

2023-2024 学年广东省云浮市郁南县连滩中学高三下学期联合考试数学试题

注意事项

1. 考生要认真填写考场号和座位序号。
2. 试题所有答案必须填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。第一部分必须用 2B 铅笔作答；第二部分必须用黑色字迹的签字笔作答。
3. 考试结束后，考生须将试卷和答题卡放在桌面上，待监考员收回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数，设其前 n 项和 S_n ，若 $a_n a_{n+1} = 4^n$ ($n \in \mathbf{N}^*$)，则 $S_5 =$ ()

- A. 30 B. $31\sqrt{2}$ C. $15\sqrt{2}$ D. 62

2. 观察下列各式： $x \otimes y = 2$ ， $x^2 \otimes y^2 = 4$ ， $x^3 \otimes y^3 = 9$ ， $x^4 \otimes y^4 = 17$ ， $x^5 \otimes y^5 = 31$ ， $x^6 \otimes y^6 = 54$ ，

$x^7 \otimes y^7 = 92$ ， $\dots$ ，根据以上规律，则 $x^{10} \otimes y^{10} =$ ()

- A. 255 B. 419 C. 414 D. 253

3. 山东烟台苹果因“果形端正、色泽艳丽、果肉甜脆、香气浓郁”享誉国内外.据统计，烟台苹果（把苹果近似看成球体）的直径（单位： mm ）服从正态分布 $N(80, 5^2)$ ，则直径在 $(75, 90]$ 内的概率为 ()

附：若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，则 $P(\mu - \sigma < X \leq \mu + \sigma) = 0.6826$ ， $P(\mu - 2\sigma < X \leq \mu + 2\sigma) = 0.9544$.

- A. 0.6826 B. 0.8413 C. 0.8185 D. 0.9544

4. 已知六棱锥 $P-ABCDEF$ 各顶点都在同一个球（记为球 O ）的球面上，且底面 $ABCDEF$ 为正六边形，顶点 P 在底面上的射影是正六边形 $ABCDEF$ 的中心 G ，若 $PA = \sqrt{6}$ ， $AB = \sqrt{2}$ ，则球 O 的表面积为 ()

- A. $\frac{16\pi}{3}$ B. $\frac{9\pi}{4}$ C. 6π D. 9π

5. 我国古代典籍《周易》用“卦”描述万物的变化。每一“重卦”由从下到上排列的 6 个爻组成，爻分为阳爻“——”和阴爻“— —”。如图就是一重卦。在所有重卦中随机取一重卦，则该重卦至少有 2 个阳爻的概率是 ()



- A. $\frac{7}{64}$ B. $\frac{11}{32}$ C. $\frac{57}{64}$ D. $\frac{11}{16}$

6. 欧拉公式为 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, (i

虚数单位)是由瑞士著名数学家欧拉发现的, 它将指数函数的定义域扩大到复数, 建立了三角函数和指数函数的关系, 它在复变函数论里非常重要, 被誉为“数学中的天桥”. 根据欧拉公式可知, $e^{\frac{\pi}{3}i}$ 表示的复数位于复平面中的 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

7. 若直线 $y = kx - 2$ 与曲线 $y = 1 + 3 \ln x$ 相切, 则 $k =$ ()

- A. 3 B. $\frac{1}{3}$ C. 2 D. $\frac{1}{2}$

8. 在声学中, 声强级 L (单位: dB) 由公式 $L = 10 \lg \left(\frac{I}{10^{-12}} \right)$ 给出, 其中 I 为声强 (单位: W/m^2). $L_1 = 60 \text{ dB}$,

$L_2 = 75 \text{ dB}$, 那么 $\frac{I_1}{I_2} =$ ()

- A. $10^{\frac{4}{5}}$ B. $10^{-\frac{4}{5}}$ C. $-\frac{3}{2}$ D. $10^{-\frac{3}{2}}$

9. 已知函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $g(x) = xe^{-x}$. 若存在 $x_1 \in (0, +\infty)$, $x_2 \in \mathbb{R}$ 使得 $f(x_1) = g(x_2) = k$ ($k < 0$) 成立, 则

$\left(\frac{x_2}{x_1} \right)^2 e^k$ 的最大值为 ()

- A. e^2 B. e
C. $\frac{4}{e^2}$ D. $\frac{1}{e^2}$

10. 设 α , β 是方程 $x^2 - x - 1 = 0$ 的两个不等实数根, 记 $a_n = \alpha^n + \beta^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$). 下列两个命题 ()

① 数列 $\{a_n\}$ 的任意一项都是正整数;

② 数列 $\{a_n\}$ 存在某一项是 5 的倍数.

