第四章　差分方程建模

4.1 用差分方程对变化进行建模

定义:数列$A=\{a_1, a_2, a_3\cdots\}$的一阶差分是

$\triangle a_0 = a_1 - a_0$

$\triangle a_1 = a_2 - a_1$

$\triangle a_2 = a_3 - a_2$

$\triangle a_3 = a_4 - a_3$

对每个整数n有 $\triangle a_n = a_{n+1} - a_n$

例4.1 储蓄存单

考虑一开始有1000美圆的储蓄存单, 在月利率为1%的条件下的积累价值是一种数列

$A=\{1000, 1010, 1020.10, 1030.30, 1040.60\cdots\}$

其一阶差分为

$\triangle a_0=a_1-a_0=1010-1000 \quad =10$

$\triangle a_1=a_2-a_1=1020.10-1010 \quad =10.10$

$\triangle a_2=a_3-a_2=1030.30-1020.10=10.20$

$\triangle a_3=a_4-a_3=1040.60-1030.30=10.30$

…

利息

一阶差分表达一种时间段内的变化

$\triangle a_n=a_{n+1}-a_n=0.01a_n$

$a_{n+1}=a_n+0.01a_n$

$a_n=1.01a_{n-1}, n=1,2,3,\cdots$

$a_0=1000$

一阶动力系统方程

若每月要从帐户提50美圆则动力系统方程为

$\triangle a_n=a_{n+1}-a_n=0.01a_n-50$

例4.2　抵押贷款买房

六年前你的父母筹借了月利率1%，月还款额为880.87美圆的23年贷款80000美圆购置了房子.他们已经还款72个月，他们想懂得还欠款多少抵押贷款?以便用一笔遗产来还清贷款.

$$\Delta b_n = b_{n+1} - b_n = 0.01b_n - 880.87$$

一阶动力系统方程　　$b_{n+1}=b_n+0.01b_n-880.87$

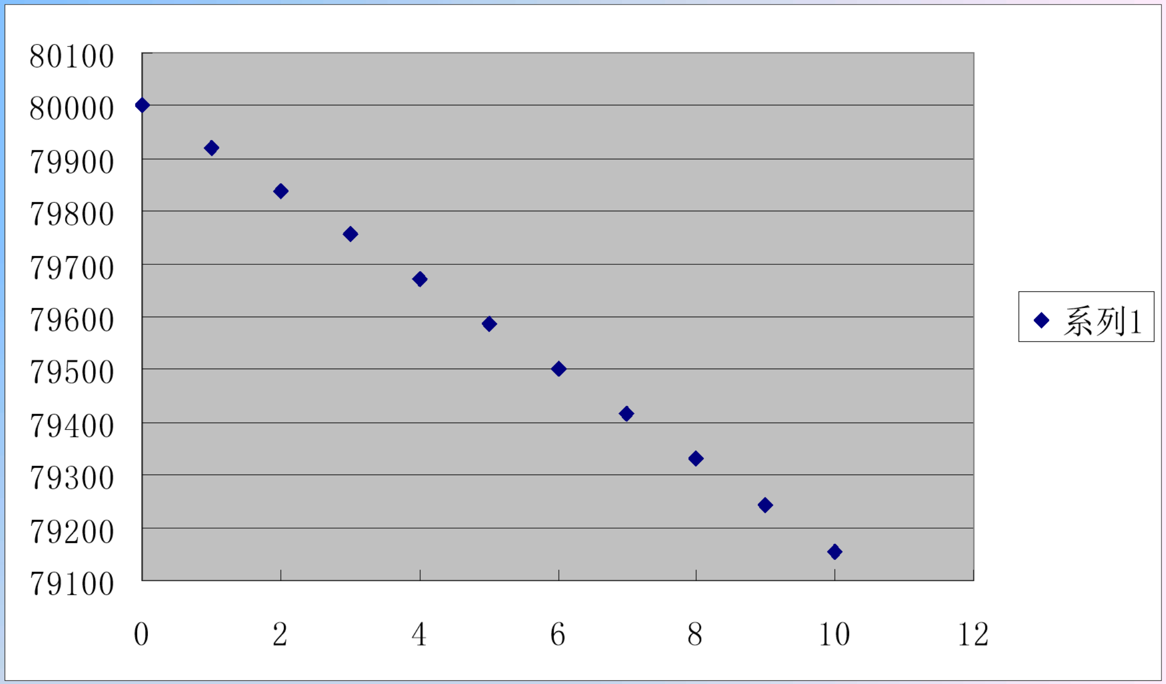
$b_{n+1}=1.01b_n-880.87$

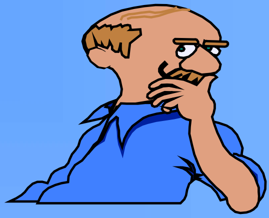
$b_0=80000$

一种序列就是定义在非负整数集上的函数.
一种动力系统是指序列各项之间的关系.

