

高考数学复习专题-基本不等式

高考数学复习专题 基本不等式

基本不等式: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} (a \geq 0, b \geq 0)$

- (1) 了解基本不等式的证明过程.
- (2) 会用基本不等式解决简单的最大(小)值问题.

一、基本不等式

1. 基本不等式: $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$

- (1) 基本不等式成立的条件: $a > 0, b > 0$.
- (2) 等号成立的条件, 当且仅当 $a = b$ 时取等号.

2. 算术平均数与几何平均数

设 $a > 0, b > 0$, 则 a, b 的算术平均数为 $\frac{a+b}{2}$, 几何平均数为 $\sqrt{ab}$, 基本不等式可叙述为: 两个正数的算术平均数不小于它们的几何平均数.

3. 利用基本不等式求最值问题

- (1) 如果积 xy 是定值 P , 那么当且仅当 $x = y$ 时, $x+y$ 有最小值是 $2\sqrt{P}$. (简记: 积定和最小)
- (2) 如果和 $x+y$ 是定值 P , 那么当且仅当 $x = y$ 时, xy 有最大值是 $\frac{P^2}{4}$. (简记: 和定积最大)

4. 常用结论

- (1) $a^2 + b^2 \geq 2ab (a, b \in \mathbf{R})$
- (2) $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2 (a, b \text{ 同号})$
- (3) $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 (a, b \in \mathbf{R})$
- (4) $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2 + b^2}{2} (a, b \in \mathbf{R})$
- (5) $2(a^2 + b^2) \geq (a+b)^2 (a, b \in \mathbf{R})$

高考数学复习专题-基本不等式

$$(6) \frac{a^2+b^2}{2} \geq \frac{(a+b)^2}{4} \geq ab (a, b \in \mathbf{R})$$

$$(7) \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} (a > 0, b > 0) \square$$

二、基本不等式在实际中的应用

1. 问题的背景是人们关心的社会热点问题，如物价、销售、税收等。

题目往往较长，解题时需认真阅读，从中提炼出有用信息，建立数学模型，转化为数学问题求解；

2. 经常建立的函数模型有正(反)比例函数、一次函数、二次函数、分段函数以及 $y = ax + \frac{b}{x} (a > 0, b > 0)$ 等。学%科网

解答函数应用题中的最值问题时一般利用二次函数的性质，基本不等式，函数的单调性或导数求解。

考点突破一 利用基本不等式求最值

利用基本不等式求最值的常用技巧：

(1) 若直接满足基本不等式条件，则直接应用基本不等式。

(2) 若不直接满足基本不等式条件，则需要创造条件对式子进行恒等变形，如构造“1”的代换等。常见的变形手段有拆、并、配。

①拆——裂项拆项

对分子的次数不低于分母次数的分式进行整式分离——分离成整式与“真分式”的和，再根据分式中分母的情况对整式进行拆项，为应用基本不等式凑定积创造条件。

②并——分组并项

目的是分组后各组可以单独应用基本不等式，或分组后先由一组应用基本不等式，再组与组之间应用基本不等式得出最值。

③配——配式配系数

有时为了挖掘出“积”或“和”为定值，常常需要根据题设条件采取合理配式、配系数的方法，使配式与待求式相乘后可以应用基本不等式得出定值，或配以恰当的系数后，使积式中的各项之和为定值。

(3) 若一次应用基本不等式不能达到要求，需多次应用基本不等式，但要注意等号成立的条件必须要一致。

注：若可用基本不等式，但等号不成立，则一般是利用函数单调性求解。

高考数学复习专题-基本不等式

典例 1 若正数 a, b 满足 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$, 则 $\frac{1}{a-1} + \frac{9}{b-1}$ 的最小值为

- A. 1
B. 6
C. 9
D. 16

【答案】B

【解析】解法一：因为 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ ，所以 $a + b = ab \Rightarrow (a-1) \cdot (b-1) = 1$ ，

所以 $\frac{1}{a-1} + \frac{9}{b-1} \geq 2\sqrt{\frac{1}{a-1} \cdot \frac{9}{b-1}} = 2 \times 3 = 6$ (当且仅当 $a = \frac{4}{3}$, $b = 4$ 时取“=”).

