北京交通大学附属中学 2024-2025 学年高三暑期调研考试数学试题试卷

注意事项：

1．答题前，考生先将自己的姓名、准考证号码填写清楚，将条形码准确粘贴在条形码区域内。

2．答题时请按要求用笔。

3．请按照题号顺序在答题卡各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试卷上答题无效。

4．作图可先使用铅笔画出，确定后必须用黑色字迹的签字笔描黑。

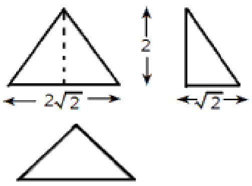
5．保持卡面清洁，不要折暴、不要弄破、弄皱，不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．若复数 z 满足 $(2+3\mathrm{i})z=13\mathrm{i}$，则 $z=$（　　）

A． $-3+2\mathrm{i}$　　**B．** $3+2\mathrm{i}$　　**C．** $-3-2\mathrm{i}$　　**D．** $3-2\mathrm{i}$

2．已知棱锥的三视图如图所示，其中俯视图是等腰直角三角形，则该三棱锥的四个面中，最大面积为（　　）



A． $2\sqrt{2}$　　**B．** $2\sqrt{3}$　　**C．** 4　　**D．** $2\sqrt{6}$

3．已知定点 A,B 都在平面 α 内，定点 $P\notin\alpha,PB\perp\alpha,C$ 是 α 内异于 A,B 的动点，且 $PC\perp AC$，那么动点 C 在平面 α 内的轨迹是（　　）

A． 圆，但要去掉两个点　　**B．** 椭圆，但要去掉两个点

C． 双曲线，但要去掉两个点　　**D．** 抛物线，但要去掉两个点

4．函数 $f\left(x\right)=\cos 2x\left(x\in\left[-\pi,2\pi\right]\right)$ 的图象与函数 $g\left(x\right)=\sin x$ 的图象的交点横坐标的和为（　　）

A． $\frac{5\pi}{3}$　　**B．** 2π　　**C．** $\frac{7\pi}{6}$　　**D．** π

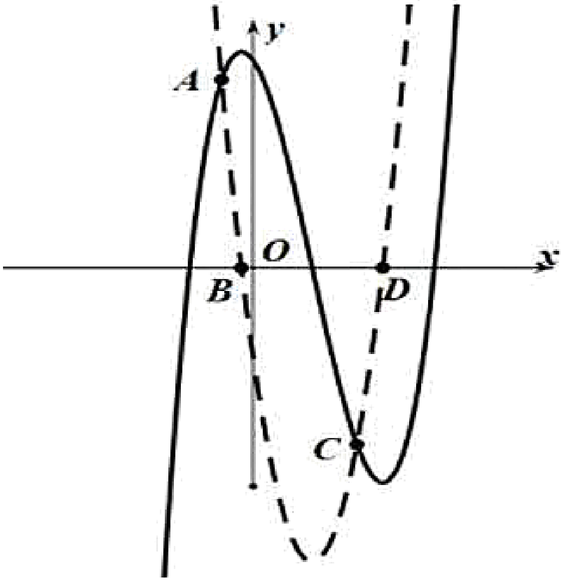
5．已知正四棱锥 $S-ABCD$ 的侧棱长与底面边长都相等，E 是 SB 的中点，则 AE，SD 所成的角的余弦值为（ ）

A． $\frac{1}{3}$　　**B．** $\frac{\sqrt{2}}{3}$　　**C．** $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　**D．** $\frac{2}{3}$

6．设直线 l 过点 $A\left(0,-1\right)$，且与圆 C：$x^2+y^2-2y=0$ 相切于点 B，那么 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$（　　）