数值解是该动力系统的一张数值表

月	欠款额
0	80000.00
1	79919.13
2	79837.45
3	79754.96
4	79671.64
5	79587.48
6	79502.49
7	79416.64
8	79329.94
9	79242.37
10	79153.92





思索题

- **你希望买1辆新车而且选择范围只限于S、C、H三家企业,每家企业都向你提供最优惠的交易条件**

S企业　车价13990美元　预付定金1000，　月利率3.5%直到60个月

C企业　车价13550美元　预付定金1500，　月利率4.5%直到60个月

H企业　车价12400美元　预付定金500，　月利率6.5%直到48个月

你每月买车最多能支付**475**美元，利用系统动力学模型来决定你应该买哪家企业的汽车？

4.2 用差分方程近似描述变化

例4.3.酵母培养物的增长

表中数据是从酵母培养物的增长的试验中搜集来的

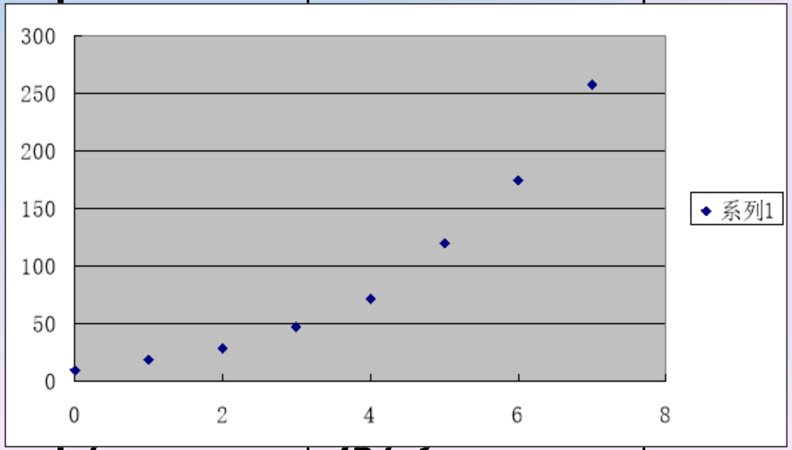
从图中看到可令:$\triangle p_n = kp_n$

$K=0.5$,则$p_{n+1}=1.5p_n$

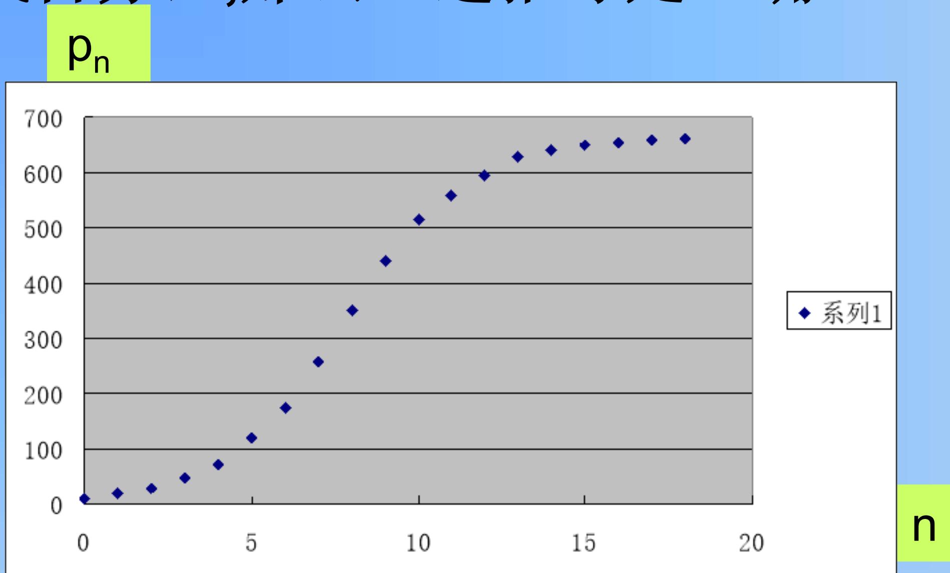
直线增长不好!

原因:数据量太少

以小时计的时间n	观察到的酵母生物量pn	生物量的变化△pn
7	257.3	



假如一种周期内的出生和死亡都和种群量成百分比,那么上述推导是正确



从图形上看,种群量有一极限;既容纳量,我们猜测为665?

$\triangle P_n=P_{n+1}-P_n=k(665-P_n)Pn$

估计出k=0.00082 $P_{n+1}-P_n=0.00082(665-P_n)Pn$

方程 $P_{n+1}=P_n+0.00082(665-P_n)Pn$

是二次的,称之为非线形动力系统.

非线型动力系统一般不轻易得到解析体现式,图给出预测值

• 以小时计的时间n	• 观察到的酵母生物量pn	• 生物量的变化△pn
0	9.6	8.7
1	18.3	10.7
2	29.0	18.2
3	47.2	23.9
4	71.1	48.0
5	119.1	55.5
6	174.6	82.7
7	257.3	[illegible]
8	[illegible]	[illegible]

接触性传染病的传播

假设学院宿舍里有400个学生而且一种或更多学生得了严重流感.