故 $\frac{1}{a-1} + \frac{9}{b-1}$ 的最小值为 6.

解法二：因为 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ ，所以 $a + b = ab$ ，

所以 $\frac{1}{a-1} + \frac{9}{b-1} = \frac{b-1+9a-9}{ab-a-b+1} = b+9a-10 = (b+9a) \cdot (\frac{1}{a} + \frac{1}{b}) - 10 = \frac{b}{a} + \frac{9a}{b} + 1 + 9 - 10 \geq$

$$2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{9a}{b}} = 6 \text{ (当且仅当 } a = \frac{4}{3}, b = 4 \text{ 时取“=”)}.$$

故 $\frac{1}{a-1} + \frac{9}{b-1}$ 的最小值为 6.

解法三：因为 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ ，所以 $b - 1 = \frac{1}{a - 1}$ ，

所以 $\frac{1}{a-1} + \frac{9}{b-1} = (b-1) + \frac{9}{b-1} \geq 2\sqrt{9} = 6$ (当且仅当 $b=4$ 时取“=”).

故 $\frac{1}{a-1} + \frac{9}{b-1}$ 的最小值为 6.

【名师点睛】在应用基本不等式求最值时，要把握不等式成立的三个条件，就是“一正——各项均为正；二定——积或和为定值；三相等——等号能否取得”，若忽略了某个条件，就会出现错误.

1. (1) 已知 $x < \frac{5}{4}$, 求函数 $y = 4x - 1 + \frac{1}{4x - 5}$ 的最大值;

(2) 已知 $x, y \in \mathbf{R}^*$ (正实数集), 且 $\frac{1}{x} + \frac{9}{y} = 1$, 求 $x + y$ 的最小值.

考点突破二 基本不等式的实际应用

有关函数最值的实际问题的解题技巧:

高考数学复习专题-基本不等式

- (1) 根据实际问题抽象出函数的解析式, 再利用基本不等式求得函数的最值.
- (2) 设变量时一般要把求最大值或最小值的变量定义为函数.
- (3) 解应用题时, 一定要注意变量的实际意义及其取值范围.
- (4) 在应用基本不等式求函数最值时, 若等号取不到, 可利用函数的单调性求解.

典例 2 优质试题年, 在国家创新驱动战略下, 北斗系统作为一项国家高科技工程, 一个开放型的创新平台, 1400 多个北斗基站遍布全国, 上万台设备组成星地“一张网”, 国内定位精度全部达到亚米级, 部分地区达到分米级, 最高精度甚至可以达到厘米或毫米级. 最近北斗三号工程耗资 a 元建成一大型设备, 已知这台设备维修和消耗费用第一年为 b 元, 以后每年增加 b 元 (a, b 是常数), 用 t 表示设备使用的年数, 记设备年平均维修和消耗费用为 y , 即 $y = (\text{设备单价} + \text{设备维修和消耗费用}) \div \text{设备使用的年数}$.

- (1) 求 y 关于 t 的函数关系式;
- (2) 当 $a = 112500$, $b = 1000$ 时, 求这种设备的最佳更新年限.

【解析】(1) 由题意, 设备维修和消耗费用构成以 b 为首项, b 为公差的等差数列,

因此年平均维修和消耗费用为 $\frac{b + 2b + 3b + \cdots + tb}{t} = \frac{b}{2}(t+1)$ (元).

于是有 $y = \frac{b}{2}(t+1) + \frac{a}{t} = \frac{b}{2} + \frac{bt}{2} + \frac{a}{t}, t > 0$.

- (2) 由 (1) 可知, 当 $a = 112500$, $b = 1000$ 时,

$$y = 500 + 500t + \frac{112500}{t} = 500 + 500 \left(t + \frac{225}{t} \right) \geq 500 + 500 \times 2 \times 15 = 15500,$$

当且仅当 $t = \frac{225}{t}$, 即 $t = 15$ 时, 等号成立.

答: 这种设备的最佳更新年限为 15 年.

【名师点睛】 利用基本不等式解决应用问题的关键是构建模型, 一般来说, 都是从具体的问题背景, 通过相关的关系建立关系式. 在解题过程中尽量向模型 $ax + \frac{b}{x} \geq 2\sqrt{ab} (a > 0, b > 0, x > 0)$ 上靠拢.

