

江苏省盱眙中学 2023-2024 学年高考全国统考预测密卷数学试卷

注意事项

1. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。
2. 答题前，请务必将自己的姓名、准考证号用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔填写在试卷及答题卡的规定位置。
3. 请认真核对监考员在答题卡上所粘贴的条形码上的姓名、准考证号与本人是否相符。
4. 作答选择题，必须用 2B 铅笔将答题卡上对应选项的方框涂满、涂黑；如需改动，请用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。作答非选择题，必须用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔在答题卡上的指定位置作答，在其他位置作答一律无效。
5. 如需作图，须用 2B 铅笔绘、写清楚，线条、符号等须加黑、加粗。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 我国古代典籍《周易》用“卦”描述万物的变化。每一“重卦”由从下到上排列的 6 个爻组成，爻分为阳爻“——”和阴爻“— —”。如图就是一重卦。在所有重卦中随机取一重卦，则该重卦至少有 2 个阳爻的概率是（ ）



- A. $\frac{7}{64}$ B. $\frac{11}{32}$ C. $\frac{57}{64}$ D. $\frac{11}{16}$

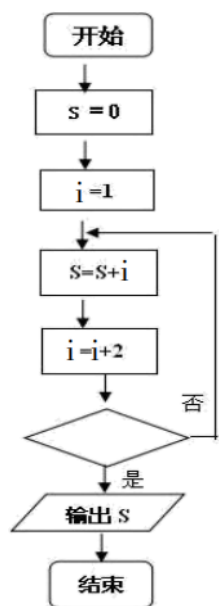
2. 已知集合 $A = \{x | 1 < x \leq 24\}$ ， $B = \left\{x \mid y = \frac{1}{\sqrt{-x^2 + 6x - 5}}\right\}$ ，则 $\partial_A B =$ （ ）

- A. $\{x | x \geq 5\}$ B. $\{x | 5 < x \leq 24\}$
C. $\{x | x \leq 1 \text{ 或 } x \geq 5\}$ D. $\{x | 5 \leq x \leq 24\}$

3. 已知 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = 2\sqrt{3}$ ， $|\vec{b}| = 3$ ， $\vec{a} \cdot \vec{b} = -6$ ，则 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的投影为（ ）

- A. -2 B. -1 C. -3 D. 2

4. 阅读如图的程序框图，若输出的值为 25，那么在程序框图中的判断框内可填写的条件是（ ）



- A. $i > 5$ B. $i > 8$ C. $i > 10$ D. $i > 12$

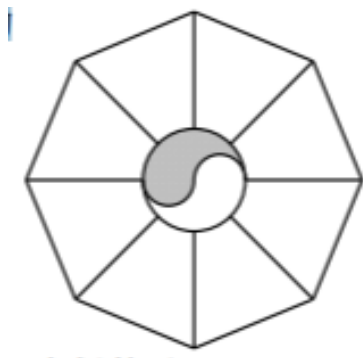
5. 已知向量 $\vec{a} = (m, 1)$, $\vec{b} = (3, m-2)$, 则 $m=3$ 是 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ 的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 既不充分也不必要条件 D. 充要条件

6. 集合 $\{2, 0, 1, 9\}$ 的真子集的个数是 ()

- A. 13 B. 14 C. 15 D. 16

7. 《易经》包含着很多哲理，在信息学、天文学中都有广泛的应用，《易经》的博大精深，对今天的几何学和其它学科仍有深刻的影响。下图就是易经中记载的几何图形——八卦田，图中正八边形代表八卦，中间的圆代表阴阳太极图，八块面积相等的曲边梯形代表八卦田。已知正八边形的边长为 $10m$ ，阴阳太极图的半径为 $4m$ ，则每块八卦田的面积约为 ()



- A. $47.79m^2$ B. $54.07m^2$
C. $57.21m^2$ D. $114.43m^2$

8. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x-y+4 \geq 0, \\ x-2 \leq 0, \\ x+y-2 \geq 0, \end{cases}$ 且 $z = ax + y$ 的最大值为 $2a + 6$, 则 a 的取值范围是 ()

