目 录

第一章 三大类压轴题的基本处理策略

第一讲: 分类讨论和分离参数解零点问题 ..1

第二讲: 恒成立的证明方法. .2

一、一分为二. .2

二、合二为一 .2

第三讲: 参数范围的求解方法 .3

第四讲: 倒数分参与分类讨论. .5

第二章 题型篇

第一讲: 导数压轴小题全归纳. .6

第二讲: 公切线问题. .16

第三讲: 利用切线求距离. .17

第四讲: 极值点偏移. . 18

第五讲: 最值函数的零点问题. .20

第六讲: 韦达定理与代换. .21

第七讲: 任意存在类问题 .23

第八讲: 数列放缩与导数 .25

第九讲: 零点差问题. .26

第十讲: 双参数问题与固定变量法 .28

第十一讲：必要探路法与整数解问题. .29

第三章 方法篇

第一讲: 虚设零点. .30

第二讲: 必要探路法. .31

第三讲: 放缩法. .32
第四讲: 指数化与切线放缩. .32
第五讲：结合函数性质简化讨论 .33
第六讲: 虚设零点与放缩法 .34
第四章 函数篇
第一讲: 对数单身狗 (清君侧) .36
第二讲: 指数找朋友 .36
第三讲: 含三角函数的导数处理策略 .38
第四讲: 含绝对值的函数处理策略. .40
第五章 技巧篇
第一讲: 局部隔离与自变量分类讨论. .47
第二讲: 导函数隔离与分参构造 .48
第三讲: 构造换元再证明. .48
第四讲: 连锁反应. .50

第六章 大招篇

第一讲：求参数的取值范围——端点效应 .51
第二讲：求参数的取值范围——洛必达法则 .52
第三讲: 变换主元. 53
第四讲: 同构解题法. 54
第五讲: 如何取点一内点效应 .55
第七章 思想篇
第一讲: 什么时候再求导? .61
第二讲: 如何进行导函数的分类讨论? .63
第三讲: 对导函数的分析意识 .67
第四讲: 二次求导后的何去何从? .69

第五讲: 穷途末路的导函数如何是好? .71

第六讲: 参根处理的常用方法. .74

附录一: 导数基础知识 .80

附录二: 小题构造表 .81

附录三: 大题构造表 .82

附录四: 函数同构表 .83

附录五: 函数放缩表 .84

第一章 三大类压轴题的基本处理策略

第一讲: 分类讨论和分离参数解零点问题

对于零点问题, 我们一般会采用分类讨论或者分离参数两种方法, 分类讨论是常见的手段, 然 而取点是个难点, 对于分离参数, 值得注意的是倒数分参的重要性!

【经典例题】 $f(x)=e^x-ax^2, a\in R, x>0$,若该函数有两个不同零点,求 a 的取值范围.

解法一 (分离参数): 显然当 $a=0$ 时,没有实数根,故而 $\frac{1}{a}=\frac{x^2}{e^x}$

【我们将这种方法叫做倒数分参或分母跨 0 的解决办法,如果写作 $a=\frac{e^x}{x^2}$,显然分母为 0 】 令 $g(x)=\frac{x^2}{e^x},\left(x\in(0,+\infty)\right), g'(x)=\frac{x(2-x)}{e^x}$ 。由题意可得 $g(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递增,在 $(2,+\infty)$ 上单调递减,所以 $g(x)_{\max}=g(2)=\frac{4}{e^2}$ 。当 $\frac{1}{a}=\frac{4}{e^2}$ 时有且仅有一个零点; 当 $\frac{1}{a}>\frac{4}{e^2}$ 时没有零点, 当 $\frac{1}{a}<\frac{4}{e^2}$ 时有两个零点。综上, $a\in\left(\frac{e^2}{4},+\infty\right)$

解法二 (分类讨论): $f(x)=e^x\left(1-\frac{ax^2}{e^x}\right)$ 【局部隔离+指数找朋友】,令 $h(x)=1-\frac{ax^2}{e^x}$

当 $a\le 0$ 时,显然没有零点,当 $a>0$ 时, $h'(x)=\frac{ax(x-2)}{e^x}$

$h(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递减,在 $(2,+\infty)$ 上单调递增,所以 $h(x)_{\min}=h(2)=1-\frac{4a}{e^2}$

当 $h(2)>0$ 即 $a<\frac{e^2}{4}$ 时,该函数没有零点; 当 $h(2)=0$ 即 $a=\frac{e^2}{4}$ 时,该函数仅有一个零点

当 $h(2)<0$ 即 $a>\frac{e^2}{4}$ 时,该函数有两个零点

【按理说这道题但这里也就结束了,但是我们需要验证其是否真的两个零点,接下来是取点】 由 $h(0)=1>0, h(2)<0$ 可得在 $(0,2)$ 上存在一个零点

由 $e^x \geq x+1 \Rightarrow e^x>x$ 即 $e^{\frac{x}{3}}>\frac{x}{3}$,所以 $e^x>\frac{x^3}{27}$ 即 $\frac{x^3}{27e^x}<1$,令 $x=27a$

则 $\frac{(27a)^3}{27e^{27a}}=\frac{27^2a^3}{e^{27a}}<1$,所以 $h(27a)=1-\frac{27^2a^3}{e^{27a}}>0$,故该函数在 $(2,27a)$ 上有一个零点 因此,该函数要想有两个零点,则 $a>\frac{e^2}{4}$

第二讲: 恒成立的证明方法

一、一分为二

【例】 $f(x)=ax^2-(2a+1)x+\ln x, a\in R, g(x)=e^x-x-1$,对任意 $x_1\in(0,+\infty), x_2\in R$,__不等式 $f(x_1)\leq g(x_2)$ 恒成立,求实数 a 的取值范围

解: $\because f(x_1)\leq g(x_2)$ 恒成立 $\therefore$ 只需 $f(x_1)\leq g(x)_{\min}$

由 $g(x)=e^x-x-1$ 得: $g'(x)=e^x-1$,令 $g'(x)>0$ 解得: $x>0$

$\ldots g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 单调递减,在 $(0,+\infty)$ 单调递增 $\therefore g(x)_{\min}=g(0)=0$

$\therefore \forall x_1\in(0,+\infty), ax_1^2-(2a+1)x_1+\ln x_1\leq 0$ 恒成立,即只需 $f(x)_{\max}\leq 0$

$$f'(x)=2ax-2a-1+\frac{1}{x}=\frac{2ax^2-(2a+1)x+1}{x}=\frac{(2ax-1)(x-1)}{x}$$

当 $a>0$ 时,令 $x=\frac{2a+1}{a}, f\left(\frac{2a+1}{a}\right)=\ln\left(\frac{2a+1}{a}\right)=\ln\left(2+\frac{1}{a}\right)>0$,与 $f(x)\leq 0$ 矛盾

当 $a\leq 0$ 时, $2ax-1<0$ $\therefore f'(x)>0$ 解得 $x<1$ $\therefore f(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递增,在 $(1,+\infty)$ 递减

$\therefore f(x)_{\max}=f(1)=a-(2a+1)=-a-1$ $\therefore -a-1\leq 0\Rightarrow a\geq -1$ 。综上所述: $a\in[-1,0]$

二、合二为一

【例】若对任意 $x\geq -2, 2ke^x(x+1)\geq x^2+4x+2$ 恒成立,求 k 的取值范围.

解: $F(x)=2ke^x(x+1)-x^2-4x-2$,由 $F(0)=2k-2\geq 0$ 得 $k\geq 1$ 【必要探路】

$$F'(x)=2ke^x(x+1)+2ke^x-2x-4=2(x+2)(ke^x-1)$$

$F(x)$ 在 $\left(-\infty,\ln\frac{1}{k}\right)$ 上单调递减,在 $\left(\ln\frac{1}{k},+\infty\right)$ 上单调递增

当 $\ln\frac{1}{k}<-2$ 即 $k>e^2$ 时该函数单调递增, $F(x)_{\min}=F(-2)=\frac{2}{e^2}(e^2-k)<0$,故不成立

当 $\ln\frac{1}{k}=-2$ 即 $k=e^2$ 时,可得 $F(x)_{\min}=F(-2)=\frac{2}{e^2}(e^2-k)=0$,显然成立

当 $\ln\frac{1}{k}>-2$ 即 $1\le k\le e^2$ 时, $F(x)$ 在 $\left(-2,\ln\frac{1}{k}\right)$ 上单调递减,在 $\left(\ln\frac{1}{k},+\infty\right)$ 上单调递增

所以 $F(x)_{\min}=F\left(\ln\frac{1}{k}\right)=\ln k(2-\ln k)>0$,故成立。综上, $1\le k\le e^2$

第三讲: 参数范围的求解方法

【例】（2019 年全国 I 卷文数） $f(x)=2\sin x-x\cos x-x,x\in[0,\pi],f(x)\ge ax$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

当我们遇到一道导数题时, 最常用的两种思路是: ①分离参数+洛必达法则

②分类讨论

法一 (分离参数+洛必达法则)

当 $x=0$ 时, $a\in R$

当 $x\in(0,\pi]$ 时,由 $f(x)\ge ax$ 得 $a\le\frac{2\sin x}{x}-\cos x-1$,令 $g(x)=\frac{2\sin x}{x}-\cos x-1$

$g'(x)=\frac{x^2\sin x-2\sin x+2x\cos x}{x^2}$,令 $h(x)=x^2\sin x-2\sin x+2x\cos x,h'(x)=x^2\cos x$

$h(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 单调递增,在 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 单调递减,又 $h(0)=0,h(\pi)<0$

故存在 $x_0\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 使得 $h(x_0)=0,g(x)$ 在 $(0,x_0)$ 单调递增,在 (x_0,π) 单调递减

$\lim_{x\to 0}g(x)=2-1-1=0,g(\pi)=0$,故 $g(x)_{\min}=g(\pi)=0$,所以 $a\in(-\infty,0]$

法二 (分类讨论)

解: 令 $g(x)=2\sin x-x\cos x-x-ax,g'(x)=\cos x+x\sin x-1-a,g''(x)=x\cos x$

易知 $g'(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 单调递增,在 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 单调递减, $g'(0)=-a,g'(\pi)=-2-a$

当 $g'(\pi)=-2-a\ge 0$ 即 $a\le-2$ 时,原函数单调递增, $g(0)=0$,故恒成立

当 $g'(0)=-a\ge 0,g'(\pi)=-2-a<0$ 即 $a\in(-2,0]$ 时

存在 x_0 使得 $g(x)$ 在 $(0,x_0]$ 单调递增,在 $(x_0,\pi]$ 单调递减。由 $g(0)\geq 0,g(\pi)\geq 0$ 得 $a\leq 0$

这是传统的几种方法, 但是如果当传统方法遇到障碍之后, 我们应该怎么办?

接下来我们需要介绍三种神来之笔的解题思路:

法三 (放缩法):

一般而言我们是顺向放缩, 或者双向放缩

如这道题 (这道题的放缩方向不对哟): $2x-x\cos x-x\geq 2\sin x-x\cos x-x\geq ax$

可得 $1-\cos x\geq a$ 易知 $a\leq 0$,尽管这道题答案对,但逻辑过程不对。在此列举一道正确的:

$a\geq 1,x\geq 0$, $\cos x\geq 1-\frac{1}{2}x^2$,证明: $xe^{ax}+x\cos x+1\geq(1+\sin x)^2$ 恒成立.

这道题非常精彩, 包括了放缩需要掌握的: 参数放缩、恒等式放缩、双向放缩、利用已知 不等式放缩.

由题意可得: $xe^x+x\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)+1\geq(1+x)^2$,即 $e^x-\left(\frac{1}{2}x^2+x+1\right)\geq 0,x\geq 0$

其实这个不等式已经是恒成立的, 也是一个常用的放缩式, 2010 年全国卷考察过

如果不知道这个式子的话我们可以进行求导分析即可证其恒成立.

