f(b) < f(c)$

B. $f(a) < f(c) < f(b)$

C. $f(b) < f(a) < f(c)$

D. $f(c) < f(a) < f(b)$

【答案】A

【解析】由题可知 $f(x) = x(2^x - 2^{-x})$ ($x \in R$)，故 $f(-x) = -x(2^{-x} - 2^x) = f(x)$ ，

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 为偶函数；

易知，当 $x > 0$ 时， $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 为单调递增函数；

$$\text{又 } b = \log_4 \frac{1}{3} = -\log_4 3, \therefore f(b) = f(-\log_4 3) = f(\log_4 3),$$

同理， $f(c) = f(\log_5 4)$ ；

$$\text{又 } \frac{1}{2} = \log_4 2 < \log_4 3,$$

$$\frac{\log_5 4}{\log_4 3} = \frac{\frac{\lg 4}{\lg 5}}{\frac{\lg 3}{\lg 4}} = \frac{\lg 4 \cdot \lg 4}{\lg 5 \cdot \lg 3} \geq \frac{(\lg 4)^2}{\left(\frac{\lg 5 + \lg 3}{2}\right)^2} = \frac{(\lg 4)^2}{(\lg \sqrt{15})^2} = \left(\frac{\lg 4}{\lg \sqrt{15}}\right)^2 > 1,$$

故 $\frac{1}{2} < \log_4 3 < \log_5 4$ ，故 $f(a) < f(b) < f(c)$ 。

故选：A。

2. (2022·福建莆田·三模) 已知 $a = 2^{0.1}$, $b = \log_4 3$, $c = \log_5 2$ ，则 ()

A. $a > c > b$

B. $b > c > a$

C. $a > b > c$

D. $b > a > c$

【答案】C

【解析】 $a = 2^{0.1} > 2^0 = 1$

$$\text{Q } 4 > 3 > 2 = 4^{\frac{1}{2}}, \therefore 1 > b = \log_4 3 > \log_4 4^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2},$$

$$\text{Q } 2 < 5^{\frac{1}{2}} \therefore c = \log_5 2 < \log_5 5^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore a > b > c$$

故选：C。

3. (2022·湖北·二模) 已知函数 $f(x) = \lg(|x| - 1) + 2^x + 2^{-x}$ ，则使不等式 $f(x+1) < f(2x)$ 成立的 x 的取值范围是 ()

A. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

B. $(-2, -1)$

C. $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup (1, +\infty)$

D. $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$

【答案】D

【解析】由 $|x| - 1 > 0$ 得 $f(x)$ 定义域为 $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ ，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/388106024105007044>