- A. $[-1, +\infty)$ B. $(-\infty, -1]$ C. $(-1, +\infty)$ D. $(-\infty, -1)$

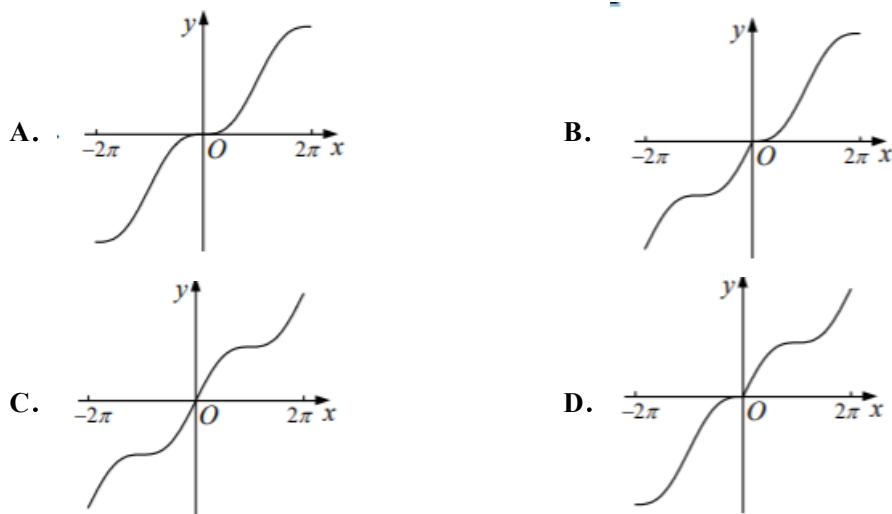
9. 已知函数 $f(x) = x + \frac{4}{x}$, $g(x) = 2^x + a$, 若 $\forall x_1 \in [\frac{1}{2}, 3], \exists x_2 \in [2, 3]$, 使得 $f(x_1) \geq g(x_2)$, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $a \leq 1$ B. $a \geq 1$
C. $a \leq 0$ D. $a \geq 0$

10. 造纸术、印刷术、指南针、火药被称为中国古代四大发明, 此说法最早由英国汉学家艾约瑟提出并为后来许多中国的历史学家所继承, 普遍认为这四种发明对中国古代的政治, 经济, 文化的发展产生了巨大的推动作用. 某小学三年级共有学生 500 名, 随机抽查 100 名学生并提问中国古代四大发明, 能说出两种发明的有 45 人, 能说出 3 种及其以上发明的有 32 人, 据此估计该校三级的 500 名学生中, 对四大发明只能说出一种或一种也说不出的人有 ()

- A. 69 人 B. 84 人 C. 108 人 D. 115 人

11. 函数 $y = \sin|x| + x$ 在 $x \in [-2\pi, 2\pi]$ 上的大致图象是 ()



12. 将函数 $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ 图象上每一点的横坐标变为原来的 2 倍, 再将图像向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 得到函数

$y = g(x)$ 的图象, 则函数 $y = g(x)$ 图象的一个对称中心为 ()

- A. $\left(\frac{\pi}{12}, 0\right)$ B. $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$ C. $(\pi, 0)$ D. $\left(\frac{4\pi}{3}, 0\right)$

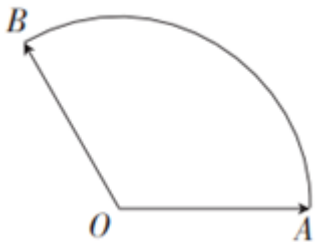
二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 如图所示梯子结构的点数依次构成数列 $\{a_n\}$, 则 $a_{100} =$ _____.



14. 已知 $\tan \alpha = 3$ ，则 $\cos 2\alpha =$ _____.

15. 如图，已知扇形 AOB 的半径为 1，面积为 $\frac{\pi}{3}$ ，则 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB} =$ _____.



16. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A 、 B 、 C 所对的边分别为 a 、 b 、 c ，若 $c=1$ ， $C=60^\circ$ ，则 b 的取值范围是_____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 设 $k \in \mathbf{R}$ ，函数 $g(x) = k(x - e)$ ，其中 e 为自然对数的底数.

(1) 设函数 $f(x) = \frac{x}{1 - \ln x}$.