法四 (解题利器一端点效应):

$g(x)=2\sin x-x\cos x-x-ax$,由 $g(0)=0$ 得 $g'(0)\geq 0$ 得 $a\leq 0$,下证 $a>0$ 不成立即可

法五 (难题必备一必要探路):

在这里简单说一下, 抛砖引玉=先猜后证=必要探路

由 $f(\pi)\geq a\pi,f(\pi)=0$ 得 $a\leq 0,f'(x)=\cos x+x\sin x-1,f''(x)=x\cos x$

$f'(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 单调递增,在 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 单调递减,又 $f'(0)=0,f'\left(\frac{\pi}{2}\right)>0,f'(\pi)=-2$

设 $f'(x_0)=0$,则 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 单调递增,在 (x_0,π) 单调递减

又 $f(0)=0,f(\pi)=0$ 。当 $x\in[0,\pi]$ 时, $f(x)\geq 0$

又当 $a\leq 0,x\in[0,\pi]$ 时, $f(x)\geq ax$,故 $a\in(-\infty,0]$

第四讲: 倒数分参与分类讨论

【例】（2020 届全国 “百万联考” 高三第五次考试）设函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的单调函数, 且 $\forall x \in R, f(f(x)-e^x)=e+1$,若函数 $g(x)=f(x)-k(x+2)$ 有两个零点,求实数 k 的取值范 围.

由换元法可设 $f(x)-e^x=t \Leftrightarrow f(x)=e^x+t$,又 $f(t)=e^t+t=e+1$

从而可得 $t=1$,故 $f(x)=e^x+1$,所以 $g(x)=e^x+1-k(x+2)$

解法一 (倒数分参): 显然 $k=0$ 时不存在零点

由导数分参可以构造: $\frac{1}{k}=\frac{x+2}{e^x+1}$,求导可得 $k>1$

解法二 (分类讨论): $g'(x)=e^x-k$,当 $k \leq 0$ 时,函数单调递增,显然不存在两个零点

当 $k>0$ 时,可得 $g(\ln k)=1-k\ln k-k<0$ 时满足两个零点

利用对数单身狗可得 $\frac{1}{k}-\ln k-1<0$,由函数递减且 $k=1$ 时为 0 可得 $k>1$

第二章 题型篇

第一讲: 导数压轴小题全归纳

一、切线类问题

(一) 公切线问题

1. (公切线公切点)

若 $f(x)$、$g(x)$ 的公切点为 (x_0, y_0) ,则有 $f(x_0)=g(x_0), f'(x_0)=g'(x_0)$

【例】设 $f(x)=\frac{3}{2}x^2-2ax(a>0)$ 的图像与 $g(x)=a^2\ln x+b$ 的图像有公共点,且在公共点处 的切线方程相同,求 b 的最大值.

. 解: $f'(x)=3x-2a, g'(x)=\frac{a^2}{x}$,由题意可得 $f'(x)=g'(x) \Leftrightarrow 3x-2a=\frac{a^2}{x}$

故 $3x^2-2ax-a^2=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上有解,又 $a>0$,故而 $x=a$ 即切点横坐标为 a

所以 $a^2\ln a+b=-\frac{a^2}{2}$,所以 $b=-a^2\ln a-\frac{a^2}{2}(a>0), b'=-2a(\ln a+1)$,由 $b'=0$ 得 $a=\frac{1}{e}$

所以 $0<a<\frac{1}{e}$ 时, $b'>0$ 单调递增, $a>\frac{1}{e}$ 时 $b'<0$ 单调递减

所以当 $a=\frac{1}{e}$ 时, b 取得最大值且最大值为 $\frac{1}{2e^2}$

2. (公切线双切点)

两切线重合法: 分别求出两个曲线的切线, 利用两条直线重合的知识令其相等解出即可 (常用)

$$y=k_1x+b_1, y=k_2x+b_2 \Leftrightarrow k_1=k_2, b_1=b_2$$

【例】(2016 年全国 II 理数 16) 若直线 $y=kx+b$ 是曲线 $y=\ln x+2$ 的切线,也是曲线 $y=\ln(x+1)$ 的切线,求 b

解: 设 $y=kx+b$ 与 $y=\ln x+2$ 和 $y=\ln(x+1)$ 的切点分别是 $(x_1,\ln x_1+2)\left(x_2,\ln(x_2+1)\right)$

则切线分别是 $y=\frac{1}{x_1}(x-x_1)+\ln x_1+2, y=\frac{1}{x_2+1}(x-x_2)+\ln(x_2+1)$

由 $\frac{1}{x_1}=\frac{1}{x_2+1}, \ln x_1+1=-\frac{x_2}{x_2+1}+\ln(x_2+1)$ 得 $x_1=\frac{1}{2}, b=\ln x_1+1=1-\ln 2$

(二) 利用切线求距离

【例 1】 a,b 满足 $\ln(b+1)+a-3b=0$,实数 c,d 满足 $2d-c+\sqrt{5}=0$,求 $(a-c)^2+(b-d)^2$ 得最小值.

解: 由题意得 $(a-c)^2+(b-d)^2$ 表示 $2d-c+\sqrt{5}=0$ 上一点到曲线 $\ln(b+1)+a-3b=0$ 最短距离 的平方,设出切点,令其与直线 $2d-c+\sqrt{5}=0$ 平行,从而获得切线,利用两平行线间距离公式 求解即可. 可得最小值为 1 .

【例 2】对于任意 $b>0, a\in R$,不等式 $[b-(a-2)]^2+[\ln b-(a-1)]^2\geq m^2-m$ 恒成立,求 m 的最大值.

解: 由题意可得最大值为 2

二、单调性问题

(一) 利用单调性

【例】若函数 $f(x)=e^x(\sin x+a\cos x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增,求 a 的取值范围.

解: 当我们利用单调性求解时, 导数与 0 的关系是不带等号的。

当我们已知单调性或给定需要限制的单调性情况，那么此时导数与 0 的关系时带等号的。

故本题由 $f'(x) \ge 0$ 可得 $a \in (-\infty, 1]$

(二) 构造单调性

【例】 $f(x) = e^x + m\ln x$,若对于任意的整数 x_1, x_2 ,当 $x_1 > x_2$ 时,有 $f(x_1) - f(x_2) > x_1 - x_2$ 成立,求 m 的取值范围.

解: 构造 $f(x_1) - x_1 > f(x_2) - x_2$,证明 $g(x) = f(x) - x$ 单调递增即可, $m \in [0, +\infty)$

三、整数解问题

一般在导数压轴小题中, 我们处理整数解问题往往有两个方法, 一为必要探路, 即限制出来的 整数解问题; 二为虚设零点, 即利用隐零点进行过渡、代换获得参数的取值范围. (一) 必要探路

【例 1】设函数 $f(x) = e^x(2x - 1) - ax + a, a < 1$,若存在唯一的整数 x_0 使得 $f(x_0) < 0$,求 a 的 取值范围.

解: 由 $f(1) = e > 0$,可以限制 $f(0) < 0, f(-1) \ge 0$,从而得到 $a \in \left[\frac{3}{2e}, 1\right)$

【例 2】设函数 $f(x) = xe^x - mx + m$,若 $f(x) < 0$ 的解集为 (a, b) ,其中 $b < 0$,不等式在 (a, b) 中有且只有一个整数解,求 m 的取值范围.

解: 由 $f(-1) < 0, f(-2) \ge 0$ 可得 $m \in \left[\frac{2}{3e^2}, \frac{1}{2e}\right)$

【例 3】(2021 届炎德英才大联考) $f(x) = (x - 1)e^x - \frac{a}{2}x^2$,对于任意 $x_1 \in R, x_2 \in (0, +\infty)$,

$f(x_1 + x_2) - f(x_1 - x_2) > -2x_2$ 恒成立,求整数 a 的最大值.

解: 构造 $f(x_1 + x_2) + x_1 + x_2 > f(x_1 - x_2) + x_1 - x_2$ 可得函数 $g(x) = f(x) + x$ 单调递增

从而 $g'(x) = xe^x - ax + 1 \ge 0$,运用必要探路法可得 $g'(1) = e + 1 - a \ge 0$,所以 a 最大为 3

(二) 虚设零点

【例 1】设函数 $f(x)=x+x\ln x$,若 $k\in Z$,并且 $k(x-1)<f(x)$ 对任意的 $x>1$ 恒成立,求 k 的最大值.

解: 由分离参数可得 $g(x)=\frac{f(x)}{x-1}>k$,求导后通过隐零点代换掉 $\ln x$ 即可获得 k 最大为 3

【例 2】(2020 年天一 "顶尖计划" 第二次联考) $f(x)=x\ln x+\frac{x^2}{2}-a(x-1), a\in Z$,若不

等式 $f(x)>0$ 恒成立,求实数 a 的最大值. $\left(e^{\frac{1}{2}}\approx 1.6\right)$

解法一 (必要探路+对数单身狗): 由 $f\left(e^{\frac{1}{2}}\right)>0$ 得 $a\leq 3$

由 $x\ln x+\frac{x^2}{2}-3(x-1)>0$ 得 $\ln x+\frac{x}{2}-3\left(1-\frac{1}{x}\right)>0$,求导可得恒成立.

解法二 (必要探路+虚设零点): 由 $f\left(e^{\frac{1}{2}}\right)>0$ 得 $a\leq 3$

直接求导可得 $\ln x_0=2-x_0, x_0\in(1,1.6)$,从而易证恒成立.

四、三类对称问题

(一) 导数问题: 二阶导求对称

已知可导函数 $f(x), f''(x_0)=0$,则 $(x_0, f(x_0))$ 为函数的对称性

【例】 $f(x)=x^3-9x^2+29x-30, f(m)=-12, f(n)=18$,则 $m+n=$

解: 二阶导知对称点为 $(3,3)$,由 $f(m)+f(n)=6$ 得 m、n 关于 $(3,3)$ 对称, $m+n=6$

【同源练习】

已知函数 $f(x)=x^3-3x^2+7x$ 的图像过 $A(a,b), B(c,d)$,若 $b+d=10$,求 $a+c$

解: 由三次函数的对称点可知其对称点为 $(1,5)$,故 $a+c=2$

【例 2】 $g(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{5}{12}+\cos\left(x-\frac{\pi+1}{2}\right)$,求 $g\left(\frac{1}{2016}\right)+g\left(\frac{2}{2016}\right)+\cdots+g\left(\frac{2015}{2016}\right)$

的值

解: $g''(x)=2x-1-\cos\left(x-\frac{\pi+1}{2}\right)$,可得对称点为 $\left(\frac{1}{2},1\right)$

故 $g\left(\frac{1}{2016}\right)+g\left(\frac{2}{2016}\right)+\cdots+g\left(\frac{2015}{2016}\right)=2015$

【例 3】(2019 年武汉二调第 12 题) (三次函数对称点、点差法、一元二次方程) 已知直线 l 与 曲线 $y=x^3-6x^2+13x-9$ 相交,交点依次为 A、B、C ,且 $|AB|=|BC|=\sqrt{5}$,求直线 l 的方程.

法一: 易知该函数的导函数对称轴为 $x=2$

即原函数对称中心的横坐标, 将其带入原函数

可得原函数的对称中心为 $(2,1)$,由 $|AB|=|BC|$ 得直线 l 经过 $(2,1)$

联立方程组: $y=x^3-6x^2+13x-9, (x-2)^2+(y-1)^2=5$

可得 $(1,-1),(3,3)$,易知直线方程为 $y=2x-3$

法二: $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$

由三次函数拐点可得 $B(2,1), x_1+x_2=4, y_1+y_2=2$

$y_1=x_1^3-6x_1^2+13x_1-9$, ①, $y_2=x_2^3-6x_2^2+13x_2-9$,②

两者作差可得 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=x_1^2+x_2^2+x_1x_2-11=x_1^2+(4-x_1)^2+x_1(4-x_1)-11$

令 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=t, x_1=x<2$,可得 $t=x^2-4x+1$,解得 $x_1=2-\sqrt{t-1}, x_2=2+\sqrt{t-1}$ (舍)

又 $(x_1-2)^2+(y_1-1)^2=5$,解得 $y_1=1-\sqrt{6-t}, y_2=1+\sqrt{6-t}$ (舍)

又直线方程可设为 $y-1=t(x-2)$,故将 (x_1,y_1) 代入可得 $6-t=t^2(t-1)$ 易知 $t=2$,直线方程为 $y=2x-3$

(二) 函数问题: 奇函数与对称

【例 1】(2012 年全国卷文数 16) $f(x)=\frac{(x+1)^2+\sin x}{x^2+1}$ 最大值为 M ,最小值为 m ,则 $M+m=$___

解: $f(x)=1+\frac{2x+\sin x}{x^2+1}$,设 $g(x)=f(x)-1=\frac{2x+\sin x}{x^2+1}$,则 $g(x)$ 是奇函数,

$\because f(x)$ 最大值为 M ,最小值为 m， $\therefore g(x)$ 的最大值为 $\mathrm{m}-1$,最小值为 $m-1$,

$\therefore M-1+m-1=0$, $M+m=2$.