A． ± 3　　**B．** 3　　**C．** $\sqrt{3}$　　**D．** 1

7．定义在 $\left[-2,2\right]$ 上的函数 $f\left(x\right)$ 与其导函数 $f'\left(x\right)$ 的图象如图所示，设 O 为坐标原点，A、B、C、D 四点的横坐标依次为 $-\frac{1}{2}$、$-\frac{1}{6}$、1、$\frac{4}{3}$，则函数 $y=\frac{f\left(x\right)}{e^x}$ 的单调递减区间是（　　）



A．$\left(-\frac{1}{6},\frac{4}{3}\right)$　　B．$\left(-\frac{1}{2},1\right)$　　C．$\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{6}\right)$　　D．$(1,2)$

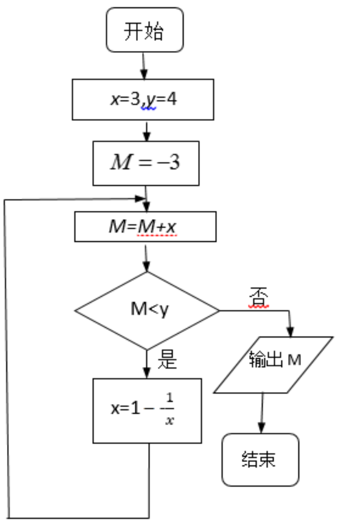
8．已知角α的终边与单位圆$x^2+y^2=1$交于点$P\left(\frac{1}{3},y_0\right)$，则$\cos 2\alpha$等于（　　）

A．$\frac{1}{9}$　　B．$-\frac{7}{9}$　　C．$-\frac{2}{3}$　　D．$\frac{1}{3}$

9．已知函数$f(x)=ax^2-4ax-\ln x$，则$f(x)$在$(1,4)$上不单调的一个充分不必要条件可以是（　　）

A．$a>-\frac{1}{2}$　　B．$0<a<\frac{1}{16}$　　C．$a>\frac{1}{16}$或$-\frac{1}{2}<a<0$　　D．$a>\frac{1}{16}$

10．执行如图所示的程序框图，输出的结果为（　　）

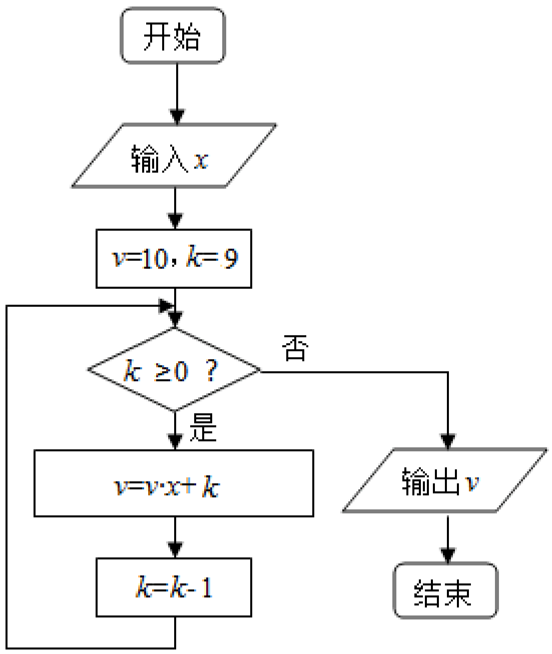


A．$\frac{19}{3}$　　B．4　　C．$\frac{25}{4}$　　D．$\frac{13}{2}$

11．已知三棱锥 ***P*－*ABC*** 的顶点都在球 ***O*** 的球面上，***PA***$=\sqrt{2}$，***PB***$=\sqrt{14}$，***AB***＝4，***CA***＝***CB***$=\sqrt{10}$，面 ***PAB***⊥面 ***ABC***，则球 ***O*** 的表面积为（　　）

A. $\dfrac{10\pi}{3}$　　B. $\dfrac{25\pi}{6}$　　C. $\dfrac{40\pi}{9}$　　D. $\dfrac{50\pi}{3}$

12．秦九韶是我国南宋时期的数学家，普州（现四川省安岳县）人，他在所著的《数书九章》中提出的多项式求值的秦九韶算法，至今仍是比较先进的算法．如图的程序框图给出了利用秦九韶算法求某多项式值的一个实例，若输入 x 的值为 2，则输出的 v 值为(　　)



A. $9\times2^{10}-2$　　B. $9\times2^{10}+2$　　C. $9\times2^{11}+2$　　D. $9\times2^{11}-2$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．若函数 $f(x)=2^{|x-2a|}-4^{|x+a|}$ 在区间 $(-2,+\infty)$ 上有且仅有一个零点，则实数 a 的取值范围有___________.