- A. ①正确, ②错误 B. ①错误, ②正确
C. ①②都正确 D. ①②都错误

11. 已知函数 $f(x) = \frac{e^x}{x} - ax$, $x \in (0, +\infty)$, 当 $x_2 > x_1$ 时, 不等式 $\frac{f(x_1)}{x_2} < \frac{f(x_2)}{x_1}$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围为

()

- A. $(-\infty, e]$ B. $(-\infty, e)$ C. $\left(-\infty, \frac{e}{2} \right)$ D. $\left(-\infty, \frac{e}{2} \right]$

12. 复数 $\bar{z} = \frac{2i}{1-i}$ (i 为虚数单位), 则 $|z|$ 等于 ()

A. 3

B. $2\sqrt{2}$

C. 2

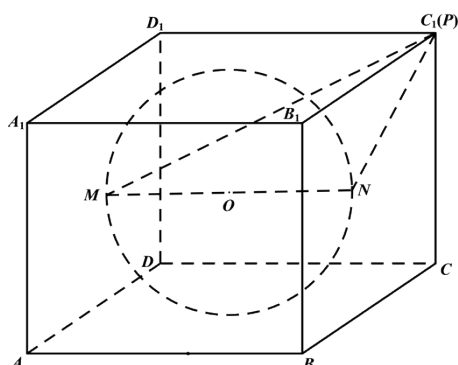
D. $\sqrt{2}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知复数 $z = \frac{a+i}{1-i}$ 是纯虚数, 则实数 $a = \underline{\hspace{2cm}}$, $|z| = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2, MN 是它的内切球的一条弦(我们把球面上任意两点之间的线段称为球的弦),

P 为正方体表面上的动点, 当弦 MN 的长度最大时, $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN}$ 的取值范围是_____.



15. 函数 $f(x) = \sqrt{x} + \log_2(1-x)$ 的定义域为_____.

16. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |x^2 + 5x + 4|, & x \leq 0 \\ 2|x - 2|, & x > 0 \end{cases}$, 若函数 $y = f(x) - a|x|$ 恰有 4 个零点, 则实数 a 的取值范围是

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 有甲、乙两家外卖公司, 其送餐员的日工资方案如下: 甲公司底薪 80 元, 送餐员每单制成 4 元; 乙公司无底薪, 40 单以内 (含 40 单) 的部分送餐员每单抽成 6 元, 超过 40 单的部分送餐员每单抽成 7 元. 现从这两家公司各随机选取一名送餐员, 分别记录其 50 天的送餐单数, 得到如下频数分布表:

送餐单数	38	39	40	41	42
甲公司天数	10	10	15	10	5
乙公司天数	10	15	10	10	5

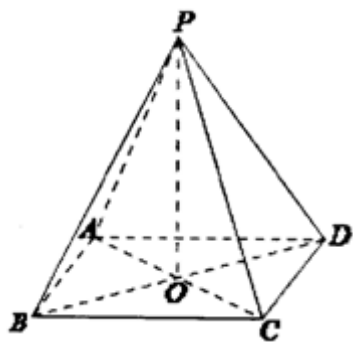
(1) 从记录甲公司的 50 天送餐单数中随机抽取 3 天, 求这 3 天的送餐单数都不小于 40 单的概率;

(2) 假设同一公司的送餐员一天的送餐单数相同，将频率视为概率，回答下列两个问题：

①求乙公司送餐员日工资的分布列和数学期望;

②小张打算到甲、乙两家公司中的一家应聘送餐员，如果仅从日工资的角度考虑，小张应选择哪家公司应聘？说明你的理由.

18. (12 分) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是矩形, 四条侧棱长均相等.