【例 2】(2018 年全国卷 III 文数 16) 已知函数 $f(x)=\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)+1, f(a)=4$,则 $f(-a)=$___。

解: 由 $f(a)=\ln\left(\sqrt{1+a^2}-a\right)+1=4$,得 $\ln\left(\sqrt{1+a^2}-a\right)=3$,所以

$$f(-a)=\ln\left(\sqrt{1+a^2}+a\right)+1$$
$$=-\ln\left(\frac{1}{\sqrt{1+a^2}+a}\right)+1=-\ln\left(\sqrt{1+a^2}-a\right)+1=-3+1=-2$$

(三) 函数问题: 纯对称问题

若 $f(x+a)=f(a-x)$,则 $f(x)$ 关于 $x=a$ 对称

若 $f(x+a)=-f(a-x)$,则 $f(x)$ 关于 $(a,0)$ 对称

若 $f(x+a)=f(x-a)$,则 $f(x)$ 的周期为 $2|a|$

函数外符号相同为轴对称, 相异为点对称, 函数内符号相同为周期性, 符号相异为对称性, 函 数括号内相加除以 2 即可.

【例 1】(轴对称) 已知函数 $f(x)(x\in \mathrm{R})$ 满足 $f(x)=f(2-x)$,若函数 $y=\left|x^2-2x-3\right|$ 与 $y=f(x)$ 图像的交点为 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_m,y_m)$,则 $\sum_{i=1}^{m}x_i=$

(A) 0 (B) m (C) $2m$ (D) $4m$

解: 由 $f(x)=f(2-x)$ 知 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=1$ 对称,又函数

$y=\left|x^2-2x-3\right|=\left|(x-1)^2-4\right|$ 的图像也关于直线 $x=1$ 对称,所以这两个函数图像的交点也关于 直线 $x=1$ 对称,不妨设 $x_1<x_2<\cdots<x_m$,则 $\frac{x_1+x_m}{2}=1$,即 $x_1+x_m=2$,同理 $x_2+x_{m-1}=2,\cdots\cdots$, 由 $\sum_{i=1}^{m}x_i=x_1+x_2+\cdots+x_m$,所以 $2\sum_{i=1}^{m}x_i=(x_1+x_m)+(x_2+x_{m-1})+\cdots+(x_m+x_1)=2m$,所以 $\sum_{i=1}^{m}x_i=m$,故选 B.

【例 2】(线对称) 已知函数 $f(x)(x\in \mathbf{R})$ 满足 $f(-x)=2-f(x)$,若函数 $y=\frac{x+1}{x}$ 与 $y=f(x)$ 图 像的交点为 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_m,y_m)$,则 $\sum_{i=1}^{m}(x_i+y_i)=$

(A) 0 (B) m (C) $2m$ (D) $4m$

解: 由 $f(-x)=2-f(x)$ 得 $f(-x)+f(x)=2$,可知 $f(x)$ 关于 $(0,1)$ 对称,

而 $y=\frac{x+1}{x}=1+\frac{1}{x}$ 也关于 $(0,1)$ 对称, $\therefore$ 对于每一组对称点 $x_i+x_i{}'=0$ $y_i+y_i{}'=2$,

$\therefore \sum_{i=1}^{m}(x_i+y_i)=\sum_{i=1}^{m}x_i+\sum_{i=1}^{m}y_i=0+2\cdot\frac{m}{2}=m$,故选 B.

五、导函数与原函数的构造

序号	导函数	原函数
① 5	$xf'(x)+f(x)>0$ $xf(x)+nf(x)>0$	$F(x)=xf(x)$ $F(x)=x^nf(x)$
	$xf'(x)-f(x)>0$	$F(x)=\frac{f(x)}{x}(x\neq 0)$

序号	导函数	原函数
	$xf'(x)-nf(x)>0$	$F(x)=\frac{f(x)}{x^n}(x\neq 0)$
②	$f'(x)+f(x)>0$ $f'(x)+nf(x)>0$	$F(x)=e^xf(x)$ $F(x)=e^{nx}f(x)$
	$f'(x)-f(x)>0$	$F(x)=\frac{f(x)}{e^x}$
	$f'(x)-\overline{nf(x)}>0$	$F(x)=\frac{f(x)}{e^{nx}}$
	$F'(x)=f'(x)\sin x+f(x)\cos x$ $F'(x)=f(x)+f'(x)\tan x$	$F(x)=f(x)\sin x$
	$F'(x)=\frac{f'(x)\sin x-f(x)\cos x}{\sin^2 x}$	$F(x)=\frac{f(x)}{\sin x}$
③	$F'(x)=f(x)-f'(x)\tan x$	
	$F'(x)=f'(x)\cos x-f(x)\sin x$ $F'(x)=f'(x)-f(x)\tan x$	$F(x)=f(x)\cos x$
	$F'(x)=\frac{f'(x)\cos x+f(x)\sin x}{\cos^2 x}$ $F'(x)=f'(x)+f(x)\tan x$	$F(x)=\frac{f(x)}{\cos x}$
电简单类	$f'(x)\pm g'(x)>0$ $f'(x)\pm k>0$ $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)>0$ $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)>0$	$F(x)=f(x)\pm g(x)\pm k$ $F(x)=f(x)\pm kx$ $F(x)=f(x)g(x)$ $F(x)=\frac{f(x)}{g(x)}(g(x)\neq 0)$

(一) 第一组

【例 1】定义在 $(0,+\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 满足 $xf'(x)+f(x)=\frac{\ln x}{x}$, $f(e)=\frac{1}{e}$,则 不等式 $f(x)+e>x+\frac{1}{e}$ 的解集是 ( )

解: 令 $g(x)=xf(x)$,则 $f(x)=\frac{g(x)}{x}$, $g'(x)=\frac{\ln x}{x}$, $\therefore f'(x)=\frac{x\cdot g'(x)-g(x)}{x^2}=\frac{\ln x-g(x)}{x^2}$

令 $h(x)=\ln x-g(x)$, $h'(x)=\frac{1}{x}-g'(x)=\frac{1-\ln x}{x}$

$h(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增,在 $(e,+\infty)$ 上单调递减,所以 $h(x)\leq h(e)=0$,故 $f'(x)\leq 0$

令 $\varphi(x)=f(x)-x$,则 $\varphi'(x)\leq -1<0$,故该函数单调递减

又 $f(x)+e>x+\frac{1}{e}$ 即 $\varphi(x)>\varphi(e)$,所以 $0<x<e$

【例 2】(石家庄二模理数) 设 $f'(x)$ 是奇函数 $f(x)$ 的导函数, $f(-2)=0$,当 $x>0$ 时, $xf'(x)-f(x)>0$,则 $f(x)>0$ 成立的 x 的取值范围是?

解: 令 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$, $g'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$,所以当 $x>0$ 时 $g'(x)>0$

即 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,因为 $f(x)$ 为奇函数, $f(-2)=0$

所以 $f(2)=0$,所以 $g(2)=\frac{f(2)}{2}=0$

结合奇函数 $f(x)$ 的图像知 $f(x)>0$ 的解集为 $(-2,0)\cup(2,+\infty)$

【例 3】定义在 R 上的偶函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$,对任意的实数 x 都有 $2f(x)+xf'(x)<2$ 恒成立,求 $x^2f(x)-f(1)<x^2-1$ 恒成立时 x 的取值范围.

解: 由 $x^2f(x)-f(1)<x^2-1$ 可得 $x^2f(x)-x^2<f(1)-1$

令 $F(x)=x^2f(x)-x^2$,则 $F(x)$ 为偶函数

因为 $F'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)-2x=x\left[2f(x)+xf'(x)-2\right]$

且对任意的实数 x ,都有 $2f(x)+xf'(x)<2$ 恒成立

所以当 $x<0$ 时, $F'(x)>0$, $F(x)$ 为增函数; 当 $x>0$ 时, $F'(x)<0$, $F(x)$ 为减函数
$x^2f(x)-f(1)<x^2-1$ 化为 $F(x)<F(1)$,所以 $|x|>1$,解得 $x<-1$ 或 $x>1$

(二) 第二组

【例 1】(2018 年河北石家庄模考) $f(x)>0$ 且 $f(x)+f'(x)<0$,若 $ab=1$ 且 $0<a<1<b$, 证明: $af(a)>bf(b)$

解: $g(x)=e^xf(x)$, $g'(x)=e^x\left[f(x)+f'(x)\right]<0$,所以 g(x) 单调递减

故 $e^af(a)>e^bf(b)$ 即 $e^{b-a}<\frac{f(a)}{f(b)}$,证 $af(a)>bf(b)$ 即证 $\frac{b}{a}<\frac{f(a)}{f(b)}$

即证 $e^{b-a}>\frac{b}{a}$,又 $ab=1$,故 $e^{b-\frac{1}{b}}>b^2$,取对数易证其恒成立.

【例 2】(衡水二调) 已知定义在 R 上的奇函数 $f(x)$,当 $x<0$ 时, $2f(x)+xf'(x)<xf(x)$, 求 $f(x)$ 在 R 上的零点个数.

解: $f(0)=0$,构造 $F(x)=\frac{x^2f(x)}{e^x}(x<0)$, $F'(x)=\frac{1}{e^x}\left\{x\left[2f(x)+xf'(x)-xf(x)\right]\right\}$

可知该函数在单调递增,又 $F(0)=0$,所以仅一个解.

(三) 第三组

【例 1】已知奇函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\pi,0)\cup(0,\pi)$,又 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$,那么当 $x\in(0,\pi)$ 时, $f'(x)\sin x+f(x)\cos x<0$,求 $f(x)<0$ 的解集.

解: 构造 $g(x)=f(x)\sin x$,该函数为偶函数,且在 $(0,\pi)$ 上单调递减,所以 $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$

2. $y=f(x)$ 对任意 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 满足 $f'(x)\cos x+f(x)\sin x>0$,证: $\sqrt{2}f\left(-\frac{\pi}{3}\right)<f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

解: 构造函数 $g(x)=\frac{f(x)}{\cos x}, g'(x)=\frac{f'(x)\cos x+f(x)\sin x}{\cos^2 x}$,故 $g(x)$ 单调递增

所以 $g\left(-\frac{\pi}{3}\right)<g\left(-\frac{\pi}{4}\right)$,故而 $\sqrt{2}f\left(-\frac{\pi}{3}\right)<f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ 得证.

(四) 第四组

【例】定义在 R 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f'(x)>-2$,求 $f(x-1)<x^2(3-2\ln x)+3(1-2x)$ 的解 集.

解: $g(x)=f(x)+2x$,该函数单调递增且 $g(0)=0$

$f(x-1)<x^2(3-2\ln x)+3(1-2x)$ 可整理为

$g(x-1)<3x^2-4x+1-2x^2\ln x=x^2\left(3-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}-2\ln x\right)$ (局部隔离)

令 $h(x)=3-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}-2\ln x, h'(x)=-\frac{2(x-1)^2}{x^3}\le 0$,故该函数单调递减, $h(1)=0$

当 $x\in(0,1)$ 时, $g(x-1)<0<x^2\cdot h(x)$; 当 $x\in(1,+\infty)$ 时, $x^2\cdot h(x)\le 0\le g(x-1)$

综上, $x\in(0,1)$

六、原导关系

【例】设 $f(x)$ 满足 $x^2f'(x)+2xf(x)=\frac{e^x}{x}, f(2)=\frac{e^2}{8}$,当 $x>0$ 时, $f(x)$ 的极值情况如何?