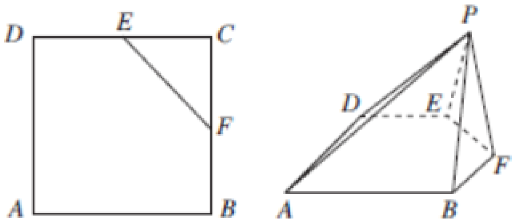
14．若幂函数 $f(x)=x^a$ 的图象经过点 $\left(\sqrt{2},\dfrac{1}{2}\right)$，则其单调递减区间为_______.

15．已知复数 $z=\left(m^2-2\right)+(m-1)i$ 对应的点位于第二象限，则实数 m 的范围为______.

16．在三棱锥 $P-ABC$ 中，$AB\perp BC$，三角形 PAC 为等边三角形，二面角 $P-AC-B$ 的余弦值为 $-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，当三棱锥 $P-ABC$ 的体积最大值为 $\dfrac{1}{3}$ 时，三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的表面积为______.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（12 分）如图，在棱长为 $2\sqrt{2}$ 的正方形 $ABCD$ 中，E，F 分别为 CD，BC 边上的中点，现以 EF 为折痕将点 C 旋转至点 P 的位置，使得 $P-EF-A$ 为直二面角．

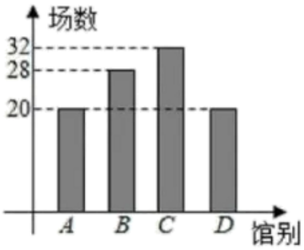


（1）证明：$EF \perp PA$；

（2）求PD与面ABF所成角的正弦值．

18．（12分）为提供市民的健身素质，某市把A,B,C,D四个篮球馆全部转为免费民用

（1）在一次全民健身活动中，四个篮球馆的使用场数如图，用分层抽样的方法从A,B,C,D四场馆的使用场数中依次抽取a_1,a_2,a_3,a_4共**25**场，在a_1,a_2,a_3,a_4中随机取两数，求这两数和ξ的分布列和数学期望；



（2）设四个篮球馆一个月内各馆使用次数之和为x，其相应维修费用为y元，根据统计，得到如下表的数据：

x	**10**	**15**	**20**	**25**	**30**	**35**	**40**
y	**10000**	**11761**	**13010**	**13980**	**14771**	**15440**	**16020**
$z=0.1e^{\frac{y}{4343}}+2$	**2.99**	**3.49**	**4.05**	**4.50**	**4.99**	**5.49**	**5.99**

①用最小二乘法求z与x的回归直线方程；

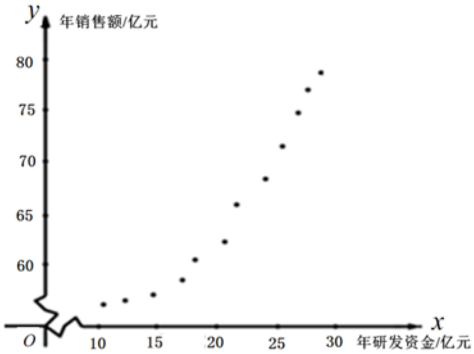
②$\dfrac{y}{x+40}$叫做篮球馆月惠值，根据①的结论，试估计这四个篮球馆月惠值最大时x的值