2. 要制作一个体积为 9m^3 , 高为 1m 的有盖长方体容器, 已知该容器的底面造价是每平方米 10 元, 侧面造价是每平方米 5 元, 盖的总造价为 100 元, 求该容器长为多少时, 容器的总造价最低为多少元?

考点突破三 基本不等式的综合应用

高考数学复习专题-基本不等式

基本不等式是高考考查的热点，常以选择题、填空题的形式出现。通常以不等式为载体综合考查函数、方程、三角函数、立体几何、解析几何等问题。主要有以下几种命题方式：

- (1) 应用基本不等式判断不等式是否成立或比较大小。解决此类问题通常将所给不等式(或式子)变形，然后利用基本不等式求解。
- (2) 条件不等式问题。通过条件转化成能利用基本不等式的形式求解。
- (3) 求参数的值或范围。观察题目特点，利用基本不等式确定相关成立条件，从而得到参数的值或范围。

典例 3 下列不等式一定成立的是

A. $\lg(x^2 + \frac{1}{4}) > \lg x (x > 0)$

B. $\sin x + \frac{1}{\sin x} \geq 2 (x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z})$

C. $x^2 + 1 \geq 2|x| (x \in \mathbf{R})$

D. $\frac{1}{x^2 + 1} > 1 (x \in \mathbf{R})$

【答案】 C

【解析】 对于 A: $x^2 + \frac{1}{4} \geq x$ (当 $x = \frac{1}{2}$ 时, $x^2 + \frac{1}{4} = x$), A 不正确;

对于 B: $\sin x + \frac{1}{\sin x} \geq 2 (\sin x \in (0, 1])$, $\sin x + \frac{1}{\sin x} \leq -2 (\sin x \in [-1, 0))$, B 不正确;

对于 C: $x^2 - 2|x| + 1 = (|x| - 1)^2 \geq 0 (x \in \mathbf{R})$, C 正确;

对于 D: $\frac{1}{x^2 + 1} \in (0, 1] (x \in \mathbf{R})$, D 不正确.

故选 C.

【思路点拨】 利用基本不等式判断不等关系及比较大小的思路：基本不等式常用于有条件的不等关系的判断、比较代数式的大小等。一般地，结合所给代数式的特征，将所给条件进行转换(利用基本不等式可将整式和根式相互转化)，使其中的不等关系明晰即可解决问题。

3. 设正实数 x, y 满足 $x > \frac{1}{2}, y > 1$, 不等式 $\frac{4x^2}{y-1} + \frac{y^2}{2x-1} \geq m$ 恒成立, 则 m 的最大值为

A. $2\sqrt{2}$

B. $4\sqrt{2}$

C. 8

D. 16

高考数学复习专题-基本不等式

典例 4 设正项等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，若 $S_{2017} = 6051$ ，则 $\frac{1}{a_4} + \frac{4}{a_{2014}}$ 的最小值为_____.

高考数学复习专题-基本不等式

【答案】 $\frac{3}{2}$

【解析】因为 $S_{2017} = 6051$ ，所以 $\frac{2017}{2}(a_1 + a_{2017}) = 6051$ ，

则 $a_1 + a_{2017} = 6$ ，即 $a_4 + a_{2014} = 6$ 。

所以 $\frac{1}{a_4} + \frac{4}{a_{2014}} = \frac{1}{6}(a_4 + a_{2014})\left(\frac{1}{a_4} + \frac{4}{a_{2014}}\right) = \frac{1}{6}\left(5 + \frac{4a_4}{a_{2014}} + \frac{a_{2014}}{a_4}\right) \geq \frac{1}{6} \times (5+4) = \frac{3}{2}$ 。

当且仅当 $a_4 = 2, a_{2014} = 4$ 时取等号。

故答案为： $\frac{3}{2}$ 。

【名师点睛】条件最值的求解通常有两种方法：一是消元法，即根据条件建立两个量之间的函数关系，然后代入代数式转化为函数的最值求解；二是将条件灵活变形，利用常数代换的方法构造和或积为常数的式子，然后利用基本不等式求解最值。