(1) 求证: $AB \perp$ 平面 PCD ;

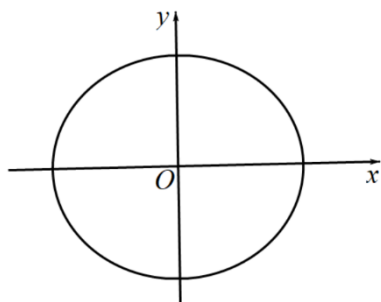
(2) 求证: 平面 $PAC \perp$ 平面 $ABCD$.

19. (12 分) 已知抛物线 $C_1: x^2 = 2py$ ($p > 0$) 和圆 $C_2: (x+1)^2 + y^2 = 2$, 倾斜角为 45° 的直线 l_1 过抛物线 C_1 的焦点, 且 l_1 与圆 C_2 相切.

(1) 求 p 的值;

(2) 动点 M 在抛物线 C_1 的准线上, 动点 A 在 C_1 上, 若 C_1 在 A 点处的切线 l_2 交 y 轴于点 B , 设 $\vec{MN} = \vec{MA} + \vec{MB}$. 求证点 N 在定直线上, 并求该定直线的方程.

20. (12 分) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{1}{2}$, 且过点 $(0, \sqrt{3})$.



(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 已知 $\triangle BMN$ 是椭圆 C 的内接三角形,

①若点 B 为椭圆 C 的上顶点, 原点 O 为 $\triangle BMN$ 的垂心, 求线段 MN 的长;

②若原点 O 为 $\triangle BMN$ 的重心, 求原点 O 到直线 MN 距离的最小值.

21. (12 分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 曲线 $C_1: \begin{cases} x = 1 + r \cos \theta, \\ y = \sqrt{3} + r \sin \theta, \end{cases}$ (θ 为参数, $r > 0$), 曲线 $C_2: \begin{cases} x = 5 + \frac{\sqrt{3}}{2}t, \\ y = \sqrt{3} + \frac{1}{2}t, \end{cases}$

(t 为参数).若曲线 C_1 和 C_2 相切.

(1) 在以 O 为极点, x 轴非负半轴为极轴的极坐标系中, 求曲线 C_1 的普通方程;

(2) 若点 M , N 为曲线 C_1 上两动点, 且满足 $\angle MON = \frac{\pi}{3}$, 求 $\triangle MON$ 面积的最大值.

22. (10分) 已知椭圆 C 的中心在坐标原点 C , 其短半轴长为1, 一个焦点坐标为 $(1,0)$, 点 A 在椭圆 C 上, 点 B 在直线 $y = \sqrt{2}$ 上的点, 且 $OA \perp OB$.

(1) 证明: 直线 AB 与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 相切;

(2) 求 $\triangle AOB$ 面积的最小值.

参考答案

一、选择题: 本题共12小题, 每小题5分, 共60分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、B

【解析】

根据 $a_n a_{n+1} = 4^n$, 分别令 $n=1, 2$, 结合等比数列的通项公式, 得到关于首项和公比的方程组, 解方程组求出首项和公式, 最后利用等比数列前 n 项和公式进行求解即可.

【详解】

设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 由题意可知中: $a_1 > 0, q > 0$. 由 $a_n a_{n+1} = 4^n$, 分别令 $n=1, 2$, 可得 $a_1 a_2 = 4$ 、

$a_2 a_3 = 16$, 由等比数列的通项公式可得:
$$\begin{cases} a_1 \cdot a_1 \cdot q = 4 \\ a_1 \cdot q \cdot a_1 \cdot q^2 = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \sqrt{2} \\ q = 2 \end{cases},$$

因此 $S_5 = \frac{\sqrt{2}(1-2^5)}{1-2} = 31\sqrt{2}$.

故选: B

【点睛】

本题考查了等比数列的通项公式和前 n 项和公式的应用, 考查了数学运算能力.

2、B

【解析】

每个式子的值依次构成一个数列 $\{a_n\}$ ，然后归纳出数列的递推关系 $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + n$ 后再计算.