参考数据和公式：$\overline{z}=4.5,\sum_{i=1}^{7}(x_i-\overline{x})^2=700,\sum_{i=1}^{7}(x_i-\overline{x})(z_i-\overline{z})=70,e^3=20$ $\hat{b}=\dfrac{\sum_{i=1}^{7}(x_i-\overline{x})(z_i-\overline{z})}{\sum_{i=1}^{7}(x_i-\overline{x})^2}$，$\hat{a}=\overline{z}-b\overline{x}$

19．（12分）在极坐标系中，直线l的极坐标方程为$\theta=\dfrac{\pi}{3}(\rho\in R)$，以极点为原点，极轴为$x$轴的正半轴建立平面直角坐标系，曲线$C$的参数方程为$\begin{cases}x=3\cos\alpha,\\y=1+\cos 2\alpha\end{cases}$（$\alpha$为参数），求直线$l$与曲线$C$的交点$P$的直角坐标.

20．（12分）某芯片公司为制定下一年的研发投入计划，需了解年研发资金投入量□（单位：亿元）对年销售额□

（单位：亿元）的影响.该公司对历史数据进行对比分析，建立了两个函数模型:①$□ = □ + □□^2$，②$□ = e^{□□+□}$，其中$□, □, □, □$均为常数，e为自然对数的底数.



现该公司收集了近 12 年的年研发资金投入量$□_□$和年销售额$□_□$的数据，$□ = 1,2,\cdots,12$，并对这些数据作了初步处理，得到了右侧的散点图及一些统计量的值．令$□_□ = □_□^2, □_□ = \ln □_□ (□ = 1,2,\cdots,12)$，经计算得如下数据：

$\bar{□}$	$\bar{□}$	$\sum_{□=1}^{12}(□_□-\bar{□})^2$	$\sum_{□=1}^{12}(□_□-\bar{□})^2$	$\bar{□}$	$\bar{□}$
20	66	770	200	460	4.20

$\sum_{□=1}^{12}(□_□-\bar{□})^2$	$\sum_{□=1}^{12}(□_□-\bar{□})(□_□-\bar{□})$	$\sum_{□=1}^{12}(□_□-\bar{□})^2$
3125000	21500	0.308

（1）设$\{□_□\}$和$\{□_□\}$的相关系数为$□_1$，$\{□_□\}$和$\{□_□\}$的相关系数为$□_2$，请从相关系数的角度，选择一个拟合程度更好的模型；

（2）（i）根据（1）的选择及表中数据，建立$□$关于$□$的回归方程（系数精确到 0.01）；

（ii）若下一年销售额$□$需达到 90 亿元，预测下一年的研发资金投入量$□$是多少亿元？

附：①相关系数$□ = \dfrac{\sum_{□=1}^{□}(□_□-\bar{□})(□_□-\bar{□})}{\sqrt{\sum_{□=1}^{□}(□_□-\bar{□})^2\sum_{□=1}^{□}(□_□-\bar{□})^2}}$，回归直线$\hat{□} = □ + □□$中斜率和截距的最小二乘估计公式分别为：

$□ = \dfrac{\sum_{□=1}^{□}(□_□-\bar{□})(□_□-\bar{□})}{\sum_{□=1}^{□}(□_□-\bar{□})^2}$，$□ = \bar{□} - □\bar{□}$；

② 参考数据：$308 = 4 \times 77$，$\sqrt{90} \approx 9.4868$，$e^{4.4998} \approx 90$.

21．（12 分）已知函数 $f(x)=x-\ln x$，$g(x)=x^2-ax$.

（1）求函数 $f(x)$在区间$[t，t+1](t>0)$上的最小值 $m(t)$；

（2）令 $h(x)=g(x)-f(x)$，$A(x_1，h(x_1))$，$B(x_2，h(x_2))(x_1\neq x_2)$是函数 $h(x)$图像上任意两点，且满足$\dfrac{h(x_1)-h(x_2)}{x_1-x_2}>1$，求实数 a 的取值范围；

（3）若$\exists x\in(0,1]$，使 $f(x)\geq\dfrac{a-g(x)}{x}$成立，求实数 a 的最大值.

