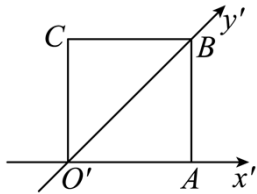


2023-2024 学年度第一学期高二年级数学期中练习

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分. 在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 如图，一个水平放置的平面图形的直观图是边长为 2 的正方形，则原图形的周长是 ()



A. 16

B. 12

C. $4+8\sqrt{2}$

D. $4+4\sqrt{2}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据斜二测画法分析运算.

【详解】在直观图中， $O'A=2$, $O'B=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$,

可得原图形是平行四边形，其底边长 2，高为 $2\times 2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$,

则另一边长为 $\sqrt{2^2+(4\sqrt{2})^2}=6$ ，所以原图形的周长为 $2\times(2+6)=16$.

故选：A.

2. 已知 m, n 为两条不同的直线， α, β 为两个不同的平面，则下列命题中正确的是 ()

A. 若 $m\subset\alpha, n\subset\alpha, m\parallel\beta, n\parallel\beta$ ，则 $\alpha\parallel\beta$

B. 若 $n\parallel m, n\perp\alpha$ ，则 $m\perp\alpha$

C. 若 $m\perp\alpha, m\perp n$ ，则 $n\parallel\alpha$

D. 若 $\alpha\parallel\beta, m\subset\alpha, n\subset\beta$ ，则 $m\parallel n$

【答案】B

【解析】

【分析】根据空间线面位置关系依次判断各选项即可得答案.

【详解】解：对于 A，若 $m\subset\alpha, n\subset\alpha, m\parallel\beta, n\parallel\beta, m\cap n=P$ ，则 $\alpha\parallel\beta$ ，故错误；

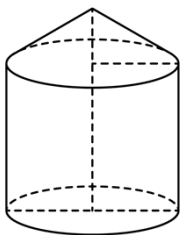
对于 B， $n\parallel m, n\perp\alpha$ ，则 $m\perp\alpha$ ，正确；

对于 C， $m\perp\alpha, m\perp n$ ，则 $n\parallel\alpha$ 或 $n\subset\alpha$ ，故错误；

对于 D，若 $\alpha\parallel\beta, m\subset\alpha, n\subset\beta$ ，则 $m\parallel n$ 或异面，故错误.

故选：B

3. 如图所示，圆柱与圆锥的组合体，已知圆锥部分的高为 $\frac{1}{2}$ ，圆柱部分的高为2，底面圆的半径为1，则该组合体的体积为（ ）



A. $\frac{\pi}{3}$

B. 2π

C. $\frac{13\pi}{6}$

D. $\frac{5\pi}{2}$

【答案】C

【解析】

【分析】利用圆柱和圆锥的体积公式即可求解.

【详解】依题意可知，底面圆的半径为 $r=1$ ，圆柱部分的高为 $h_1=2$ ，圆锥部分的高为 $h_2=\frac{1}{2}$ ，

所以圆柱部分的体积为 $V_1=\pi r^2 h_1=\pi \times 1^2 \times 2=2\pi$ ，

圆锥部分的体积为 $V_2=\frac{1}{3}\pi r^2 h_2=\frac{1}{3} \times \pi \times 1^2 \times \frac{1}{2}=\frac{1}{6}\pi$ ，

所以该组合体的体积为 $V=V_1+V_2=2\pi+\frac{1}{6}\pi=\frac{13}{6}\pi$.

故选：C.

4. 已知 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ ， $\vec{c}$ 是不共面的三个向量，则能构成空间的一个基底的一组向量是（ ）

A. $3\vec{a}$ ， $\vec{a}-\vec{b}$ ， $\vec{a}+2\vec{b}$

B. $2\vec{b}$ ， $\vec{b}-2\vec{a}$ ， $\vec{b}+2\vec{a}$

C. $\vec{a}$ ， $2\vec{b}$ ， $\vec{b}-\vec{c}$

D. $\vec{c}$ ， $\vec{a}+\vec{c}$ ， $\vec{a}-\vec{c}$

【答案】C

【解析】

【分析】利用空间向量的基底的定义，逐项判断作答.