解: 由 $x^2f'(x)+2xf(x)=\frac{e^x}{x}$ 得 $f'(x)=\frac{e^x-2x^2f(x)}{x^3}, f'(2)=0$

令 $g(x)=e^x-2x^2f(x), g'(x)=\frac{e^x}{x}(x-2)$

$g(x)$ 在 $(0,2)$ 单调递减,在 $(2,+\infty)$ 单调递增,所以 $g(x)_{\min} = g(2) = 0$

故而 $g(x) \geq 0$ 恒成立。又 $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3} \geq 0$ 恒成立但不为 0

所以 $f(x)$ 单调递增,无极大值、无极小值

第二讲: 公切线问题

两切线重合法: 分别求出两个曲线的切线, 利用两条直线重合的知识令其相等解出即可

$$y = k_1x + b_1, y = k_2x + b_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2, b_1 = b_2$$

一切线推及法: 求出一个曲线的切线, 使这条切线与另外一条曲线相切 (常用于另外一条曲线 为二次函数)

另外需要注意的是: 必须区分清楚公切线与两个曲线是否切于同一点, 一般我们在求公切线时, 默认其图像交点不是公共切点。

由于存在两种情形: 即①公切线与两曲线切于同一点

②公切线与两曲线同时相切但不切于同一点

【例 1: 方法一: 两直线重合法】(2016 年全国 II 理数 16) 若直线 $y = kx + b$ 是曲线 $y = \ln x + 2$ 的切线,也是曲线 $y = \ln(x + 1)$ 的切线,求 b

解: 设 $y = kx + b$ 与 $y = \ln x + 2$ 和 $y = \ln(x + 1)$ 的切点分别是 $(x_1, \ln x_1 + 2)\left(x_2, \ln(x_2 + 1)\right)$

则切线分别是 $y = \frac{1}{x_1}(x - x_1) + \ln x_1 + 2, y = \frac{1}{x_2+1}(x - x_2) + \ln(x_2 + 1)$

由 $\frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2+1}, \ln x_1 + 1 = -\frac{x_2}{x_2+1} + \ln(x_2 + 1)$ 得 $x_1 = \frac{1}{2}, b = \ln x_1 + 1 = 1 - \ln 2$

【例 2: 方法二: 一切线推及法】若存在过点 $(1,0)$ 的直线与曲线 $y = x^3$ 和 $y = ax^2 + \frac{15}{4}x - 9$

都相切,求 a.

解: 设直线 $y = k(x - 1)$ 与 $y = x^3$ 相切于 (x_0, y_0) ,由 $y_0 = x_0, k = 3x_0{}^2, y_0 = k(x_0 - 1)$

得 $x_0 = \frac{3}{2}$ 时, $y_0 = \frac{27}{8}, k = \frac{27}{4}$,将直线代入 $y = ax^2 + \frac{15}{4}x - 9$ 得 $a = -1$

当 $x_0 = 0, y_0 = 0$， $k = 0$,将直线代入 $y = ax^2 + \frac{15}{4}x - 9$,得 $a = -\frac{25}{64}$

第三讲: 利用切线求距离

【例 1】在平面直角坐标系 xOy 中, P 是曲线 $y=x+\frac{4}{x}(x>0)$ 上的一个动点,则点 P 到直 线 $x+y=0$ 的距离的最小值是___.

解: 由 $y=x+\frac{4}{x}(x>0)$,得 $y'=1-\frac{4}{x^2}$,设斜率为 -1 的直线与曲线 $y=x+\frac{4}{x}(x>0)$ 切于 $\left(x_0,x_0+\frac{4}{x_0}\right)$,由 $1-\frac{4}{x_0^2}=-1$ 得 $x_0=\sqrt{2}\left(x_0=-\sqrt{2}\text{舍去}\right)$

$\therefore$ 曲线 $y=x+\frac{4}{x}(x>0)$ 上,点 $P\left(\sqrt{2},3\sqrt{2}\right)$ 到直线 $x+y=0$ 的距离最小

最小值为 $\frac{\left|\sqrt{2}+3\sqrt{2}\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=4$. 故答案为 4 .

【例 2】(2012 年全国卷理) 设点 P 在函数 $f(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^x$ 的图象上,点 Q 在函数 $g(x)=\ln(2x)$ 的图象上，则线段 PQ 长度的最小值为___

解: 因为 $f(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^x$ 与 $g(x)=\ln(2x)$ 互为反函数,则图象关于 $y=x$ 对称

设点 P 为 (x,y) ,则到直线 $y=x$ 的距离为 $d=\frac{\left|\frac{1}{2}e^x-x\right|}{\sqrt{2}}$,设 $h(x)=\frac{1}{2}e^x-x$,

则 $h'(x)=\frac{1}{2}e^x-1$,令 $g'(x)=0$,即 $x=\ln 2$

所以当 $x\in(-\infty,\ln 2)$ 时, $h'(x)<0$,即 $h(x)$ 单调递减;

当 $x\in(\ln 2,+\infty)$ 时, $h'(x)>0$,即 $h(x)$ 单调递增

所以 $h(x)_{\min}=h(\ln 2)=1-\ln 2$,则 $d_{\min}=\frac{1-\ln 2}{\sqrt{2}}$

所以 $|PQ|$ 的最小值为 $2d_{\min}=\sqrt{2}(1-\ln 2)$,故答案为: $\sqrt{2}(1-\ln 2)$

第四讲: 极值点偏移

定义: $y=f(x)$ 在 (a,b) 内仅有一个极值点 x_0, $f(x)=c$ 的根为 x_1、x_2 ,且 $a<x_1<x_2<b$. 当 $\frac{x_1+x_2}{2}>x_0$ 时,极值点左偏,当 $\frac{x_1+x_2}{2}<x_0$ 时,极值点右偏.

【例 1】（2016 年全国 I 理数） $f(x)=(x-2)e^x+a(x-1)^2$ 有两个零点 x_1、x_2, $a>0$,证明: $x_1+x_2<2$

解: 设 $x_1<x_2$,知 $x_1\in(-\infty,1)$, $x_2\in(1,+\infty)$, $2-x_2\in(-\infty,1)$, $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递减

故 $x_1+x_2<2\Leftrightarrow x_1<2-x_2$,因而 $f(x_1)>f(2-x_2)$,又 $f(x_1)=0$,故 $0>f(2-x_2)$

【注: 有时候题里面说的是 $f(x_1)=f(x_2)$,因此我们要换成 $f(x_2)>f(2-x_2)$ 】

由 $f(x_2)=(x_2-2)e^{x_2}+a(x_2-1)^2=0$ 得到 a、x_2 的关系式

将其代入到 $f(2-x_2)=-x_2e^{2-x_2}+a(x_2-1)^2$ 可以得到 $f(2-x_2)=-x_2e^{2-x_2}-(x_2-2)e^{x_2}$

【注: 如果我们不能将参数 a 置换出来,那么我们就需要选取其他方法】

设 $g(x)=-xe^{2-x}-(x-2)e^x, x>1, g'(x)=(x-1)(e^{2-x}-e^x)<0$

故 $g(x)<g(1)=0$,所以 $g(x_2)=f(2-x_2)<0$,故 $x_1+x_2<2$ 恒成立

【例 2】已知 $g(x)=\ln x+bx$ 有两个零点 x_1、x_2 ,证明: $x_1x_2>e^2$

解: 令 $b=-\frac{\ln x}{x}$,则 $b\in\left(-\frac{1}{e},0\right)$ 时有两个零点,由 $x_1x_2>e^2$ 得 $x_1>\frac{e^2}{x_2}$

由 $b=-\frac{\ln x}{x}$ 得 $0<x_1<e<x_2$,设 $f(x)=-\frac{\ln x}{x}, f(x_1)=f(x_2)$

$f(x)$ 在 $(0,e)$ 单调递减,在 $(e,+\infty)$ 单调递增

由 $0<x_1<e<x_2$ 得 $x_1\in(0,e),\frac{e^2}{x_2}\in(0,e)$,即证 $f(x_1)<f\left(\frac{e^2}{x_2}\right)$,又 $f(x_1)=f(x_2)$

所以 $f(x_2)<f\left(\frac{e^2}{x_2}\right)\Leftrightarrow f(x_2)-f\left(\frac{e^2}{x_2}\right)<0$ 即证 $2x_2^2-\left(x_2^2+e^2\right)\ln x_2<0$

设 $h(x)=2x^2-(x^2+e^2)\ln x, x\in(e,+\infty)$,则 $h(e)=0; h'(x)=3x-\frac{e^2}{x}-2x\ln x, h'(e)=0$

$h''(x)=1+\frac{e^2}{x^2}-2\ln x$,则 $h''(e)=0$; 又 $h''(x)$ 递减,所以 $h'(x)$ 递减,故 $h(x)$ 递减

所以 $h(x)<h(e)=0$ 即 $2x_2^2-\left(x_2^2+e^2\right)\ln x_2<0$ 得证

【例 3】（2019 年衡中押题卷理） $f(x)=-a^2\ln x+x^2-ax(a>0), f(x)=m$ 有两解 x_1、x_2 , 且 $x_1<x_2$,证明: $x_1+x_2>2a$.

解: 证 $x_1+x_2>2a$ 即证 $\frac{x_1+x_2}{2}>a, f(x)=-\frac{a^2}{x}+2x-a$ 单调递增,

只需证 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>f'(a)=0$ 即证 $-\frac{2a^2}{x_1+x_2}+x_1+x_2-a>0$,

只需证 $-\frac{2}{x_1+x_2}+\frac{1}{a^2}(x_1+x_2-a)>0$ ①,

又 $-a^2\ln x_1+x_1^2-ax_1=m, -a^2\ln x_2+x_2^2-ax_2=m$

两个式子相减得 $-\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}+\frac{1}{a^2}(x_1+x_2-a)=0$,将 $\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}=\frac{1}{a^2}(x_1+x_2-a)$ 代入①

只需证 $-\frac{2}{x_1+x_2}+\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}>0$ 即证 $-\frac{2\left(\frac{x_1}{x_2}-1\right)}{\frac{x_1}{x_2}+1}+\ln\frac{x_1}{x_2}<0$,令 $\frac{x_1}{x_2}=t, t\in(0,1)$,

即证 $-\frac{2(t-1)}{t+1}+\ln t<0$,易知该函数单调递增

故在 1 取到最大值, 而最大值为 0 , 因此原不等式成立.

第五讲: 最值函数的零点问题

【例 1】（2015 年全国 I 理数）已知函数 $f(x)=x^3+ax+\frac{1}{4}, g(x)=-\ln x$,用 $\min\{m,n\}$ 表示 m,n 中的最小值,设函数 $h(x)=\min\{f(x),g(x)\}(x>0)$,讨论 $h(x)$ 零点的个数.

解: 当 $a\geq 0$ 时, $f(x)$ 单调递增,又 $f(0)=\frac{1}{4}$,故此时仅 $x=1$ 为零点.