用i_n表达n个时间周期后受感染的学生人数.假设以感染的学生和未感染的学生之间存在某种相互作用使疾病得以传播.假如全部人都是易感的,那么$(400-i_n)$表达易感而未感染的学生数

$$\Delta i_n = i_{n+1} - i_n = k(400 - i_n)\, i_n$$

这里简介的模型叫离散型**阻滞增长**模型

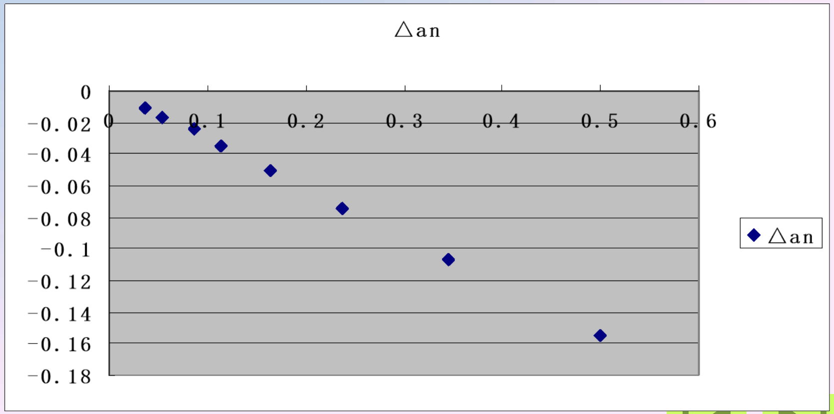
例4.4 血流中的地高辛的衰减

地高辛用于治疗心脏病， 医生开出的处方的剂量应该能保持血流中地高辛的浓度高于一种有效水平值而又不能超出安全水平值

下表是血流中初始剂量为0.5毫克的情形.a_n是第n天血流中地高辛的剩余量, $\triangle a_n$是每天的变化量

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
an	0.5	0.345	0.238	0.164	0.113	0.078	0.054	0.037	0.026
$\triangle a_n$	-0.155	-0.107	-0.074	-0.051	-0.035	-0.024	-0.017	-0.011	

轻易看出$\triangle a_n$与 a_n间具有线性关系



$$\triangle a_n = k a_n$$

4.3 动力系统的解法

储蓄存单$a_n=1.01a_{n-1}$,$n=1,2,3,\ldots$ $a0=10000$

轻易解得 $a_n=10000（1.01）^n$

一般 $a_n=ra_{n-1}$ *有* $a_n=a_0r^n$

例 4.5污水处理

一家污水处理厂经过去去掉污水中全部的污物来处理未经处理的污水，以生产有用的肥料和清洁水。该处理过程每小时去掉处理池中剩余的污物的12%。1天后处理池中将留下百分之几的污物？要多少时间才干把污物的量降低二分之一？要把污物降低到原来的10%，需要多少时间？