22．（10 分）已知函数 $f(x)=|x-2|+|2x+m|$，$(m\in\mathbf{R})$.

（1）若 $m=4$ 时，解不等式 $f(x)\leq 6$；

（2）若关于 x 的不等式 $f(x)\leq|2x-5|$在 $x\in[0,2]$上有解，求实数 m 的取值范围.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．B

【解析】

由题意得,$z=\dfrac{13i}{2+3i}$,求解即可.

【详解】

因为$(2+3i)z=13i$,所以$z=\dfrac{13i}{2+3i}=\dfrac{13i(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}=\dfrac{26i+39}{4+9}=3+2i$.

故选:B.

本题考查复数的四则运算,考查运算求解能力,属于基础题.

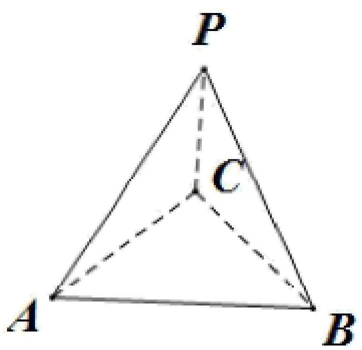
2．B

【解析】

由三视图可知，该三棱锥如图, 其中底面ABC是等腰直角三角形，$PC\perp$平面ABC,结合三视图求出每个面的面积即可.

【详解】

由三视图可知，该三棱锥如图所示：



其中底面ABC是等腰直角三角形，$PC\perp$平面ABC,

由三视图知，$PC=2,AB=2\sqrt{2},$

因为$PC\perp BC,PC\perp AC$, $AC=BC,AC\perp CB$,

所以$AC=BC=2,PA=PB=AB=2\sqrt{2}$,

所以$S_{\Delta PAC}=S_{\Delta PCB}=S_{\Delta ACB}=\dfrac{1}{2}\times2\times2=2$,

因为ΔPAB为等边三角形,

所以$S_{\Delta PAB}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}AB^2=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times\left(2\sqrt{2}\right)^2=2\sqrt{3}$，

所以该三棱锥的四个面中，最大面积为$2\sqrt{3}$.

故选：B

本题考查三视图还原几何体并求其面积; 考查空间想象能力和运算求解能力;三视图正确还原几何体是求解本题的关键;属于中档题、常考题型.

3．A

【解析】

根据题意可得$AC\perp BC$,即知C在以AB为直径的圆上.

【详解】

$\because PB\perp\alpha, AC\subset\alpha$，

$\therefore PB\perp AC$,

又$PC\perp AC$， $PB\cap PC=P$,

$\therefore AC\perp$平面PBC,又$BC\subset$平面PBC

$\therefore AC\perp BC$,

故C在以AB为直径的圆上，

又C是α内异于A,B的动点，

所以C的轨迹是圆，但要去掉两个点A,B

故选：A

本题主要考查了线面垂直、线线垂直的判定，圆的性质，轨迹问题，属于中档题.

4．B

【解析】

根据两个函数相等，求出所有交点的横坐标，然后求和即可.

【详解】

令$\sin x=\cos 2x$，有$\sin x=1-2\sin^2 x$，所以$\sin x=-1$或$\sin x=\dfrac{1}{2}$.又$x\in\left[-\pi,2\pi\right]$，所以$x=-\dfrac{\pi}{2}$或$x=\dfrac{3\pi}{2}$或$x=\dfrac{\pi}{6}$或$x=\dfrac{5\pi}{6}$，所以函数$f\left(x\right)=\cos 2x\left(x\in\left[-\pi,2\pi\right]\right)$的图象与函数$g\left(x\right)=\sin x$的图象交点的横坐标的和$s=-\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{3\pi}{2}+\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{5\pi}{6}=2\pi$，故选 B.