【详解】

以及数列的应用根据题设条件，设数字 2，4，9，17，31，54，92， $\dots$ 构成一个数列 $\{a_n\}$ ，可得数列 $\{a_n\}$ 满足

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + n \quad (n \geq 3, n \in \mathbf{N}^*),$$

$$\text{则 } a_8 = a_7 + a_6 + 8 = 54 + 92 + 8 = 154,$$

$$a_9 = a_8 + a_7 + 9 = 154 + 92 + 9 = 255, \quad a_{10} = a_9 + a_8 + 10 = 255 + 154 + 10 = 419.$$

故选：B.

【点睛】

本题主要考查归纳推理，解题关键是通过数列的项归纳出递推关系，从而可确定数列的一些项.

3、C

【解析】

根据服从的正态分布可得 $\mu = 80$ ， $\sigma = 5$ ，将所求概率转化为 $P(\mu - \sigma < X \leq \mu + 2\sigma)$ ，结合正态分布曲线的性质可求得结果.

【详解】

$$\text{由题意，} \mu = 80, \sigma = 5, \text{ 则 } P(75 < X, 85) = 0.6826, \quad P(70 < X, 90) = 0.9544,$$

$$\text{所以 } P(85 < X, 90) = \frac{1}{2} \times (0.9544 - 0.6826) = 0.1359, \quad P(75 < X, 90) = 0.6826 + 0.1359 = 0.8185.$$

故果实直径在 $(75, 90]$ 内的概率为 0.8185.

故选：C

【点睛】

本题考查根据正态分布求解特定区间的概率问题，考查了正态曲线的对称性，属于基础题.

4、D

【解析】

由题意，得出六棱锥 $P-ABCDEF$ 为正六棱锥，求得 $PG = \sqrt{PA^2 - AG^2} = 2$ ，再结合球的性质，求得球的半径

$$R = \frac{3}{2}, \text{ 利用表面积公式，即可求解.}$$

【详解】

由题意，六棱锥 $P-ABCDEF$ 底面 $ABCDEF$ 为正六边形，顶点 P 在底面上的射影是正六边形 $ABCDEF$ 的中心 G ，可得此六棱锥为正六棱锥，

又由 $AB = \sqrt{2}$ ，所以 $AG = \sqrt{2}$ ，

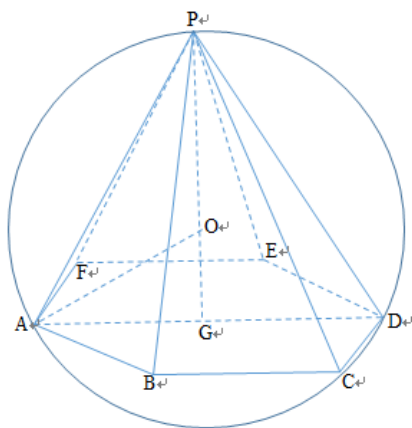
在直角 $\triangle PAG$ 中，因为 $PA = \sqrt{6}$ ，所以 $PG = \sqrt{PA^2 - AG^2} = 2$ ，

设外接球的半径为 R ，

在 $\triangle AOG$ 中，可得 $AO^2 = AG^2 + OG^2$ ，即 $R^2 = (2 - R)^2 + (\sqrt{2})^2$ ，解得 $R = \frac{3}{2}$ ，

所以外接球的表面积为 $S = 4\pi R^2 = 9\pi$ 。

故选： D 。



【点睛】

本题主要考查了正棱锥的几何结构特征，以及外接球的表面积的计算，其中解答中熟记几何体的结构特征，熟练应用球的性质求得球的半径是解答的关键，着重考查了空间想象能力，以及推理与计算能力，属于中档试题。

5、C

【解析】

利用组合的方法求所求的事件的对立事件,即该重卦没有阳爻或只有 1 个阳爻的概率,再根据两对立事件的概率和为 1 求解即可.