当 $a<0$ 时, $f(x)$ 在 $\left(0,\sqrt{-\frac{a}{3}}\right)$ 单调递减,在 $\left(\sqrt{-\frac{a}{3}},+\infty\right)$ 单调递增

当 $f\left(\sqrt{-\frac{a}{3}}\right)>0$ 即 $a\in\left(-\frac{3}{4},0\right)$ 时,仅 $x=1$ 为零点

当 $f\left(\sqrt{-\frac{a}{3}}\right)=0$ 即 $a=-\frac{3}{4}$ 时,有两个零点

当 $f\left(\sqrt{-\frac{a}{3}}\right)<0$ 即 $a<-\frac{3}{4}$,当 $\sqrt{-\frac{a}{3}}<1$ 即 $a\in(-3,0)$,此时 $a\in\left(-3,-\frac{3}{4}\right)$

当 $f(1)<0$ 即 $a\in\left(-3,-\frac{5}{4}\right)$ 时,一个零点; 当 $f(1)=0$ 即 $a=-\frac{5}{4}$ 时,两个零点;

当 $f(1)>0$ 即 $a\in\left(-\frac{5}{4},-\frac{3}{4}\right)$ 时,三个零点。当 $\sqrt{-\frac{a}{3}}\geq 1$ 即 $a\leq -3$ 时,一个零点

综上, $a>-\frac{3}{4}$ 或 $a<-\frac{5}{4}$ 时一个零点; $a=-\frac{3}{4}$ 或 $a=-\frac{5}{4}$ 时,两个零点; 当 $a\in\left(-\frac{5}{4},-\frac{3}{4}\right)$ 时 三个零点。

【例 2】（2019 年天津河北区模考） $f(x)=x^3-3ax+e, g(x)=1-\ln x$,用 $\max\{m,n\}$ 表 示 m,n 中的较大者,记 $h(x)=\max\{f(x),g(x)\}(x>0)$,讨论函数零点个数.

第六讲: 韦达定理与代换

【例 1】 $f(x)=\frac{x^2+1}{x\ln x}$,证明: $f(x)$ 有两个极值点 x_1,x_2 ,并求 $f(x_1)+f(x_2)$ 的值.

解: $f'(x)=\frac{x^2-1}{(x\ln x)^2}\left(\ln x-\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)$,令 $h(x)=\ln x-\frac{x^2+1}{x^2-1}=\ln x-\frac{2}{x^2-1}-1$

$h(x)$ 在 $(0,1)$ 和 $(1,+\infty)$ 上单调递增, $h\left(\frac{1}{e^2}\right)<0, h\left(\frac{1}{e}\right)>0$

所以存在 $x_1\in\left(\frac{1}{e^2},\frac{1}{e}\right)$ 使得 $h(x_1)=0, f(x)$ 在 $(0,x_1)$ 上递增,在 $(x_1,1)$ 上递减

又 $h(e)<0, h(e^2)>0$,故存在 $x_2\in(e,e^2)$ 使 $h(x_2)=0, f(x)$ 在 $(1,x_2)$ 递减,在 $(x_2,+\infty)$ 递增

所以 $f(x)$ 有两个极值点 x_1,x_2 ,当 $h(x_1)=0$ 时, $\ln x_1-\frac{x_1^2+1}{x_1^2-1}=0$,

则 $h\left(\frac{1}{x_1}\right)=-\ln x_1+\frac{x_1^2+1}{x_1^2-1}=0$

又 $\frac{1}{x_1}\in(e,e^2)$ 且 $h(x_2)=0$,所以 $x_2=\frac{1}{x_1}$,故 $f(x_1)+f(x_2)=0$

【同源练习】

已知函数 $f(x)=\ln x-\frac{x+1}{x-1}$.

(1)讨论 $f(x)$ 的单调性,并证明 $f(x)$ 有且仅有两个零点;

(2) 设 x_0 是 $f(x)$ 的一个零点,证明曲线 $y=\ln x$ 在点 $A(x_0,\ln x_0)$ 处的切线也是曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 的 切线.

解: (1) $f(x)$ 的定义域为 $(0,1)\cup(1,+\infty)$. 因为 $f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{2}{(x-1)^2}>0$,所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$,

$(1,+\infty)$ 单调递增. 因为 $f(e)=1-\frac{\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}-1}<0, f(\mathrm{e}^2)=2-\frac{\mathrm{e}^2+1}{\mathrm{e}^2-1}=\frac{\mathrm{e}^2-3}{\mathrm{e}^2-1}>0$,所以 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$

有唯一零点 x_1 ,即 $f(x_1)=0$. 又 $0<\frac{1}{x_1}<1, f\left(\frac{1}{x_1}\right)=-\ln x_1+\frac{x_1+1}{x_1-1}=-f(x_1)=0$,故 $f(x)$ 在

$(0,1)$ 有唯一零点 $\frac{1}{x_1}$. 综上, $f(x)$ 有且仅有两个零点.

(2) 因为 $\frac{1}{x_0}=\mathrm{e}^{-\ln x_0}$,故点 $B\left(-\ln x_0,\frac{1}{x_0}\right)$ 在曲线 $y=e^x$ 上. 由题设知 $f(x_0)=0$,即

$\ln x_0=\frac{x_0+1}{x_0-1}$,连接 AB ,故直线 AB 的斜率 $k=\frac{\frac{1}{x_0}-\ln x_0}{-\ln x_0-x_0}=\frac{\frac{1}{x_0}-\frac{x_0+1}{x_0-1}}{-\frac{x_0+1}{x_0-1}x_0}=\frac{1}{x_0}$.

曲线 $y=e^x$ 在点 $B\left(-\ln x_0,\frac{1}{x_0}\right)$ 处切线的斜率是 $\frac{1}{x_0}$,曲线 $y=\ln x$ 在点 $A(x_0,\ln x_0)$ 处切线的

斜率也是 $\frac{1}{x_0}$,所以曲线 $y=\ln x$ 在点 $A(x_0,\ln x_0)$ 处的切线也是曲线 $y=e^x$ 的切线.

【例 2】已知 $h(x)=\ln x+\frac{1}{2}x^2+mx, m\leq -\frac{3\sqrt{2}}{2}$, $h(x)$ 有两个极值点 x_1、$x_2(x_1<x_2)$，求 $h(x_1)-h(x_2)$ 的最小值.

解: $h'(x)=\frac{x^2+mx+1}{x}, x_1+x_2=-m, x_2=\frac{1}{x_1}, \therefore m=-x_1-\frac{1}{x_1}$

由 $m\leq -\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 且 $x_1<x_2$ 得 $-x_1-\frac{1}{x_1}\leq -\frac{3\sqrt{2}}{2}\Rightarrow 0<x_1\leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$h(x_1)-h(x_2)=h(x_1)-h\left(\frac{1}{x_1}\right)=2\ln x_1-\frac{1}{2}\left(x_1^2-\frac{1}{x_1^2}\right)$$

令 $g(x)=2\ln x-\frac{1}{2}\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right), x\in\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, $g'(x)=-\frac{(x^2-1)^2}{x^3}$

当 $x\in\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ 时, $g'(x)=-\frac{(x^2-1)^2}{x^3}<0$,故 $g(x)$ 在 $x\in\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ 单调递减

所以 $g(x)_{\min}=g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\ln 2+\frac{3}{4}$,故而 $h(x_1)-h(x_2)$ 的最小值为 $-\ln 2+\frac{3}{4}$

【例 3】 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+a\ln x$,若 $F(x)=f(x)-2x$ 有两个极值点 x_1、x_2 ,且 $F(x_1)+F(x_2)>-\frac{2}{e}-2$ 恒成立,求 a 的取值范围.

解: $F'(x)=\frac{x^2-2x+a}{x}, x_1+x_2=2, x_1x_2=a, a\in(0,1)$

$F(x_1)+F(x_2)>-\frac{2}{e}-2$ 等价于 $a\ln a-a>-\frac{2}{e}$,求导可得该函数单调递减,故 $a\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$

第七讲: 任意存在类问题

定义: ⊙ $\forall x_1\in[a,b], \exists x_2\in[c,d]$,使 $g(x_2)=f(x_1)$ 成立, $f(x)$ 的值域为 $g(x)$ 值域的子集.

② $\exists x_1\in[a,b], \exists x_2\in[c,d]$,使 $g(x_2)=f(x_1)$ 成立, $f(x)$ 的值域与 $g(x)$ 值域交集非空.

【例 1】(2021 届南宁二中) $f(x)=\frac{1}{2}ax^2+(1-a)x-\ln x, g(x)=xe^x-x-\ln x+a, a<-1$,

证: $\forall x_1\in(0,2], \exists x_2\in(0,+\infty)$,使得 $f(x_1)-g(x_2)>2-\ln 2$ 恒成立.

解: 求导可得 $f(x)_{\min}=\min\left\{f\left(-\frac{1}{a}\right), f(2)\right\}>2-\ln 2$ 恒成立

利用切线放缩可得 $g(x) > a+1$,又 $a+1<0$,故 $-(a+1)>0$

所以 $f(x_1)-g(x_2) > 2-\ln 2$ 恒成立

【例 2】 $f(x)=x^2-\frac{2}{3}ax^3(a>0)$,若对 $\forall x_1 \in (2,+\infty), \exists x_2 \in (1,+\infty)$ 使得 $f(x_1)f(x_2)=1$,

求 a 的取值范围.

解: 设 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 单调递增,在 $(-\infty,0)$ 单调递减,在 $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 单调递减

由 $f(0)=f\left(\frac{3}{2a}\right)=0$ 得: 当 $x \in \left(0,\frac{3}{2a}\right), f(x)>0$,当 $x \in \left(\frac{3}{2a},+\infty\right), f(x)<0$

设集合 $A=\{f(x)|x \in (2,+\infty)\}$,集合 $B=\left\{\frac{1}{f(x)}\middle| \ x \in (1,+\infty), f(x) \neq 0\right\}$

由题意得等价于 $A \subset B, 0 \notin B$

当 $\frac{3}{2a}>2$ 即 $0<a<\frac{3}{4}$ 时,由 $f\left(\frac{3}{2a}\right)=0$ 得 $0 \in A$ 而 $0 \notin B$,故 A 不是 B 的子集

当 $1 \leq \frac{3}{2a} \leq 2$ 即 $\frac{3}{4} \leq a \leq \frac{3}{2}$ 时,有 $f(2) \leq 0$

且 $f(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 单调递减,故 $A=\big(-\infty, f(2)\big)$ 即 $A \subset (-\infty,0)$; 由 $f(1) \geq 0$

有 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上包含 $(-\infty,0)$ 则 $(-\infty,0) \subset B$,所以 $A \subset B$

当 $\frac{3}{2a}<1$ 即 $a>\frac{3}{2}$ 时,有 $f(1)<0$,且 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递减

故 $B=\left(\frac{1}{f(1)},0\right), A=\big(-\infty,f(2)\big)$ 故 A 不是 B 的子集。综上, $a \in \left[\frac{3}{4},\frac{3}{2}\right]$

【例 3】 $f(x)=\frac{ex}{e^x}, g(x)=ax-2\ln x-a$,在区间 $(0,e]$ 上,对于任意的 x_0 总存在不同的 x_1、x_2 使得 $g(x_1)=g(x_2)=f(x_0)$,求 $\bar{a}$ 的取值范围.

解: 求导易知 $f(x) \in (0,1]$ 。当 $a=0$ 时, $g(x)=-2\ln x$ 单调显然不成立

当 $a \neq 0$ 时, $g'(x)=\frac{a\left(x-\frac{2}{a}\right)}{x}, x \in (0,e]$,故而必须满足 $0<\frac{2}{a}<e \Rightarrow a>\frac{2}{e}$

此时 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{2}{a}\right)$ 单调递减,在 $\left(\frac{2}{a},e\right]$ 单调递增

其中 $g\left(\frac{2}{a}\right)=2-a-2\ln\frac{2}{a}, g(e)=a(e-1)-2$,所以对于任意给定的 $x_0 \in (0,e]$,在区间 $(0,e]$

上总存在两个不同的 x_1、x_2 使得 $g(x_1)=g(x_2)=f(x_0)$

则 $g\left(\frac{2}{a}\right) \leq 0, g(e) \geq 1 \Rightarrow 2-a-2\ln\frac{2}{a} \leq 0, a(e-1)-2 \geq 1$,解得 $a \geq \frac{3}{e-1}$

第八讲: 数列放缩与导数

【例 1】设 m 为整数,且对于任意正整数 n, $\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)<m$,求 m 的最小值.