4. 已知函数 $y = \log_a(x - m - 2n) + 2$ 恒过定点 $(3, 2)$ ，其中 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ ， m, n 均为正数，则 $\frac{1}{m+1} + \frac{1}{2n}$ 的最小值是_____。

1. 函数 $y = x + \frac{1}{4x} (x > 0)$ 取得最小值时， x 的值为

A. $-\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{2}$

C. 1

D. 2

2. 已知 $a, b \in \mathbf{R}$ ，且 $ab \neq 0$ ，则下列结论恒成立的是

A. $a+b \geq 2\sqrt{ab}$

B. $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$

C. $|\frac{a}{b} + \frac{b}{a}| \geq 2$

D. $a^2 + b^2 > 2ab$

3. $\sqrt{(3-a)(a+6)}$ ($-6 \leq a \leq 3$) 的最大值为

A. 9

B. $\frac{9}{2}$

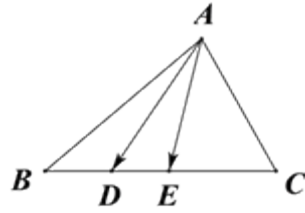
C. 3

D. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

高考数学复习专题-基本不等式

4. 已知 x, y, z 为正实数, 则 $\frac{xy + yz}{x^2 + y^2 + z^2}$ 的最大值为
- A. $\frac{2\sqrt{3}}{5}$ B. $\frac{4}{5}$
C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{2}{3}$
5. 若正实数 a, b 满足 $a + b = 1$, 则
- A. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 有最大值 4 B. $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ 有最大值 $\sqrt{2}$
C. ab 有最小值 $\frac{1}{4}$ D. $a^2 + b^2$ 有最小值 $\frac{\sqrt{2}}{2}$
6. 高三学生新的学期里, 刚刚搬入新教室, 随着楼层的升高, 上下楼耗费的精力增多, 因此不满意度升高, 当教室在第 n 层楼时, 上下楼造成的不满意度为 n , 但高处空气清新, 嘈杂音较小, 环境较为安静, 因此随教室所在楼层升高, 环境不满意度降低, 设教室在第 n 层楼时, 环境不满意度为 $\frac{8}{n}$, 则同学们认为最适宜的教室应在楼层
- A. 2 B. 3
C. 4 D. 8
7. 若关于 x 的方程 $9^x + (4+a) \cdot 3^x + 4 = 0$ 有解, 则实数 a 的取值范围是
- A. $(-\infty, -8] \cup [0, +\infty)$ B. $(-\infty, -4)$
C. $[-8, 4)$ D. $(-\infty, -8]$
8. 若对任意正数 x , 不等式 $\frac{1}{x^2 + 1} \leq \frac{a}{x}$ 恒成立, 则实数 a 的最小值为
- A. 1 B. $\sqrt{2}$
C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{1}{2}$
9. 已知 $x > 1$, $y > 1$, 且 $\log_2 x, \frac{1}{4}, \log_2 y$ 成等比数列, 则 xy 有
- A. 最小值 $\sqrt{2}$ B. 最小值 2
C. 最大值 $\sqrt{2}$ D. 最大值 2
10. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D, E 是线段 BC 上两个动点, 且 $\vec{AD} + \vec{AE} = x\vec{AB} + y\vec{AC}$, 则 $\frac{1}{x} + \frac{4}{y}$ 的最小值为

高考数学复习专题-基本不等式



A. $\frac{3}{2}$
C. $\frac{5}{2}$

B. 2
D. $\frac{9}{2}$

11. 已知正实数 a, b, c 满足 $a^2 - ab + 4b^2 - c = 0$, 当 $\frac{c}{ab}$ 取最小值时, $a + b - c$ 的最大值为

A. 2
C. $\frac{3}{8}$

B. $\frac{3}{4}$
D. $\frac{1}{4}$

12. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 为角 A, B, C 所对的边, 且 $(a - b)(\sin A + \sin B) = (c - b)\sin C$, 若 $a = \sqrt{3}$, 则 $b^2 + c^2$ 的最小值为