【详解】向量 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ ， $\vec{c}$ 是不共面的三个向量，

对于 A， $3\vec{a}=2(\vec{a}-\vec{b})+(\vec{a}+2\vec{b})$ ，则向量 $3\vec{a}$ ， $\vec{a}-\vec{b}$ ， $\vec{a}+2\vec{b}$ 共面，A 不能构成空间基底；

对于 B， $2\vec{b}=(\vec{b}-2\vec{a})+(\vec{b}+2\vec{a})$ ，则向量 $2\vec{b}$ ， $\vec{b}-2\vec{a}$ ， $\vec{b}+2\vec{a}$ 共面，B 不能构成空间基底；

对于 D， $2\vec{c}=(\vec{a}+\vec{c})-(\vec{a}-\vec{c})$ ，则向量 $\vec{c}$ ， $\vec{a}+\vec{c}$ ， $\vec{a}-\vec{c}$ 共面，D 不能构成空间基底；

对于 C, 假定向量 $\vec{a}, 2\vec{b}, \vec{b}-\vec{c}$ 共面, 则存在不全为 0 的实数 λ_1, λ_2 , 使得 $\vec{a} = 2\lambda_1\vec{b} + \lambda_2(\vec{b}-\vec{c})$,

整理得 $\vec{a} - (2\lambda_1 + \lambda_2)\vec{b} + \lambda_2\vec{c} = \vec{0}$, 而向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 不共面, 则有 $\begin{cases} 1=0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$, 显然不成立,

所以向量 $\vec{a}, 2\vec{b}, \vec{b}-\vec{c}$ 不共面, 能构成空间的一个基底, C 能构成空间基底.

故选: C

5. 设 $x, y \in \mathbf{R}$, 向量 $\vec{a} = (x, 1, 1)$, $\vec{b} = (1, y, 1)$, $\vec{c} = (3, -6, 3)$ 且 $\vec{a} \perp \vec{c}$, $\vec{b} // \vec{c}$, 则 $|\vec{a} + \vec{b}| =$ ()

A. $2\sqrt{2}$

B. $2\sqrt{3}$

C. 4

D. 3

【答案】D

【解析】

【分析】利用空间向量垂直与共线的坐标表示求出 x, y 的值, 求出向量 $\vec{a} + \vec{b}$ 的坐标, 利用空间向量的模长公式可求得结果.

【详解】因为 $\vec{a} \perp \vec{c}$, 则 $\vec{a} \cdot \vec{c} = 3x - 6 + 3 = 0$, 解得 $x = 1$, 则 $\vec{a} = (1, 1, 1)$,

因为 $\vec{b} // \vec{c}$, 则 $\frac{1}{3} = \frac{y}{-6}$, 解得 $y = -2$, 即 $\vec{b} = (1, -2, 1)$,

所以, $\vec{a} + \vec{b} = (2, -1, 2)$, 因此, $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3$.

故选: D.

6. 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 直线 AB_1 与平面 ACC_1A_1 所成的角为 ()

A. 30°

B. 45°

C. 60°

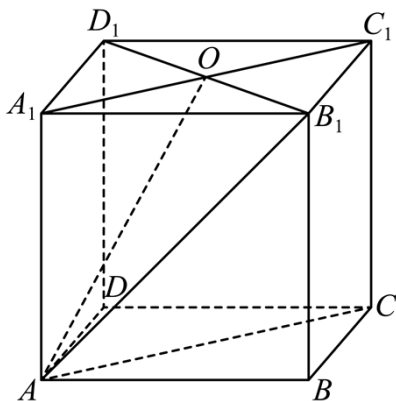
D. 90°

【答案】A

【解析】

【分析】根据给定条件, 作出直线与平面所成的角, 再在三角形中求解作答.

【详解】正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 连接 $B_1D_1 \perp A_1C_1 = O$, 连接 AO , 如图,



则有 $B_1O \perp A_1C_1$ ，而 $AA_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$ ， $B_1O \subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$ ，即有 $B_1O \perp AA_1$ ，

又 $AA_1 \cap A_1C_1 = A_1$ ， $AA_1, A_1C_1 \subset$ 平面 ACC_1A_1 ，因此 $B_1O \perp$ 平面 ACC_1A_1 ，

则 $\angle B_1AO$ 是直线 AB_1 与平面 ACC_1A_1 所成的角，

在 $\text{Rt}\triangle AB_1O$ 中， $\angle AOB_1 = 90^\circ$ ， $B_1O = \frac{1}{2}B_1D_1 = \frac{1}{2}AB_1$ ，则有 $\angle B_1AO = 30^\circ$ ，

所以直线 AB_1 与平面 ACC_1A_1 所成的角为 30° 。

故选：A

7. 已知点 P 是正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱 A_1D_1 上的一个动点，设异面直线 AB 与 CP 所成的角为 α ，