解: 当 $x\in(1,+\infty)$ 时, $x-1-\ln x>0$

令 $x=1+\frac{1}{2^n}$ 得 $\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)<\frac{1}{2^n}$,从而

$$\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)<\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}<1$$

故 $\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)<e$

而 $\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^3}\right)>2$,所以 m 的最小值为 3 .

【例 2】证明: $3\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\cdots+\frac{n}{n+1}\right)>n-\ln(n+1)^{\frac{1}{3}}$

解: 由阶差法可得即证 $\frac{3n}{n+1}>1+\ln\frac{n}{n+1}$,易证其恒成立.

【例 3】证明: $(1+\sin 1)\left(1+\sin\frac{1}{1\times 2}\right)\left(1+\sin\frac{1}{2\times 3}\right)\cdots\left(1+\sin\frac{1}{(n-1)n}\right)<e^2(n\geq 2)$

解: 同时取对数可得 $\ln(1+\sin 1)+\ln\left(1+\sin\frac{1}{1\times 2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\sin\frac{1}{(n-1)n}\right)<2$

因为 $\ln\left(1+\sin\frac{1}{(n-1)n}\right)<\sin\frac{1}{(n-1)n}<\frac{1}{(n-1)n}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$

所以

$$\begin{aligned}&\ln(1+\sin 1)+\ln\left(1+\sin\frac{1}{1\times 2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\sin\frac{1}{(n-1)n}\right)\\&<1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}=1-\frac{1}{n}<2\end{aligned}$$

第九讲: 零点差问题

【例 1】 $f(x)=\frac{1-x^2}{e^x}$,方程 $f(x)=m,(m>0)$ 有两个根 x_1、x_2 ,证: $|x_1-x_2|<2-m\left(1+\frac{1}{2e}\right)$.

证明: 令 $g(x)=f(x)-m=\frac{1-x^2}{e^x}-m, g'(x)=\frac{-2xe^x-(1-x^2)e^x}{e^{2x}}=\frac{x^2-2x-1}{e^x}$

令 $g'(x)=0$ 得 $x=1\pm\sqrt{2}$,当 $x\to\infty$ 时, $g(x)\to\infty$

由 $g'(-1)=2e,g'(0)=-1$ 得 $g(x)$ 在 $(-1,-m)(0,1-m)$ 的切线分别是

$y+m=2e(x+1),y+m-1=-x$,令 $y=0$,则 $x_1=\frac{m}{2e}-1,x_2=1-m$

所以 $|x_1-x_2|<x_2-x_1=1-m+-\frac{m}{2e}=2-m\left(1+\frac{1}{2e}\right)$

【例 2】 $f(x)=(e-x)\ln x$,方程 $f(x)=m(m\neq 0)$ 有两个根 x_1,x_2 ,证: $|x_1-x_2|<e-1-\frac{em}{e-1}$

证明: $f'(x)=\frac{e}{x}-\ln x-1,f''(x)=-\frac{1}{x}-\frac{e}{x^2}<0$,故一阶导单调递减

令 $g(x)=(e-1)(x-1),h(x)=-x+e$,

下证 $f(x)\leq g(x)\Rightarrow(e-x)\ln x\leq(e-1)(x-1)$,易证其恒成立,

再证 $f(x)\leq h(x)\Rightarrow(e-x)\ln x\leq-x+e$,

设 $g(x_3)=f(x_1)=f(x_2)=h(x_4)=m$

因为 $g(x_1)>f(x_1)=m=g(x_3)$ 且 $g(x)=(e-1)(x-1)$ 为增函数,所以 $x_1>x_3$

由 $g(x_3)=(e-1)(x_3-1)=m$ 得 $x_3=\frac{m}{e-1}+1$,同理, $x_4>x_2,x_4=e-m$

所以 $\frac{m}{e-1}+1=x_3<x_1<x_2<x_4=e-m$,所以 $|x_1-x_2|<e-m-\left(\frac{m}{e-1}+1\right)=e-1-\frac{em}{e-1}$

【例 3】(大连一模理) 已知函数 $f(x)=2\sin x-x^2+2\pi x-a$.

（1）当 $a=0$ 时,求 $f(x)$ 在零点处的切线方程.

（2）若 $f(x)$ 有两个零点 $x_1,x_2(x_1<x_2)$,证明: $\frac{1-\pi^2}{\pi}(x_2-x_1-2\pi)\geq a$

解:

(1) $y=(2+2\pi)x,y=(2-2\pi)x-4\pi+4\pi^2$

（2）由（1）得 $x_1<x_0<x_2$,设 $F(x)=(2+2\pi)x-2\sin x+x^2-2\pi x$

$F'(x)=2-2\cos x+2x,F''(x)\geq 0$,所以 $F'(x)$ 单调递增

又 $F'(0)=0$,所以 $F(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减,在 $(0,+\infty)$ 单调递增

故而 $F(x)\geq F(0)=0$,即 $(2+2\pi)x\geq 2\sin x-x^2+2\pi x$

设 $y=(2+2\pi)x$ 与 $y=a$ 的交点横坐标为 x_3 ,

$$(2+2\pi)x_1\geq 2\sin x_1-x_1^2+2\pi x_1=a=(2+2\pi)x_3$$

因为 $y=(2+2\pi)x$ 为增函数,所以 $x_3=\frac{a}{(2+2\pi)}\le x_1$

同理设 $G(x)=(2-2\pi)(x-2\pi)-2\sin x+x^2-2\pi x$,该函数 $G(x)\ge G(2\pi)=0$

故有 $(2-2\pi)(x-2\pi)\ge 2\sin x-x^2+2\pi x$

设 $y=(2-2\pi)x-4\pi+4\pi^2$ 与 $y=a$ 的交点横坐标为 x_4

则 $(2-2\pi)(x_2-2\pi)\ge 2\sin x_2-x_2^2+2\pi x_2=a=(2-2\pi)(x_4-2\pi)$

因为 $y=(2-2\pi)x-4\pi+4\pi^2$ 为减函数,所以 $x_4=\frac{a}{2-2\pi}+2\pi\ge x_2$

故 $x_2-x_1\le x_4-x_3=\frac{\pi a}{1-\pi^2}+2\pi$

即 $\frac{1-\pi^2}{\pi}(x_2-x_1-2\pi)\ge a$

第十讲: 双参数问题与固定变量法

【例 1】(2021 届考生供题)若不等式 $(ax^2+bx+1)e^x\le 1$ 对一切 $x\in R$ 恒成立,其中, $a,b\in R$,

则 $a+b$ 的取值范围是___.

解: 设 $f(x)=(ax^2+bx+1)e^x$,可得 $f(0)=1$,从而 $f(x)\le f(0)$,显然 $a\le 0$

又 $x\in R$,所以 $f'(0)=0$,故而得 $b=-1$,即 $f(x)=(ax^2-x+1)e^x, f'(x)=xe^x(ax+2a-1)$

当 $a=0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 递增,在 $(0,+\infty)$ 递减,从而 $f(x)\le f(0)$

当 $x=0$ 时, $f(x)\le f(0)$ 恒成立.

当 $a<0$ 时, $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\frac{1-2a}{a}\right)$ 递减,在 $\left(\frac{1-2a}{a},0\right)$ 递增,在 $(0,+\infty)$ 递减

当 $x<\frac{1-2a}{a}$ 时, $ax^2-x+1<0$,又 $x=0$ 时 $f(x)$ 取得极大值即最大值 $f(0)$

所以 $f(x)\le f(0)$,符合题意

【例 2】若不等式 $e^{ax}\ge x+b$ 对于 $x\in R$ 恒成立,则 $\frac{b}{a}$ 的最大值是___.

解: 由 $e^{ax}\ge x+b$ 得 $e^{ax}-x\ge b$,设 $f(x)=e^{ax}-x$

求导可得 $f(x)\ge f\left(\frac{-\ln a}{a}\right)=\frac{1+\ln a}{a}\ge b$,从而 $\frac{1+\ln a}{a^2}\ge\frac{b}{a}$,因此求导可得 $\frac{e}{2}\ge\frac{b}{a}$

【例 3】(2021 届长沙市炎德英才大联考) $f(x)=\ln x-x+1, g(x)=kx-x\ln x-b$,对

任意 $x \in [1,e], f(x) \geq g(x)$ 恒成立时最大的 k 记作 c ,当 $b \in [1,e]$ 时,求 $b+c$ 的取值范围.

解: 分离参数可得 $k \leq \frac{1+\ln x-x+x\ln x+b}{x} = h(x), h'(x) = \frac{x-\ln x-b}{x^2}$

设 $t(x) = x - \ln x - b, t'(x) = 1 - \frac{1}{x} \geq 0$,故 $t(x)$ 单调递增,所以存在零点使得 $x_0 - \ln x_0 = b$

代入 $h(x)$ 得 $k \leq \ln x_0 + \frac{1}{x_0}$,求导得 $c \in \left[1, 1+\frac{1}{e}\right]$,所以 $b+c \in \left[2, e+\frac{1}{e}+1\right]$

第十一讲: 必要探路法与整数解问题

【例】（2020 年天一“顶尖计划” 第二次联考） $f(x) = x\ln x + \frac{x^2}{2} - a(x-1), a \in Z$,若不 等式 $f(x) > 0$ 恒成立,求实数 a 的最大值. $\left(e^{\frac{1}{2}} \approx 1.6\right)$

对于整数解问题、恒成立背景下求参数范围问题，一般利用必要探路法相对简单。

对于该题,首先利用必要探路法,将 $x = e^{\frac{1}{2}}$ 代入可得 $a \leq 3$

从而证明 $f(x) = x\ln x + \frac{x^2}{2} - 3(x-1) > 0$ 即可

方法一（直接求导+虚设零点代换）:

直接求导可得 $\ln x_0 = 2 - x_0, x_0 \in (1,1.6)$,从而易证恒成立.

方法二 (对数单身狗, 简化导函数):

由 $x\ln x + \frac{x^2}{2} - 3(x-1) > 0$ 得 $\ln x + \frac{x}{2} - 3\left(1-\frac{1}{x}\right) > 0$,求导可得恒成立.

第三章 方法篇

第一讲: 虚设零点

虚设零点的经典标志: ①一阶导无明显的与 0 关系的分界点.

②二阶导与 0 的关系局部恒定.

虚设零点的常见作用: ①消元: 可以消参数、指数和对数.

②范围: 可以得到极值点的取值范围.

③代替: 代替不可求的极值点继续分析.

【例 1】（2015 年全国 I 文数）证明: $e^{2x}-a\ln x \geq 2a+a\ln\frac{2}{a}$

解: $f(x)=e^{2x}-a\ln x$ 存在一个极小值点, $2e^{2x_0}-\frac{a}{x_0}=0$

所以 $f(x_0)=\frac{a}{2x_0}+2ax_0+a\ln\frac{2}{a} \geq 2a+a\ln\frac{2}{a}$,故不等式得证

【例 2】（2019 年全国 I 理数）函数 $f(x)=\sin x-\ln(1+x)$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导数. 证明:

(1) $f'(x)$ 在区间 $\left(-1,\frac{\pi}{2}\right)$ 存在唯一极大值点; (2) $f(x)$ 有且仅有 2 个零点.

解: (1) 设 $g(x)=f'(x)$,则 $g(x)=\cos x-\frac{1}{1+x}$, $g'(x)=-\sin x+\frac{1}{(1+x)^2}$.

当 $x\in\left(-1,\frac{\pi}{2}\right)$ 时, $g'(x)$ 单调递减,而 $g'(0)>0, g'\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$,可得 $g'(x)$ 在 $\left(-1,\frac{\pi}{2}\right)$ 有唯一零点,

设为 α . 则当 $x\in(-1,\alpha)$ 时, $g'(x)>0$; 当 $x\in\left(\alpha,\frac{\pi}{2}\right)$ 时, $g'(x)<0$.

所以 $g(x)$ 在 $(-1,\alpha)$ 单调递增,在 $\left(\alpha,\frac{\pi}{2}\right)$ 单调递减,故 $g(x)$ 在 $\left(-1,\frac{\pi}{2}\right)$ 存在唯一极大值点,即

$f'(x)$ 在 $\left(-1,\frac{\pi}{2}\right)$ 存在唯一极大值点.