本题主要考查三角函数的图象及给值求角，侧重考查数学建模和数学运算的核心素养.

5．C

【解析】

试题分析：设 AC、BD 的交点为 O，连接 EO，则 $\angle AEO$ 为 AE,SD 所成的角或其补角；设正四棱锥的棱长为 a，

则 $AE=\frac{\sqrt{3}}{2}a, EO=\frac{1}{2}a, OA=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，所以 $\cos\angle AEO=\frac{AE^2+OA^2-EO^2}{2AE\cdot OA}$

$=\frac{(\frac{\sqrt{3}}{2}a)^2+(\frac{1}{2}a)^2-(\frac{\sqrt{2}}{2}a)^2}{2\times(\frac{\sqrt{3}}{2}a)\cdot(\frac{1}{2}a)}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，故 C 为正确答案.

考点：异面直线所成的角.

6．B

【解析】

过点 $A(0,-1)$ 的直线 l 与圆 C：$x^2+y^2-2y=0$ 相切于点 B，可得 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$.因此

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}^2=\overrightarrow{AC}^2-r^2$，即可得出.

【详解】

由圆 C：$x^2+y^2-2y=0$ 配方为 $x^2+(y-1)^2=1$，

$C(0,1)$，半径 $r=1$.

∵过点 $A(0,-1)$ 的直线 l 与圆 C：$x^2+y^2-2y=0$ 相切于点 B，

∴ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$；

∴ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}^2=\overrightarrow{AC}^2-r^2=3$；

故选：B.

本小题主要考查向量数量积的计算，考查圆的方程，属于基础题.

7．B

【解析】

先辨别出图象中实线部分为函数 $y=f(x)$ 的图象，虚线部分为其导函数的图象，求出函数 $y=\frac{f(x)}{e^x}$ 的导数为

$y'=\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}$，由 $y'<0$，得出 $f'(x)<f(x)$，只需在图中找出满足不等式 $f'(x)<f(x)$ 对应的 x 的取值范围即可.

【详解】

若虚线部分为函数 $y=f\left(x\right)$ 的图象，则该函数只有一个极值点，但其导函数图象（实线）与 x 轴有三个交点，不合乎题意；

若实线部分为函数 $y=f\left(x\right)$ 的图象，则该函数有两个极值点，则其导函数图象（虚线）与 x 轴恰好也只有两个交点，合乎题意.

对函数 $y=\dfrac{f\left(x\right)}{e^x}$ 求导得 $y'=\dfrac{f'\left(x\right)-f\left(x\right)}{e^x}$，由 $y'<0$ 得 $f'\left(x\right)<f\left(x\right)$，

由图象可知，满足不等式 $f'\left(x\right)<f\left(x\right)$ 的 x 的取值范围是 $\left(-\dfrac{1}{2},1\right)$，

因此，函数 $y=\dfrac{f\left(x\right)}{e^x}$ 的单调递减区间为 $\left(-\dfrac{1}{2},1\right)$.

故选：B.

本题考查利用图象求函数的单调区间，同时也考查了利用图象辨别函数与其导函数的图象，考查推理能力，属于中等题.

8．B

【解析】

先由三角函数的定义求出 $\sin\alpha$，再由二倍角公式可求 $\cos 2\alpha$.

【详解】

解：角 α 的终边与单位圆 $x^2+y^2=1$ 交于点 $P\left(\dfrac{1}{3},y_0\right)$

$\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$，

$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^2-1=-\dfrac{7}{9}$，

故选：B

考查三角函数的定义和二倍角公式，是基础题.

9．D

【解析】

先求函数在 $(1,4)$ 上不单调的充要条件，即 $f'(x)=0$ 在 $(1,4)$ 上有解，即可得出结论.

【详解】

$f'(x)=2ax-4a-\dfrac{1}{x}=\dfrac{2ax^2-4ax-1}{x}$，