①若 $k = -1$ ，试判断函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图像在区间 $(1, \sqrt{e})$ 上是否有交点；

②求证：对任意的 $k \in \mathbf{R}$ ，直线 $y = g(x)$ 都不是 $y = f(x)$ 的切线；

(2) 设函数 $h(x) = 2x - x \ln x + xg(x) - ekx$ ，试判断函数 $h(x)$ 是否存在极小值，若存在，求出 k 的取值范围；若不存在，请说明理由.

18. (12 分) 已知各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $a_1 = 1$ ， $a_n = \sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}}$ ($n \in \mathbf{N}^*$ ，且 $n \geq 2$)

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 证明：当 $n \geq 2$ 时， $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{2a_2} + \frac{1}{3a_3} + \dots + \frac{1}{na_n} < \frac{3}{2}$

19. (12 分) 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $S_n = 2a_n - 2$. 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \log_2 a_n$ ，其前 n 项和为 T_n .

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的通项公式；

(2) 设 $c_n = a_n + \frac{1}{T_n}$ ，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 C_n .

20. (12 分)

在平面直角坐标系中，以原点 O 为极点， x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，两种坐标系中取相同的长度单位.已知直

线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = \sqrt{3} - t \\ y = 1 + \sqrt{3}t \end{cases}$ (t 为参数)，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = 4\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$.

- (1) 求直线 l 的普通方程与曲线 C 的直角坐标方程；
- (2) 若直线 l 与曲线 C 交于 M, N 两点，求 $\triangle MON$ 的面积.

21. (12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足: $a_1 = 2, b_1 = -1, a_n = 2a_{n-1} - b_{n-1}, b_n = 2b_{n-1} - a_{n-1}, n \in N^*, n \geq 2$.

- (1) 求证:数列 $\{a_n - b_n\}$ 为等比数列;
- (2) 求数列 $\left\{\frac{3^n}{a_n a_{n+1}}\right\}$ 的前 n 项和 S_n .

22. (10 分) 古人云:“腹有诗书气自华.”为响应全民阅读,建设书香中国,校园读书活动的热潮正在兴起.某校为统计学生一周课外读书的时间,从全校学生中随机抽取 n 名学生进行问卷调查,统计了他们一周课外读书时间(单位: h)的数据如下:

一周课外 读书时间/ h	(0,2]	(2,4]	(4,6]	(6,8]	(8,10]	(10,12]	(12,14]	(14,16]	(16,18]	合 计
频数	4	6	10	12	14	24	a	46	34	n
频率	0.02	0.03	0.05	0.06	0.07	0.12	0.25	p	0.17	1

- (1) 根据表格中提供的数据,求 a, p, n 的值并估算一周课外读书时间的中位数.
- (2) 如果读书时间按 $(0,6], (6,12], (12,18]$ 分组,用分层抽样的方法从 n 名学生中抽取 20 人.
 - ①求每层应抽取的人数;
 - ②若从 $(0,6], (6,12]$ 中抽出的学生中再随机选取 2 人,求这 2 人不在同一层的概率.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。
1、 C

【解析】

利用组合的方法求所求的事件的对立事件,即该重卦没有阳爻或只有 1 个阳爻的概率,再根据两对立事件的概率和为 1 求解即可.

【详解】

设“该重卦至少有 2 个阳爻”为事件 A .所有“重卦”共有 2^6 种;“该重卦至少有 2 个阳爻”的对立事件 $\bar{A}$ 是“该重卦没有阳爻或只有 1 个阳爻”,其中,没有阳爻(即 6 个全部是阴爻)的情况有 1 种,只有 1 个阳爻的情况有 $C_6^1 = 6$ 种,故

$$P(\bar{A}) = \frac{1+6}{2^6} = \frac{7}{64}, \text{ 所以该重卦至少有 2 个阳爻的概率是 } P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{7}{64} = \frac{57}{64}.$$

故选: C

【点睛】

本题主要考查了对立事件概率和为 1 的方法求解事件概率的方法.属于基础题.

2、 D

【解析】

首先求出集合 B , 再根据补集的定义计算可得;

【详解】

解: $\because -x^2 + 6x - 5 > 0$, 解得 $1 < x < 5$

$$\therefore B = \{x | 1 < x < 5\}, \therefore \complement_A B = \{x | 5 \leq x \leq 24\}.$$

故选: D

【点睛】

本题考查补集的概念及运算, 一元二次不等式的解法, 属于基础题.