设开始的污物量是a_0,a_n表达n小时后的污物量，于是

$a_{n+1}=a_n-0.12a_n=0.88a_n$

线性动力系统

$a_n=a_0 0.88^n \quad n=0,1,2,3,\cdots$

1天后的污物量为$a_{24}=a_0 0.88^{24}=0.0465a_0$

可见1天后污物已除去95%以上。

假设k小时后污物量是原来的二分之一

$a_k=0.5a_0$

$0.88^k=0.5$

解得k=5.42

要5.42小时才干把污物的量降低二分之一

$a_n=a_0 0.88^n=0.1a_0$

解得k=18.01

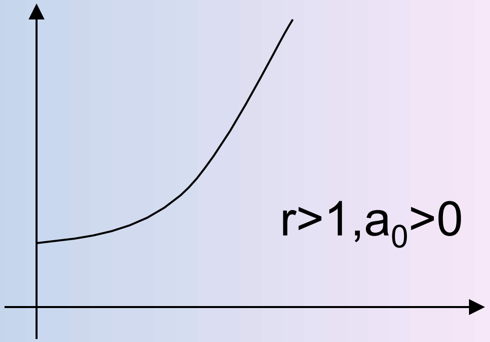
要18小时才干把污物的量降低到原来的10%

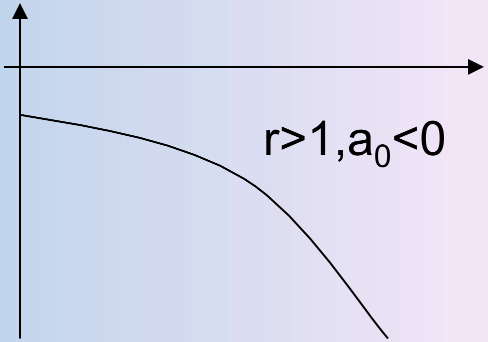
4.4 动力系统稳定性分析

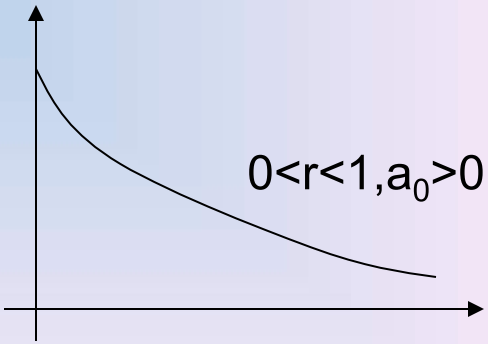
1、$a_{n+1}=ra_n$的长久行为

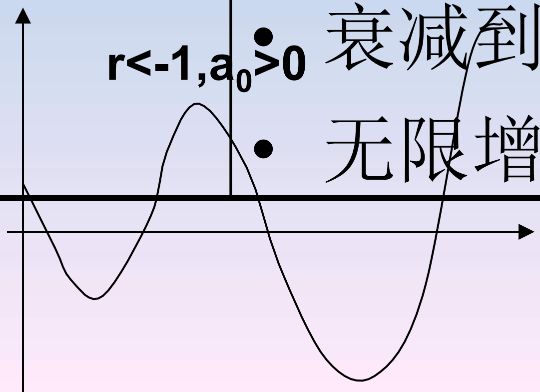
系统的解为$a_n=a_0 r^n$

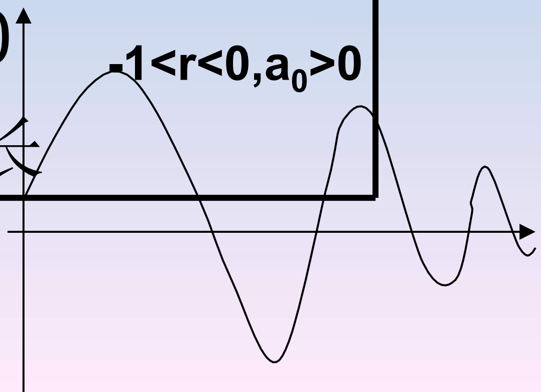
r	趋势
$r=0$ $r=1$ $r<0$ $\|r\|<1$ $\|r\|>1$	• 常数解在0处到达平衡 • 全部初值都是常数解 • 震荡 • 衰减到0 • 无限增长











2、$a_{n+1}=ra_n+b$的长久行为

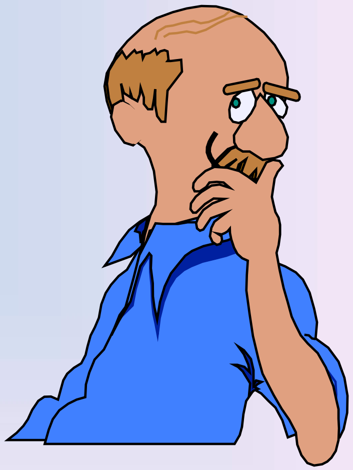
定义:当$a_0=a$时，假如对全部的$k=1,2,3,\cdots$有$a_k=a$, 则称常数a为动力系统$a_{n+1}=f(a_n)$的平衡点或不动点。

即$a_k=a$是该动力系统的常数解。

直观解释是：$a=f(a)$

为何要研究平衡点?

经过3个例子阐明



例4.6 地高辛处方

回忆地高辛问题，地高辛是治疗心脏病的。怎样考虑地高辛在血流中的衰减问题以开出能使地高辛浓度保持在可解释（安全而有效）的水平上的剂量呢？

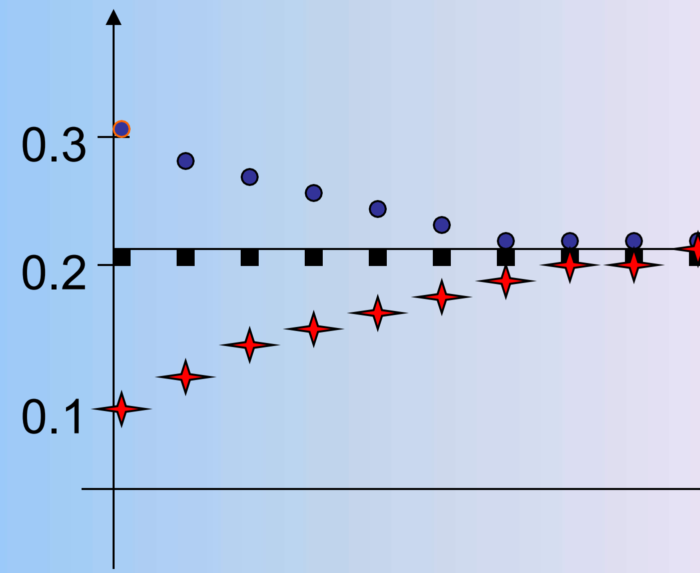
假设开了每日0.1毫克的地高辛剂量处方，而且懂得在每个周期末还剩余二分之一地高辛。