则 $\cos \alpha$ 的最小值是（ ）

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

D. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

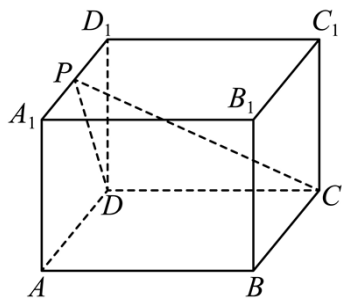
【答案】A

【解析】

【分析】由正方体的性质可知所求为 $\cos \angle DCP$ 的最小值，又因为 $CD \perp DP$ ，可知当点 P 在 A_1 处时， $\cos \alpha$ 有最小值，计算可得结果。

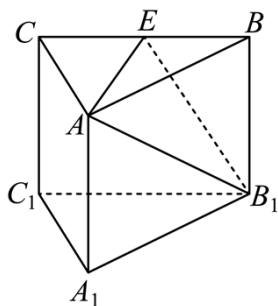
【详解】解：由正方体的性质可知： $AB \parallel CD$ ，则异面直线 AB 与 CP 所成的角为直线 CD 与直线 CP 所成的角，即 $\angle DCP$ 或其补角。又因为 $CD \perp$ 平面 ADD_1A_1 ，所以 $CD \perp DP$ ，即求 $\cos \angle DCP$ 的最小值。

$$\cos \alpha = \frac{CD}{CP} = \frac{CD}{\sqrt{CD^2 + DD_1^2 + D_1P^2}}，\text{当点 } P \text{ 在 } A_1 \text{ 处时，} (\cos \alpha)_{\min} = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$



故选：A.

8. 如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧棱 $AA_1 \perp$ 底面 $A_1B_1C_1$ ，底面三角形 $A_1B_1C_1$ 是正三角形， E 是 BC 的中点，则下列叙述正确的是（ ）



A. CC_1 与 B_1E 是异面直线

B. $AC \perp$ 平面 ABB_1A_1

C. AE, B_1C_1 为异面直线，且 $AE \perp B_1C_1$

D. $A_1C_1 \parallel$ 平面 AB_1E

【答案】C

【解析】

【分析】

逐一分析选项，得到正确答案，A.根据是否共面分析；B.用反证法证明；C.利用线面垂直的性质定理证明；D.利用 $AC \parallel A_1C_1$ ，判断线面是否平行.

【详解】对于 A, CC_1 与 B_1E 都在平面 CC_1B_1B 内，且 CC_1 与 B_1E 是相交直线，故 A 错误；

对于 B, 假设 $AC \perp$ 平面 ABB_1A_1 ，则 AC 垂直于平面内的任一条直线，即 $AC \perp AB$ ，这与题设“底面三角形 $A_1B_1C_1$ 是正三角形”矛盾，所以假设不成立，故 B 错误；

对于 C, Q 点 $B_1 \notin AE$ ，直线 B_1C_1 交平面 AEB_1 于点 B_1 ， $\therefore AE, B_1C_1$ 为异面直线；

由题知 $\triangle ABC$ 是正三角形，又 E 是 BC 的中点， $\therefore AE \perp BC$ ，又 $AE \perp C_1C$ ，且 $BC \cap C_1C = C \therefore AE \perp$ 底面 BB_1C_1C ， $\therefore AE \perp B_1C_1$ ，故 C 正确；

对于 D, Q 直线 AC 交平面 AB_1E 于点 A ，又 $AC \parallel A_1C_1$ ， $\therefore$ 直线 A_1C_1 与平面 AB_1E 相交，故 D 错误.

故选：C

【点睛】本题考查异面直线判断、异面直线垂直、线面垂直、线面平行等命题的真假性判断，考查学生的空间想象能力与逻辑推理能力，属于基础题。

9. 在正三棱锥 $P-ABC$ 中， O 是 $\triangle ABC$ 的中心， $PA=AB=2$ ，则 $\vec{PO} \cdot \vec{PA} = (\quad)$

- A. $\frac{5}{9}$ B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ C. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ D. $\frac{8}{3}$

【答案】D

【解析】

【分析】将 $\vec{PA}$ 转化为 $\vec{PO} + \vec{OA}$ ，由三棱锥是正三棱锥可知 $PO \perp OA$ ，即可将 $\vec{PO} \cdot \vec{PA}$ 转化为 $|\vec{PO}|^2$ ，结合勾股定理即可求解。

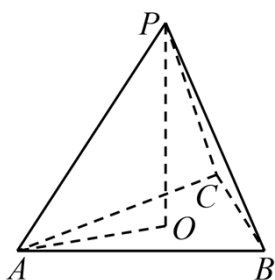
【详解】Q $P-ABC$ 为正三棱锥， O 为 $\triangle ABC$ 的中心，