3、 A

【解析】

根据向量投影的定义, 即可求解.

【详解】

$$\vec{a} \text{ 在 } \vec{b} \text{ 上的投影为 } |\vec{a}| \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{-6}{3} = -2.$$

故选:A

【点睛】

本题考查向量的投影, 属于基础题.

4、 C

【解析】

根据循环结构的程序框图，带入依次计算可得输出为 25 时 i 的值，进而得判断框内容.

【详解】

根据循环程序框图可知， $S = 0, i = 1$

则 $S = 1, i = 3$,

$S = 4, i = 5$,

$S = 9, i = 7$,

$S = 16, i = 9$,

$S = 25, i = 11$,

此时输出 S ，因而 $i = 9$ 不符合条件框的内容，但 $i = 11$ 符合条件框内容，结合选项可知 C 为正确选项，

故选：C.

【点睛】

本题考查了循环结构程序框图的简单应用，完善程序框图，属于基础题.

5、A

【解析】

向量 $\vec{a} = (m, 1)$ ， $\vec{b} = (3, m - 2)$ ， $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ，则 $3 = m(m - 2)$ ，即 $m^2 - 2m - 3 = 0$ ， $m = 3$ 或者 -1 ，判断出即可.

【详解】

解：向量 $\vec{a} = (m, 1)$ ， $\vec{b} = (3, m - 2)$ ，

$\vec{a} \parallel \vec{b}$ ，则 $3 = m(m - 2)$ ，即 $m^2 - 2m - 3 = 0$ ，

$m = 3$ 或者 -1 ，

所以 $m = 3$ 是 $m = 3$ 或者 $m = -1$ 的充分不必要条件，

故选：A.

【点睛】

本小题主要考查充分、必要条件的判断，考查向量平行的坐标表示，属于基础题.

6、C

【解析】

根据含有 n 个元素的集合，有 2^n 个子集，有 $2^n - 1$ 个真子集，计算可得；

【详解】

解：集合 $\{2, 0, 1, 9\}$ 含有 4 个元素，则集合 $\{2, 0, 1, 9\}$ 的真子集有 $2^4 - 1 = 15$ （个），

故选：C

【点睛】

考查列举法的定义，集合元素的概念，以及真子集的概念，对于含有 n 个元素的集合，有 2^n 个子集，有 $2^n - 1$ 个真子集，属于基础题.

7、B

【解析】

由图利用三角形的面积公式可得正八边形中每个三角形的面积，再计算出圆面积的 $\frac{1}{8}$ ，两面积作差即可求解.

【详解】

由图，正八边形分割成 8 个等腰三角形，顶角为 $\frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$ ，

设三角形的腰为 a ，

由正弦定理可得 $\frac{a}{\sin \frac{135^\circ}{2}} = \frac{10}{\sin 45^\circ}$ ，解得 $a = 10\sqrt{2} \sin \frac{135^\circ}{2}$ ，

所以三角形的面积为：

$$S = \frac{1}{2} \times \left(10\sqrt{2} \sin \frac{135^\circ}{2} \right)^2 \sin 45^\circ = 50\sqrt{2} \cdot \frac{1 - \cos 135^\circ}{2} = 25(\sqrt{2} + 1),$$

所以每块八卦田的面积约为： $25(\sqrt{2} + 1) - \frac{1}{8} \times \pi \times 4^2 \approx 54.07$.

故选：B

【点睛】

本题考查了正弦定理解三角形、三角形的面积公式，需熟记定理与面积公式，属于基础题.

8、A

【解析】

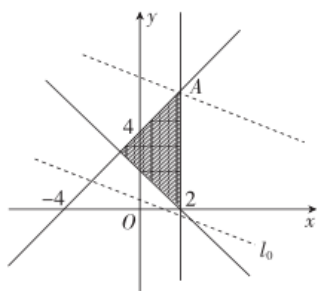
画出约束条件的可行域，利用目标函数的最值，判断 a 的范围即可.