(2) $f(x)$ 的定义域为 $(-1,+\infty)$.

(i) 当 $x\in(-1,0]$ 时,由 (1) 知, $f'(x)$ 在 $(-1,0)$ 单调递增,而 $f'(0)=0$,所以当 $x\in(-1,0)$ 时,

$f'(x)<0$,故 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 单调递减,又 $f(0)=0$,故 $x=0$ 是 $f(x)$ 在 $(-1,0]$ 唯一零点. (ii) 当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时,由 (1) 知, $f'(x)$ 在 $(0,\alpha)$ 单调递增,在 $\left(\alpha,\frac{\pi}{2}\right)$ 单调递减,而 $f'(0)=0$, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$,所以存在 $\beta\in\left(\alpha,\frac{\pi}{2}\right)$,使得 $f'(\beta)=0$,且当 $x\in(0,\beta)$ 时, $f'(x)>0$; 当 $x\in\left(\beta,\frac{\pi}{2}\right)$ 时, $f'(x)<0$. 故 $f(x)$ 在 $(0,\beta)$ 单调递增,在 $\left(\beta,\frac{\pi}{2}\right)$ 单调递减. 又 $f(0)=0$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1-\ln\left(1+\frac{\pi}{2}\right)>0$,所以当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时, $f(x)>0$. 从而 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 没有零点. (iii) 当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 时, $f'(x)<0$,所以 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 单调递减. 而 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)>0, f(\pi)<0$, 所以 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 有唯一零点.

(iv) 当 $x\in(\pi,+\infty)$ 时, $\ln(x+1)>1$,所以 $f(x)<0$,从而 $f(x)$ 在 $(\pi,+\infty)$ 没有零点.

综上, $f(x)$ 有且仅有 2 个零点.

第二讲: 必要探路法

【例】已知函数 $f(x)=\left(a-\frac{1}{2}\right)x^2-2ax+\ln x, a\in R$,若在区间 $(1,+\infty)$ 上, $f(x)<0$ 恒 成立,求实数 a 的取值范围

解: $f(1)=a-\frac{1}{2}-2a\le 0 \therefore a\ge -\frac{1}{2}$

$$f'(x)=2\left(a-\frac{1}{2}\right)x-2a+\frac{1}{x}=\frac{(2a-1)x^2-2ax+1}{x}=\frac{\big((2a-1)x-1\big)(x-1)}{x}$$

令 $f'(x)<0$,即 $(2a-1)x-1<0\Rightarrow(2a-1)x<1$

$2a-1\le 0\Rightarrow a\le\frac{1}{2}$ 时,即 $a\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$, $f'(x)<0$ 恒成立

$\therefore f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递减 $\therefore f(x)<f(1)\le 0$ 满足条件

$a>\frac{1}{2}$ 时, $f(x)=\left(a-\frac{1}{2}\right)x^2-2ax+\ln x$,又 $f\left(\frac{4a}{2a-1}\right)=\ln\frac{4a}{2a-1}>0$,不符题意舍去

第三讲: 放缩法

$$e^x\ge x+1,\ \ x-1\ge\ln x\ge 1-\frac{1}{x};\ \ x\ge 0,\ \ x\ge\sin x$$

【例 1】证明: $x>0, \ln(x+1)-\cos x>2x-e^x$

解: $\ln(x+1)-2x+e^x>1\ge\cos x$,令 $g(x)=\ln(x+1)-2x+e^x$

$g'(x)=\frac{1}{x+1}+e^x-2\ge\frac{1}{x+1}+x+1-2\ge 2-2=0$,故函数单调递增

又 $g(0)=1$, 故原不等式恒成立。

【例 2】(2021 届河南省第一次天一大联考) 已知 $g(x)=\frac{1-x-x\ln x}{e^{x-2}}$,证明: $g(x)<\frac{e^2+1}{x+1}$

解: $\frac{1-x-x\ln x}{e^2+1}<\frac{e^{x-2}}{x+1}$,左边求导后易得 $\frac{1-x-x\ln x}{e^2+1}<\frac{1}{e^2}$,故而 $x+1<e^x$,得证.

第四讲: 指数化与切线放缩

【例 1】(2021 届许昌高三一模) $e^x+\frac{2}{x}-1\ge\frac{\ln x+a}{x}$ 恒成立,求 a 的取值范围.

解: $xe^x+2-x-\ln x-a=e^{x+\ln x}+2-x-\ln x-a\ge 3-a\ge 0$

故而 $a\le 3$

【例 2】（2020 年武汉二模理数）$\frac{e^x}{x^3}-x-a\ln x\geq 1$ 对 $\forall x\in(1,+\infty)$ 上恒成立,求 a 取值范围.

解: $a\leq\frac{\frac{e^x}{x^3}-x-1}{\ln x}=\frac{e^{-3\ln x}e^x-x-1}{\ln x}=\frac{e^{x-3\ln x}-x-1}{\ln x}$

$$又\ \frac{e^{x-3\ln x}-x-1}{\ln x}\geq\frac{x-3\ln x+1-x-1}{\ln x}=-3\geq a$$

第五讲: 结合函数性质简化讨论

【例 1】证明: $g(x)=\frac{1}{4}x^2-x\sin x-\cos x+1$ 恰有 3 个零点.

解: 观察可得 $g(x)=g(-x),g(0)=0,g(\pi)>0$

故只需证明在 $(0,\pi)$ 内存在一个零点即可

$g'(x)=x\left(\frac{1}{2}-\cos x\right)$,可得 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$ 上单调递减,在 $\left(\frac{\pi}{3},\pi\right)$ 上单调递增

由于 $g(0)=0$,所以 $g\left(\frac{\pi}{3}\right)<0$,又 $g(\pi)>0$。显然存在一个零点。综上，该函数有三个零点

【例 2】(3 月武汉调研) 求 $f(x)=x^2+\pi\cos x$ 的最小值.

解: 易知该函数为偶函数,故只讨论 $x\geq 0$ 的时候即可

当 $x=0$ 时, $f(0)=\pi$; 当 $x\geq\pi$ 时, $f(x)\geq\pi^2-\pi$

当 $x\in(0,\pi)$ 时, $f(x)=x^2+\pi\cos x, f'(x)=2x-\pi\sin x=\pi x\left(\frac{2}{\pi}-\frac{\sin x}{x}\right)$

*易证得 $\frac{\sin x}{x}$ 在 $x\in(0,\pi)$ 单调递减

又 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$,故 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 递减,在 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 递增,故 $f(x)_{\min}=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi^2}{4}$

综上, $f(x)_{\min}=\frac{\pi^2}{4}$

第六讲: 虚设零点与放缩法

放缩法前文已经详细讲过, 不再赘述。虚设零点作为高考导数压轴的常用手段, 想必很多读者 已经掌握, 故不再赘述。

本节内容选取了两道比较新的模考题, 并且以此讲一些在一轮复习备考中需要注意的考点。

放缩法 ($e^x \ge x+1$) 前几年给考生的感觉一直是 "犹抱琵琶半遮面",随着 2018 年以来,多 道模考题、高考题明显将其摆到了台面上, 似乎已经成为了必须要掌握的技巧。

在此有两个问题:

①有同学会疑问: 我怎么在高中教材、教辅、题目解析中没见过哪道题得用放缩法?

郭老师有话说：放缩法只有掌握了才能发现哪些题可以用、需要用。

②考试中用放缩如何拿满分: 比如你想用 $e^x \ge x+1$,先设 $e^x - x - 1 \ge 0$,证其恒成立后可用。

【2021 届江苏如皋第一次调研】已知函数 $f(x) = xe^x - a(x+\ln x)$,若 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 取得极 ___小值且 $f(x_0) > 0$,证明: $\frac{f(x_0)}{x_0 - x_0^3} > 2$

解: 求导易得 $a > 0$ 时存在 $x_0 \in (0,a)$ 使得 $f'(x_0) = 0$ 即 $x_0 e^{x_0} = a$.

又 $f(x_0) > 0$,所以 $x_0 + \ln x_0 - 1 < 0$ 得 $x_0 \in (0,1)$

$$f(x_0) = x_0 e^{x_0}(1 - x_0 - \ln x_0) > x_0(x_0+1)[1 - x_0 - (x_0 - 1)] = 2x_0(1 - x_0^2)$$

又 $x_0 \in (0,1)$,所以 $\frac{f(x_0)}{x_0 - x_0^3} > 2$

【2021 届浙江省 A9 协作联考】已知函数 $f(x) = 2xe^x - a(x+\ln x)$,若 x_0 是函数 $f(x)$ 的极值

点,且 $f(x_0) > 0$,证明: $f(x) > 4x_0 - 4x_0^3$

解: $f'(x) = (x+1)(2xe^x - a)$,当 $a \le 0$ 时导函数无解,故不存在极值点

当 $a > 0$ 时,方程有唯一解, $a = 2x_0 e^{x_0}$

由 $f(x) > 0$ 得 $x_0 + \ln x_0 - 1 < 0$,得 $x_0 \in (0,1)$

$$f(x_0) = 2x_0 e^{x_0}(1 - x_0 - \ln x_0) > 2x_0(1+x_0)(1 - x_0 - x_0 + 1) = 4x_0 - 4x_0^3$$

故 $f(x) > 4x_0 - 4x_0^3$

【2020 年成都二诊理数】 $a \in [0,e]$,证: $f(x) = e^{x-1} - a\ln x$ 无零点.

解: $f'(x) = e^{x-1} - \frac{a}{x}$ 单调递增且存在 x_0 使得 $e^{x_0 - 1} = \frac{a}{x_0}$

无零点即证 $\frac{1}{x_0} - \ln x_0 > 0$,且存在 $x_0 \in \left(1, \frac{3}{2}\right)$ 使得使得 $x_0 e^{x_0 - 1} = e$

证 $\frac{1}{x_0} - \ln x_0 > 0$ 即证 $\frac{1}{x_0} - x_0 + 1 > 0$ 恒成立.

第四章 函数篇

第一讲: 对数单身狗 (清君侧)

一般对于指数对数的处理技巧是: 对数单身狗、指数找朋友。对于对数函数而言, 我们一般让 其与其他函数分离, 进而求导时不再有对数函数; 对于指数函数而言, 我们一般让其与其他函数相 结合, 如此一来再求导时, 指数函数便不再发挥作用了。

【例 1: THUSSAT2020 年 5 月诊断】已知函数 $f(x)=(x+1)\ln x, k>2$,证明: 函数 $y=f(x)$ 的图像与直线 $l: y=k(x-1)$ 有 3 个交点.

解: 即 $h(x)=\ln x-\frac{k(x-1)}{x+1}$ 有三个零点, $h'(x)=\frac{(x+1)^2-2kx}{x(x+1)^2}, x>0, g(x)=x^2+(2-2k)x+1$

由 $g(0)=1>0, g(1)=4-2k<0$,所以存在 $x_1\in(0,1), x_2\in(0,+\infty)$ 使得 $g(x_1)=g(x_2)=0$

故 $h(x)$ 在 $(0,x_1)$ 单调递增,在 (x_1,x_2) 单调递减,在 $(x_2,+\infty)$ 单调递增

因为 $h(1)=0$,所以 $h(x_1)>h(1)=0, h(x_2)<h(1)=0$,故而 $h(x)$ 在 (x_1,x_2) 存在一个零点 $x=1$

又 $h\left(e^{-k}\right)<0$,所以 $h(x)$ 在 $\left(e^{-k},x_1\right)$ 存在一个零点;

$h\left(e^{k}\right)>0$,所以 $h(x)$ 在 $\left(x_2,e^{k}\right)$ 存在一个零点;

综上,函数 $y=f(x)$ 的图像与直线 $l: y=k(x-1)$ 有 3 个交点.