这么有如下动力系统：

$$a_{n+1}=0.5a_n+0.1$$

考虑三个初值或初始剂量 A：$a_0=0.1$ B: $a_0=0.2$ C: a0=0.3

	A	B	C
n	$0.5a_n+0.1$	$0.5a_n+0.2$	$0.5a_n+0.3$
0	0.1	0.2	0.3
1	0.15	0.2	0.25
2	0.175	0.2	0.225
3	0.1875	0.2	0.2125
4	0.19375	0.2	0.20625
5	0.196875	0.2	0.20312
6	0.1984375	0.2	
7	0.19921875	0.2	
8	0.19960938	0.2	
9	0.19980469	0.2	
10	0.19990234	0.2	



稳定的平衡点例子

可见0.2时一种平衡点，因为一旦到达这个值，系统就永远停留在0.2处。另外 …

例4.7 投资年金

考虑存款和年金问题。年金往往是为退休的目的而安排的，年金基本是活期存款账户，对既有的存款支付利息而且允许每月有固定的提款，直到提尽为止。

一种有趣的问题是：拟定每月的存款额，以便建立允许提款的年金，使得在账户中的存款用尽之前，能在计划的年数之间从某个年龄开始提取要求的款项（年金）。

现考虑简朴问题：开始存入一笔款项a_0. 从下个月开始每月提款一次，提款额1000元，月利率1%

a_n表达第n个月的存款余额,则有如下动力系统：

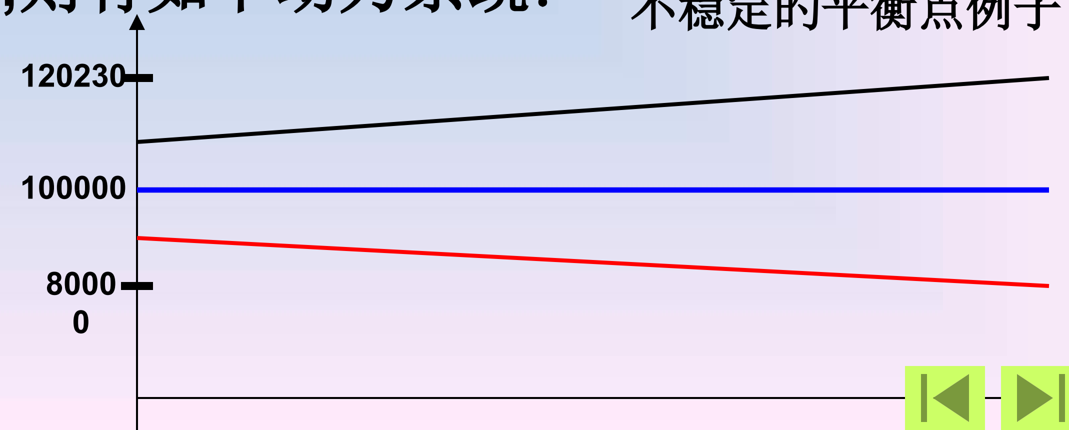
$$a_{n+1}=1.01a_n-1000$$

考虑如下初始投资A：$a_0=90000$

平衡点B　　B：$a_0=100000$

C：$a_0=110000$

不稳定的平衡点例子

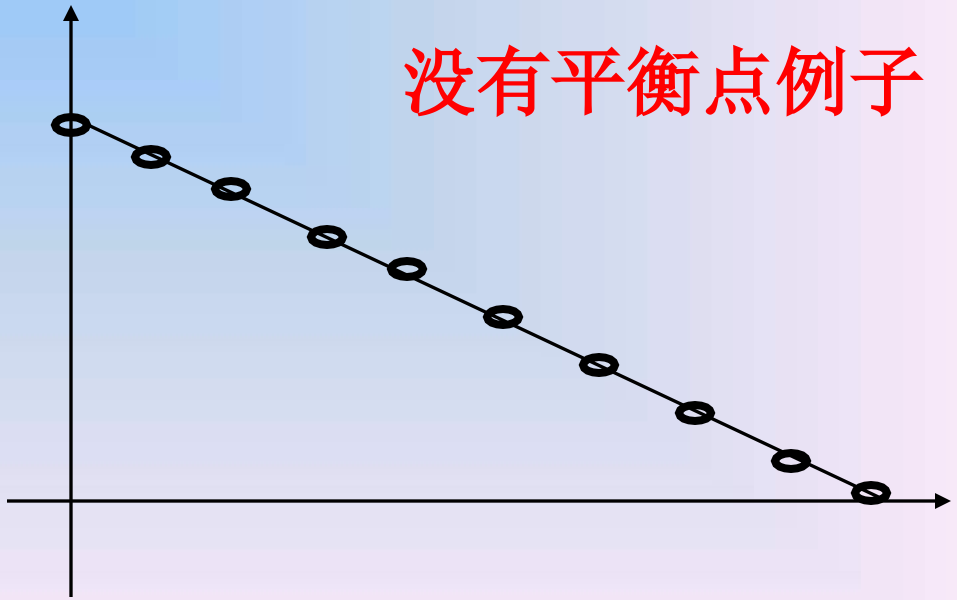


例4.8无利息储蓄账户

假如你有一种无息储蓄账户,金额3000元，每月需要从中提取300元缴纳房租

a_n是第n个月的账户余额.动力系统方程：

$$a_{n+1}=a_n-300$$



没有平衡点例子

- 总结：$a_{n+1}=ra_n+b$的长久行为，动力系统有平衡点 需解方程$a=ra+b$

  $a=b/(1-r) \quad r\neq 1$

定理1 动力系统$a_{n+1}=ra_n+b$ 的平衡点是$a=b/(1-r)$ $r\neq 1$

假如r=1而且b=0，那么每个数都是平衡点。假如r=1而b≠0，那么不存在平衡点

• r的值	• 长久行为
$\lvert r\rvert<1$	• 稳定的平衡点
$\lvert r\rvert>1$	• 不稳定的平衡点
r=1	• 没有平衡点或一条直线