A. 4
C. 6

B. 5
D. 7

13. 函数 $y = a^{x-1} + 2$ ($a > 0, a \neq 1$) 的图象恒过定点 A , 若定点 A 在直线 $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$ ($m > 0, n > 0$) 上, 则 $3m + n$ 的最小值为

A. 13
C. 16

B. 14
D. 12

14. 已知 x, y 满足 $\begin{cases} x + 2y - 3 \leq 0 \\ x + 3y - 3 \geq 0 \\ y \leq 1 \end{cases}$, $z = 2x + y$ 的最大值为 m , 若正数 a, b 满足 $a + b = m$, 则 $\frac{1}{a} + \frac{4}{b}$ 的最小值为

A. 9
C. $\frac{4}{3}$

B. $\frac{3}{2}$
D. $\frac{5}{2}$

15. 当 $x > 0$ 时, $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ 的最大值为_____.

16. 已知函数 $f(x) = 2x, g(x) = 3x^2 + 2x + 1$, 当 $x > 0$ 时, 函数 $\frac{g(x)}{f(x)}$ 的最小值为_____.

17. 在公比为 q 的正项等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_4 = 4$, 则当 $2a_2 + a_6$ 取得最小值时, $\log_2 q =$ _____.

高考数学复习专题-基本不等式

18. 已知 $a > b > 0, ab = 1$, 则 $\frac{a^2 + b^2}{a - b}$ 的最小值为_____.
19. 某公司购买一批机器投入生产, 据市场分析, 每台机器生产的产品可获得的总利润 y (单位: 万元) 与机器运转时间 x (单位: 年) 的关系为 $y = -x^2 + 18x - 25 (x \in \mathbf{N}^*)$, 则当每台机器运转_____年时, 年平均利润最大, 最大值是_____万元.
20. 某物流公司引进了一套无人智能配货系统, 购买系统的费用为 80 万元, 维持系统正常运行的费用包括保养费和维修费两部分. 每年的保养费用为 1 万元. 该系统的维修费为: 第一年 1.2 万元, 第二年 1.6 万元, 第三年 2 万元, ..., 依等差数列逐年递增.
- (1) 求该系统使用 n 年的总费用 (包括购买设备的费用);
- (2) 求该系统使用多少年报废最合算 (即该系统使用多少年平均费用最少).

21. 已知函数 $y = x + \frac{m}{x-1} (m > 0)$.
- (1) 若 $m = 1$, 求当 $x > 1$ 时函数的最小值;
- (2) 当 $x < 1$ 时, 函数有最大值 -3, 求实数 m 的值.

22. (1) 设 x, y 是正实数, 且 $2x + y = 4$, 求 $\lg x + \lg y$ 的最大值.
- (2) 若实数 a, b 满足 $ab - 4a - b + 1 = 0 (a > 1)$, 求 $(a+1)(b+2)$ 的最小值.

高考数学复习专题-基本不等式

23. 已知在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别为角 A, B, C 所对的边长, 且 $(2c - b)\cos A = a\cos B$.

(1) 求角 A 的值;

(2) 若 $a = \sqrt{3}$, 求 $b + c$ 的取值范围.

1. (优质试题山东文科) 若直线 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 (a > 0, b > 0)$ 过点 $(1, 2)$, 则 $2a + b$ 的最小值为_____.

2. (优质试题天津文科) 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, 且 $a - 3b + 6 = 0$, 则 $2^a + \frac{1}{8^b}$ 的最小值为_____.

3. (2015 重庆文科) 设 $a, b > 0, a + b = 5$, 则 $\sqrt{a+1} + \sqrt{b+3}$ 的最大值为_____.

4. (2015 天津文科) 已知 $a > 0, b > 0, ab = 8$, 则当 a 的值为_____时, $\log_2 a \cdot \log_2 (2b)$ 取得最大值.

5. (优质试题江苏) 某公司一年购买某种货物 600 吨, 每次购买 x 吨, 运费为 6 万元/次, 一年的总存储费用为 $4x$ 万元. 要使一年的总运费与总存储费用之和最小, 则 x 的值是_____.

6. (优质试题江苏) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , $\angle ABC = 120^\circ$, $\angle ABC$ 的平分线交 AC 于点 D , 且 $BD = 1$, 则 $4a + c$ 的最小值为_____.