第二讲: 指数找朋友

题目中如果含有指数函数,我们一般将其与其他函数结合起来,形如: $e^x f(x) \setminus \frac{f(x)}{e^x}$ 。因为 这两种形式的函数我们在求导以后, 会发现指数函数被 “消掉了” 了。

证明: $[e^x f(x)]=e^x\left(f(x)+f'(x)\right)$; $\left[\frac{f(x)}{e^x}\right]'=\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}$

【例】 $f(x)=e^x+a\cos x$,当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时, $f(x)\geq ax$ 恒成立,求 a 的取值范围.

法一 (指数找朋友): $1+\frac{a\cos x-ax}{e^x}\geq 0$,

令 $g(x)=1+\frac{a\cos x-ax}{e^x}, g'(x)=\frac{a(x-1-\sin x-\cos x)}{e^x}$,

令 $h(x)=x-1-\sin x-\cos x, h'(x)=1-\cos x+\sin x\geq 0$

所以 $h(x)$ 单调递增,又 $h\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$,所以 $g'(x) < 0$

当 $a \geq 0$ 时,原函数单调递减, $g\left(\frac{\pi}{2}\right) \geq 0$ 得 $a \leq \frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{\frac{\pi}{2}}$;

当 $a \leq 0$ 时,原函数单调递增, $g(0) \geq 0$ 得 $a \geq -1$

综上, $a \in \left[-1, \frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{\frac{\pi}{2}}\right]$

法二 (必要探路法): $f(0) \geq 0 \Rightarrow a \geq -1$,令 $g(x) = e^x + a\cos x - ax$

$$g'(x) = e^x - a\sin x - a \geq x - a\sin x + 1 - a$$

当 $a \leq 1$ 时,原函数恒单调递增, $a \geq -1$ 时恒成立

当 $a > 1$ 时,原函数单调递减,由 $g\left(\frac{\pi}{2}\right) \geq 0$ 得 $a \leq \frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{\frac{\pi}{2}}$,综上 $a \in \left[-1, \frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{\frac{\pi}{2}}\right]$

法三 (导数分参法): $f(0) \geq 0 \Rightarrow a \geq -1$,当 $a = 0$ 时待证不等式恒成立

当 $a \in [-1, 0)$ 时, $\frac{1}{a} \leq \frac{x - \cos x}{e^x}$; 当 $a \in (0, +\infty)$ 时, $\frac{1}{a} \geq \frac{x - \cos x}{e^x}$

令 $g(x) = \frac{x - \cos x}{e^x}$, $g'(x) = \frac{1 - x + \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{e^x}$

令 $h(x) = 1 - x + \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, $h'(x) = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1 \leq 0$

所以 $h(x)$ 单调递减, $h\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$,故 $g(x)$ 单调递增

所以 $g(x)_{\min} = -1$, $g(x)_{\max} = \frac{\frac{\pi}{2}}{e^{\frac{\pi}{2}}}$ 即 $\frac{1}{a} \leq -1$, $\frac{1}{a} \geq \frac{\frac{\pi}{2}}{e^{\frac{\pi}{2}}}$

综上 $a \in \left[-1, \frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{\frac{\pi}{2}}\right]$

第三讲: 含三角函数的导数处理策略

采取分段的形式对函数分开讨论, 问题自然迎刃而解

①以 $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)\left(0, \frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 为单位分段讨论函数; ② 寻找比边界值大或者小的值进行分段

【例 1】(2019 年全国 I 理数) 已知函数 $f(x) = \sin x - \ln(1 + x)$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导数.
证明: (1) $f'(x)$ 在区间 $\left(-1, \frac{\pi}{2}\right)$ 存在唯一极大值点;

(2) $f(x)$ 有且仅有 2 个零点.

解: (1) 设 $g(x)=f'(x)$,则 $g(x)=\cos x-\frac{1}{1+x}, g'(x)=-\sin x+\frac{1}{(1+x)^2}$.

当 $x\in\left(-1,\frac{\pi}{2}\right)$ 时, $g'(x)$ 单调递减,而 $g'(0)>0, g'\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$,可得 $g'(x)$ 在 $\left(-1,\frac{\pi}{2}\right)$ 有唯一零点,

设为 α . 则当 $x\in(-1,\alpha)$ 时, $g'(x)>0$; 当 $x\in\left(\alpha,\frac{\pi}{2}\right)$ 时, $g'(x)<0$.

所以 $g(x)$ 在 $(-1,\alpha)$ 单调递增,在 $\left(\alpha,\frac{\pi}{2}\right)$ 单调递减,故 $g(x)$ 在 $\left(-1,\frac{\pi}{2}\right)$ 存在唯一极大值点,即 $f'(x)$ 在 $\left(-1,\frac{\pi}{2}\right)$ 存在唯一极大值点.

(2) $f(x)$ 的定义域为 $(-1,+\infty)$.

(i) 当 $x\in(-1,0]$ 时,由 (1) 知, $f'(x)$ 在 $(-1,0)$ 单调递增,而 $f'(0)=0$,所以当 $x\in(-1,0)$ 时,

$f'(x)<0$,故 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 单调递减,又 $f(0)=0$,从而 $x=0$ 是 $f(x)$ 在 $(-1,0]$ 唯一零点. (ii) 当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时,由 (1) 知, $f'(x)$ 在 $(0,\alpha)$ 单调递增,在 $\left(\alpha,\frac{\pi}{2}\right)$ 单调递减,而 $f'(0)=0$, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$,所以存在 $\beta\in\left(\alpha,\frac{\pi}{2}\right)$,使得 $f'(\beta)=0$,且当 $x\in(0,\beta)$ 时, $f'(x)>0$; 当 $x\in\left(\beta,\frac{\pi}{2}\right)$ 时, $f'(x)<0$. 故 $f(x)$ 在 $(0,\beta)$ 单调递增,在 $\left(\beta,\frac{\pi}{2}\right)$ 单调递减.

又 $f(0)=0, f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1-\ln\left(1+\frac{\pi}{2}\right)>0$,所以当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时, $f(x)>0$. 从而, $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2}]$ 没有零点.

(iii) 当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 时, $f'(x)<0$,所以 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 单调递减. 而 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)>0, f(\pi)<0$,

所以 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{2},\pi]$ 有唯一零点.

(iv) 当 $x\in(\pi,+\infty)$ 时, $\ln(x+1)>1$,所以 $f(x)<0$,从而 $f(x)$ 在 $(\pi,+\infty)$ 没有零点.

综上, $f(x)$ 有且仅有 2 个零点.

【例 2】(2020 届江淮十校第一次联考). 已知函数 $f(x)=\cos x+\frac{1}{4}x^2-1$,判断 $y=f(x)$ 的 零点个数, 并给出证明过程

解: 当 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 时, $f(x)$ 有一个零点 $x=0$

当 $x\in[3,+\infty)$, $f(x)\geq\cos x-1+\frac{9}{4}>0$, $f(x)$ 无零点.

当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},3\right)$ 时, $f'(x)=-\sin x+\frac{1}{2}x, f''(x)=-\cos x+\frac{1}{2}>0$

所以 $f'(x)$ 单调递增, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1+\frac{\pi}{4}<0, f'(3)=-\sin 3+\frac{3}{2}>0$

$\exists x_0 \in \left(\frac{\pi}{2},3\right)$ 时, $f'(x)=0$。当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},x_0\right)$, $f'(x)<0, f(x)$ 单调递减;

当 $x\in(x_0,3), f'(x)>0, f(x)$ 单调递增

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi^2}{16}-1<0, f(x_0)<f\left(\frac{\pi}{2}\right)<0, f(3)=\cos 3+\frac{5}{4}>0$$

所以 $f(x)$ 在 $x\in\left(\frac{\pi}{2},x_0\right)$ 无零点,在 $x\in(x_0,3)$ 上有且仅有一个零点

又 $f(x)$ 为偶函数,在 $(-\infty,3]$ 上无零点,在 $\left(-3,-\frac{\pi}{2}\right)$ 有且仅有一个零点.

综上, $f(x)$ 有三个零点.

第四讲: 含绝对值的函数处理策略

一、分类讨论去绝对值

1. 设函数 $f(x)=\left|ax^2-bx+3\right|$,若对任意的负实数 a 和实数 b ,总有 $x_0\in[1,2]$ 使 $f(x_0)\geq mx_0$, 求 m 的取值范围.

解: 由题意可得 $\frac{f(x_0)}{x_0}\geq m$ 在 $x_0\in[1,2]$ 上有解, $\frac{f(x)}{x}=\left|ax+\frac{3}{x}-b\right|, x\in[1,2]$

由 $\left|ax+\frac{3}{x}-b\right|\geq m$ 得 $ax+\frac{3}{x}-b\geq m$ 或 $ax+\frac{3}{x}-b\leq -m$

即 $ax+\frac{3}{x}\geq b+m$ 或 $ax+\frac{3}{x}\leq b-m$,又 $ax+\frac{3}{x}\in\left[2a+\frac{3}{2},a+3\right]$

所以 $b+m\leq 3+a, b-m\geq 2a+\frac{3}{2}$,故 $m-b\leq -2a-\frac{3}{2}$

由于对于任意的 $a<0$ 恒成立,可得 $2m\leq -a+\frac{3}{2}$

又 $-a+\frac{3}{2}>\frac{3}{2}$,所以 $2m\leq\frac{3}{2}$,即 $m\leq\frac{3}{4}$

二、极值点、端点值取最值

带有绝对值的函数其最值往往在极值点、端点值处取到

1. (2015 年湖北文数) a 为实数, $f(x)=\left|x^2-ax\right|$ 在区间 $[0,1]$ 上的最大值为 $g(a)$,当 a 为何

值是, $g(a)$ 的值最小.

解: 有题意可得 $g(a) = \left\{f(1), f\left(\frac{a}{2}\right)\right\} = \left\{|1-a|, \frac{a^2}{4}\right\}$,将其图像画出

即可得到 $1-a = \frac{a^2}{4}$ 即 $a = 2\sqrt{2}-2$ 时, $g(a)$ 取得最小值.

三、端点效应

定义: $f(x) = |ax+b|$ 在 $[m,n]$ 上的最大值在端点处取得

1. (2017 年浙江理数) $a \in R, y = \left|x + \frac{4}{x} - a\right| + a$ 在区间 $[1,4]$ 上的最大值为 5,求 a 的取值范 围.

解: 令 $x + \frac{4}{x} = t \in [4,5]$,则 $y = |t-a| + a$

那么必有 $y|_{t=4} = 5, y|_{t=5} \le 5$ 可得 $a = \frac{9}{2}$ 或 $y\big|_{t=5} = 5, y|_{t=4} \le 5$ 可得 $a \le \frac{9}{2}$

综上, $a \le \frac{9}{2}$

注: 含有绝对值的一次函数可以直接选取其端点值的中点,那么我们讨论这个中点与 a 的关系 即可。

当 $a = \frac{9}{2}$ 时,恒成立; 当 $a < \frac{9}{2}$ 时,符合条件; 当 $a > \frac{9}{2}$ 时不成立.

四、曲直分开, 转而高度差

尽管这种做法属于切比雪夫最佳逼近定理, 但是为了考虑到大多数同学的程度以及不超纲的原 则, 我们先介绍这种做法, 即分成一个曲线和直线, 我们去寻找其高度差即可。而关于切比雪夫最 佳逼近定理, 我们在后文会详细阐述。

1. (2016 年浙江学考) $f(x) = \left|\frac{2}{x} - ax - b\right| \left(a、b \in R\right)$,对于任意实数 a 和 b ,总存在 $x_0 \in [1,2]$,

使得 $f(x_0) \ge m$,求 m 的取值范围.

解: $f(x) = \left|\frac{2}{x} - ax - b\right| = \left|\frac{2}{x} - (ax+b)\right| = |g(x) - h(x)|, g(x) = \frac{2}{x}, h(x) = ax + b$

转化为两个函数值的高度差

$\max f(x) \ge m, \forall a > 0, b \in R$ (最大高度差)

$\min\{\max f(x)\} \ge m$ (最大高度差的最小值),易得 $m \le \frac{1}{2}$