定理2 动力系统 $a_{n+1}=ra_n+b$的解：

$$a_k = r^k c + \frac{b}{1-r}$$

C是依赖于初值的某个常数，r满足有平衡点的条件

再论年金

考虑简朴问题：开始存入一笔款项a_0.从下个月开始每月提款一次，提款额1000元，月利率1%

$$a_{n+1}=1.01a_n-1000$$

问题是需要多少初始资金，确保23年（240个月）才干将它用完？

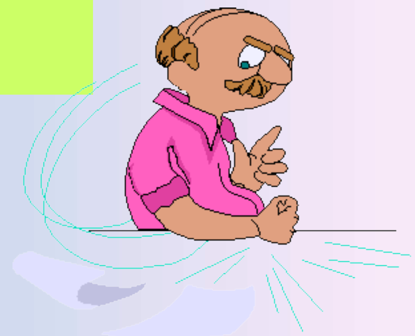
由定理2　　$a_{240}=c1.01^{240}+100000=0$

C=-9180.58

初值为$a_0=c0.01^0+100000=90819.42$

所以初始投资90819.42元能够确保我们在23年里每月提取1000元，第23年底账户资金用尽。

二阶差分方程与分形（混沌）



前面简介了酵母生物量动力系统模型

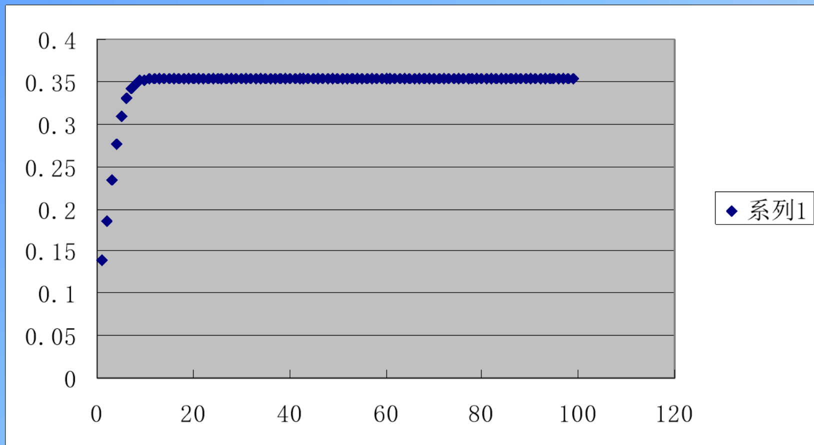
$P_{n+1}=P_n+0.00082(665-P_n)P_n$