【详解】

作出约束条件表示的可行域，如图所示. 因为 $z = ax + y$ 的最大值为 $2a + 6$ ，所以 $z = ax + y$ 在点 $A(2, 6)$ 处取得最大值，

则 $-a \leq 1$ ，即 $a \geq -1$.

故选：A



【点睛】

本题主要考查线性规划的应用，利用 z 的几何意义，通过数形结合是解决本题的关键。

9、C

【解析】

试题分析：由题意知，当 $x_1 \in \left[\frac{1}{2}, 3\right]$ 时，由 $f(x) = x + \frac{4}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{4}{x}} = 4$ ，当且仅当 $x = \frac{4}{x}$ 时，即 $x = 2$ 等号是成立，

所以函数 $f(x)$ 的最小值为 4，当 $x_2 \in [2, 3]$ 时， $g(x) = 2^x + a$ 为单调递增函数，所以 $g(x)_{\min} = g(2) = a + 4$ ，又因

为 $\forall x_1 \in \left[\frac{1}{2}, 3\right], \exists x_2 \in [2, 3]$ ，使得 $f(x_1) \geq g(x_2)$ ，即 $f(x)$ 在 $x \in \left[\frac{1}{2}, 3\right]$ 的最小值不小于 $g(x)$ 在 $x \in [2, 3]$ 上的最小

值，即 $a + 4 \leq 4$ ，解得 $a \leq 0$ ，故选 C。

考点：函数的综合问题。

【方法点睛】 本题主要考查了函数的综合问题，其中解答中涉及到基本不等式求最值、函数的单调性及其应用、全称命题与存在命题的应用等知识点的综合考查，试题思维量大，属于中档试题，着重考查了学生分析问题和解决问题的能力，以及转化与化归思想的应用，其中解答中转化为 $f(x)$ 在 $x \in \left[\frac{1}{2}, 3\right]$ 的最小值不小于 $g(x)$ 在 $x \in [2, 3]$ 上的最小值是解答的关键。

10、D

【解析】

先求得 100 名学生中，只能说一种或一种也说不出的人数，由此利用比例，求得 500 名学生中对四大发明只能说一种或一种也说不出的人数。

【详解】

在这 100 名学生中，只能说一种或一种也说不出的有 $100 - 45 - 32 = 23$ 人，设对四大发明只能说一种或一种也说不出的有 x 人，则 $\frac{100}{23} = \frac{500}{x}$ ，解得 $x = 115$ 人。

故选：D

【点睛】

本小题主要考查利用样本估计总体，属于基础题。

11、D

【解析】

讨论 x 的取值范围，然后对函数进行求导，利用导数的几何意义即可判断.

【详解】

当 $x \geq 0$ 时， $y = \sin x + x$ ，则 $y' = \cos x + 1 \geq 0$ ，

所以函数在 $[0, 2\pi]$ 上单调递增，

令 $g(x) = \cos x + 1$ ，则 $g'(x) = -\sin x$ ，

根据三角函数的性质，

当 $x \in [0, \pi]$ 时， $g'(x) = -\sin x < 0$ ，故切线的斜率变小，

当 $x \in [\pi, 2\pi]$ 时， $g'(x) = -\sin x > 0$ ，故切线的斜率变大，可排除 A、B；

当 $x < 0$ 时， $y = -\sin x + x$ ，则 $y' = -\cos x + 1 \geq 0$ ，

所以函数在 $[-2\pi, 0]$ 上单调递增，

令 $h(x) = -\cos x + 1$ ， $h'(x) = \sin x$ ，

当 $x \in [-2\pi, -\pi]$ 时， $h'(x) = \sin x > 0$ ，故切线的斜率变大，

当 $x \in [-\pi, 0]$ 时， $h'(x) = \sin x < 0$ ，故切线的斜率变小，可排除 C，

故选：D

【点睛】

本题考查了识别函数的图像，考查了导数与函数单调性的关系以及导数的几何意义，属于中档题.

12、D

【解析】

根据函数图象的变换规律可得到 $y = g(x)$ 解析式，然后将四个选项代入逐一判断即可.

【详解】

解： $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ 图象上每一点的横坐标变为原来的 2 倍，得到 $\sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6}\right)$

再将图像向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度，得到函数 $g(x) = \sin\left[\frac{1}{2}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{6}\right]$ 的图象

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/388133025006006063>