【详解】

设“该重卦至少有 2 个阳爻”为事件 A .所有“重卦”共有 2^6 种;“该重卦至少有 2 个阳爻”的对立事件 $\bar{A}$ 是“该重卦没有阳爻或只有 1 个阳爻”,其中,没有阳爻(即 6 个全部是阴爻)的情况有 1 种,只有 1 个阳爻的情况有 $C_6^1 = 6$ 种,故

$$P(\bar{A}) = \frac{1+6}{2^6} = \frac{7}{64}, \text{ 所以该重卦至少有 2 个阳爻的概率是 } P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{7}{64} = \frac{57}{64}.$$

故选：C

【点睛】

本题主要考查了对立事件概率和为 1 的方法求解事件概率的方法.属于基础题.

6、A

【解析】

计算 $e^{\frac{\pi}{3}i} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ，得到答案.

【详解】

根据题意 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ ，故 $e^{\frac{\pi}{3}i} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ，表示的复数在第一象限.

故选：A.

【点睛】

本题考查了复数的计算，意在考查学生的计算能力和理解能力.

7、A

【解析】

设切点为 $(x_0, kx_0 - 2)$ ，对 $y = 1 + 3\ln x$ 求导，得到 $y' = \frac{3}{x}$ ，从而得到切线的斜率 $k = \frac{3}{x_0}$ ，结合直线方程的点斜式化简

得切线方程，联立方程组，求得结果.

【详解】

设切点为 $(x_0, kx_0 - 2)$ ，

$$\because y' = \frac{3}{x}, \therefore \begin{cases} \frac{3}{x_0} = k \text{ ①,} \\ kx_0 - 2 = 1 + 3\ln x_0 \text{ ②,} \end{cases}$$

由①得 $kx_0 = 3$ ，

代入②得 $1 + 3\ln x_0 = 1$ ，

则 $x_0 = 1$ ， $k = 3$ ，

故选 A.

【点睛】

该题考查的是有关直线与曲线相切求参数的问题，涉及到的知识点有导数的几何意义，直线方程的点斜式，属于简单题目.

8、D

【解析】

由 $L = 10 \lg \left(\frac{I}{10^{-12}} \right)$ 得 $\lg I = \frac{L}{10} - 12$ ，分别算出 I_1 和 I_2 的值，从而得到 $\frac{I_1}{I_2}$ 的值.

【详解】

$$\because L = 10 \lg \left(\frac{I}{10^{-12}} \right),$$

$$\therefore L = 10 (\lg I - \lg 10^{-12}) = 10 (\lg I + 12),$$

$$\therefore \lg I = \frac{L}{10} - 12,$$

$$\text{当 } L_1 = 60 \text{ 时, } \lg I_1 = \frac{L_1}{10} - 12 = \frac{60}{10} - 12 = -6, \therefore I_1 = 10^{-6},$$

$$\text{当 } L_2 = 75 \text{ 时, } \lg I_2 = \frac{L_2}{10} - 12 = \frac{75}{10} - 12 = -4.5, \therefore I_2 = 10^{-4.5},$$

$$\therefore \frac{I_1}{I_2} = \frac{10^{-6}}{10^{-4.5}} = 10^{-1.5} = 10^{-\frac{3}{2}},$$

故选：D.

【点睛】

本小题主要考查对数运算，属于基础题.

9、C

【解析】

由题意可知， $g(x) = f(e^x)$ ，由 $f(x_1) = g(x_2) = k (k < 0)$ 可得出 $0 < x_1 < 1$ ， $x_2 < 0$ ，利用导数可得出函数

$y = f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 上单调递增，函数 $y = g(x)$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 上单调递增，进而可得出 $x_1 = e^{x_2}$ ，由此可得出

$\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2}{e^{x_2}} = g(x_2) = k$ ，可得出 $\left(\frac{x_2}{x_1} \right)^2 e^k = k^2 e^k$ ，构造函数 $h(k) = k^2 e^k$ ，利用导数求出函数 $y = h(k)$ 在 $k \in (-\infty, 0)$

上的最大值即可得解.

【详解】

$$\text{Q } f(x) = \frac{\ln x}{x}, \quad g(x) = \frac{x}{e^x} = \frac{\ln e^x}{e^x} = f(e^x),$$

由于 $f(x_1) = \frac{\ln x_1}{x_1} = k < 0$ ，则 $\ln x_1 < 0 \Rightarrow 0 < x_1 < 1$ ，同理可知， $x_2 < 0$ ，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/395134233044011332>