经过简朴整顿，此类模型可化为如下形式：

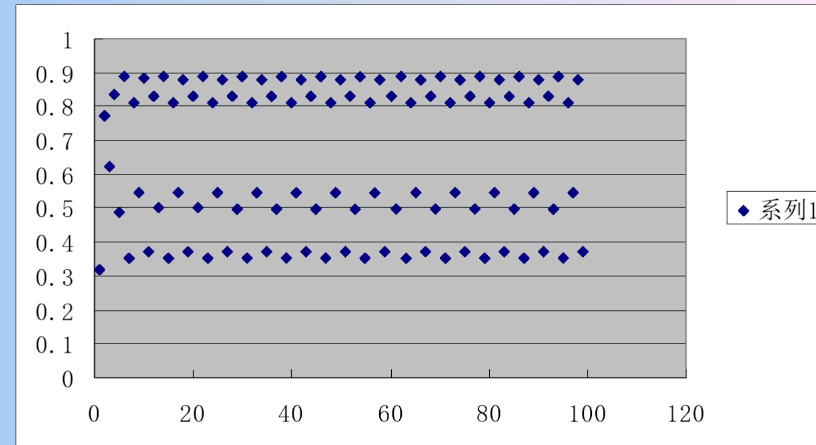
$$a_{n+1}=r(1-a_n)a_n$$

其中$a_n=0.0005306p_n$，$r=1.546$

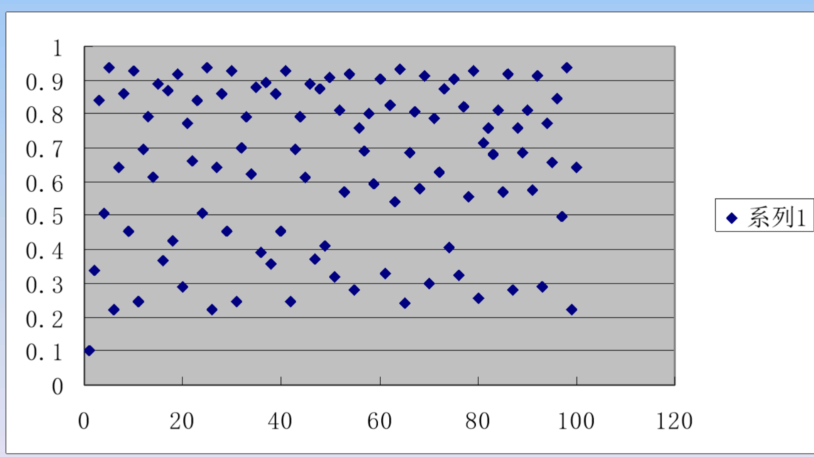
取$a_0=0.1$，对不同r的，写出数列并画出图形



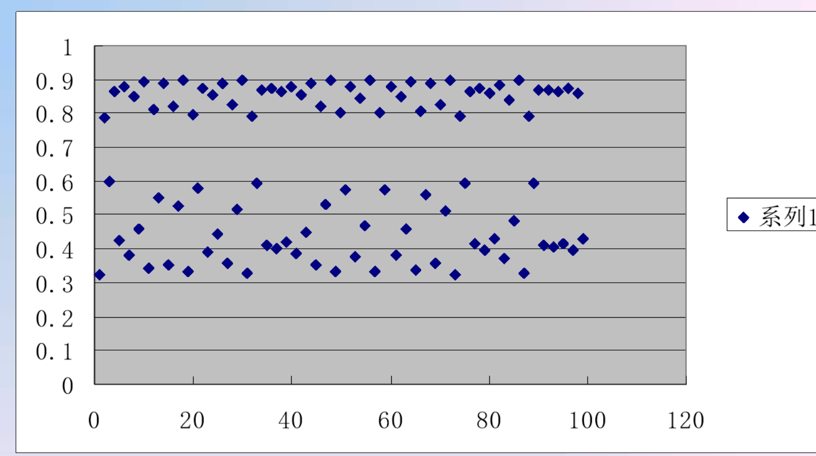
r=1.546



r=3.555



r=3.750



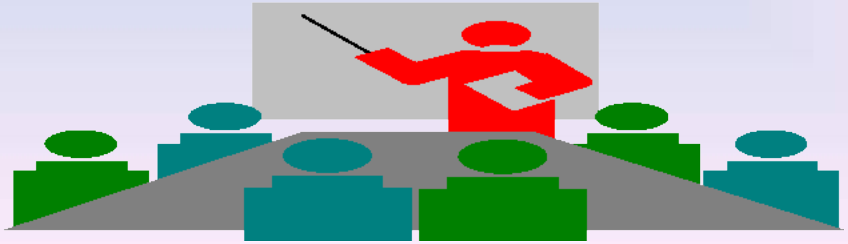
r=3.600

研究课题

你计划拿出一部分薪水作为子女的教育经费。你希望在账户内有足够的存款，使得从目前起23年后开始的八年里，每月能提出1000元。账户每月的利息0.05%

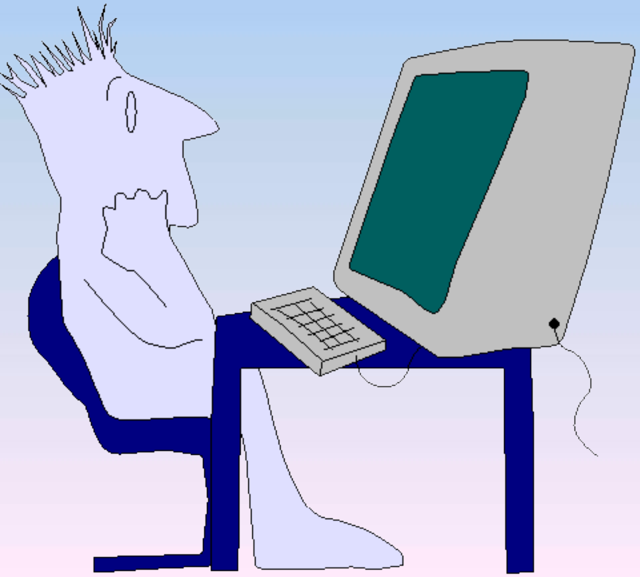
1、完毕你的目的，23年里你总共需要积累多少钱?

2、在后来的23年里，你每月要存多少钱?



4.5 差分方程组的稳定性

本节我们研究差分方程组，对于所选的初值，建立数值解以求洞察该系统的长久行为（稳定性）。前面懂得平衡点是因变量的取值，系统一旦到达平衡点，便不再变化。



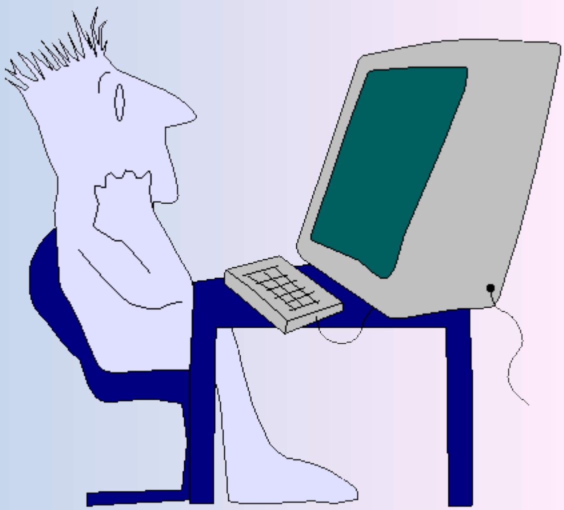
本节要回答如下问题

1、从一种接近平衡点的位置开始，系统是

a.依然接近平衡点

b.趋近该平衡点

c.不再接近平衡点



2、在平衡点附近会发生什么？

a.有周期吗？

b.会有震荡？

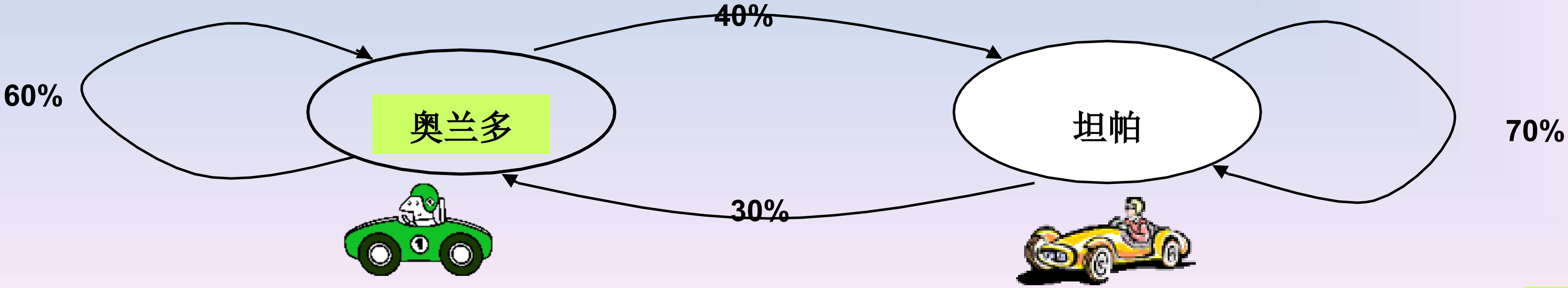
c.对初始条件敏感吗？

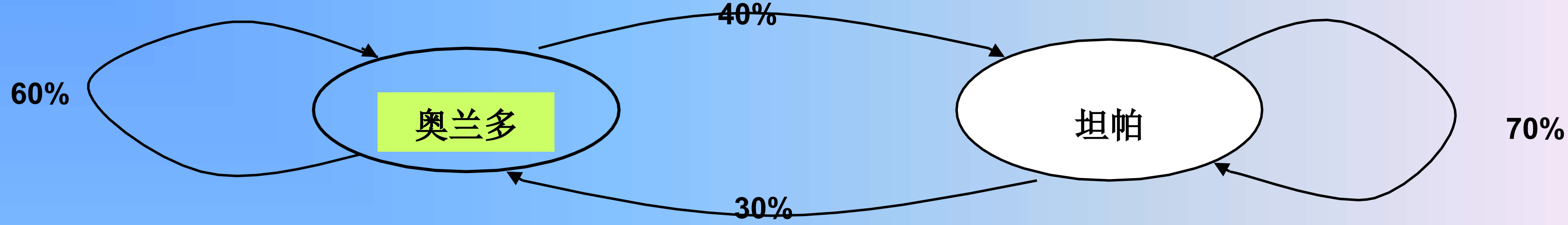
例4.9 汽车租赁企业

一家汽车租赁企业在奥兰多和坦帕都有分企业。企业是为满足这两个地方的旅游而建的。所以游客能够在一种城市租车而在另一种城市还车，游客可能在2个城市都有旅行计划。该企业想懂得这种以便的借还车方式的收费应该是多少？

因为汽车在2个城市都能够偿还，每个城市必须有足够的车辆以满足需要。假如某个城市的汽车不够了，那么需要从另一种城市运送多少车辆到另一种城市？

目前分析了数据后发觉，在奥兰多出租的车辆约有60%还到了奥兰多，另外40%还到了坦帕，在坦帕出的车辆租约有70%还到了坦帕，另外30%还到了奥兰多，





动力系统模型

令n表达营业天数。定义

O_n=第n天营业结束时在奥兰多的车辆数

T_n=第n天营业结束时在坦帕的车辆数

动力系统方程

$$O_{n+1}=0.6O_n+0.3T_n$$

$$T_{n+1}=0.4O_n+0.7T_n$$