$\therefore PO \perp$ 平面 ABC ， $\triangle ABC$ 是等边三角形， $\therefore PO \perp AO$ ，

$$\therefore \vec{PO} \cdot \vec{OA} = 0, |\vec{AO}| = \frac{2}{3} \cdot |\vec{AB}| \cdot \sin 60^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{故 } \vec{PO} \cdot \vec{PA} = \vec{PO} \cdot (\vec{PO} + \vec{OA}) = |\vec{PO}|^2 = |\vec{AP}|^2 - |\vec{AO}|^2 = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}.$$

故选：D.



10. 在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， E 为 BC 的中点，点 P 在底面 $ABCD$ 上移动，且满足 $B_1P \perp D_1E$ ，则线段 B_1P 的长度的最大值为 ()

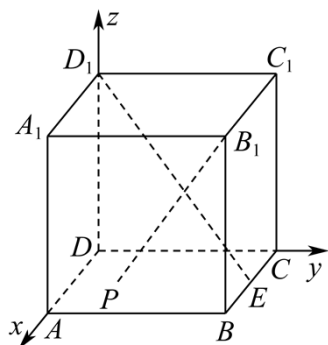
- A. 2 B. 3 C. $2\sqrt{2}$ D. $\frac{6\sqrt{5}}{5}$

【答案】B

【解析】

【分析】以 D 为原点， DA 、 DC 、 DD_1 所在直线分别为 x 、 y 、 z 轴建立空间直角坐标系，设 $P(a, b, 0)$ ，根据 $\vec{B_1P} \cdot \vec{D_1E} = 0$ 求出 a 、 b 之间的关系，利用两点间距离公式结合二次函数性质可求 B_1P 长度的最大值。

【详解】以 D 为原点， DA 、 DC 、 DD_1 所在直线分别为 x 、 y 、 z 轴建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $D_1(0, 0, 2)$ ， $E(1, 2, 0)$ ， $B_1(2, 2, 2)$ ，设 $P(a, b, 0)$ ， $0 \leq a \leq 2$ ， $0 \leq b \leq 2$ ，

则 $\vec{B_1P} = (a-2, b-2, -2)$ ， $\vec{D_1E} = (1, 2, -2)$ ，

由 $B_1P \perp D_1E$ ， $\therefore \vec{B_1P} \cdot \vec{D_1E} = a-2+2(b-2)+4=0$ ，

$\therefore a+2b-2=0$ ，则易求 $0 \leq b \leq 1$ ，

$$|\vec{B_1P}|^2 = (a-2)^2 + (b-2)^2 + 4 = (-2b)^2 + (b-2)^2 + 4 = 5b^2 - 4b + 8,$$

由二次函数的性质可知，当 $b=1$ 时， $5b^2 - 4b + 8$ 可取到最大值 9，

$\therefore$ 线段 B_1P 的长度的最大值为 3.

故选：B.

二、填空题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分.

11. 设向量 $\vec{AB} = (1, 2, 4)$ ， $\vec{CD} = (m, 1, 1)$ ， $\vec{AB} \perp \vec{CD}$ ，则实数 $m =$ _____.

【答案】-6

【解析】

【分析】

利用向量数量积坐标计算公式直接求解.

【详解】因为 $\vec{AB} \perp \vec{CD}$ ，

所以 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = m + 2 + 4 = 0$,

解得 $m = -6$.

故答案为: -6 .

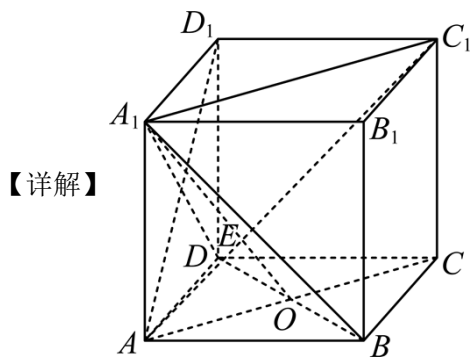
【点睛】求两个向量的数量积有三种方法: 利用定义; 利用向量的坐标运算; 利用数量积的几何意义. 具体应用时可根据已知条件的特征来选择, 同时要注意数量积运算律的应用.

12. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 3, 则 C_1 到平面 A_1BD 的距离为_____.

【答案】 $2\sqrt{3}$

【解析】

【分析】根据正方体的性质以及线面垂直的判定定理、性质定理, 可得出 $AC_1 \perp$ 平面 A_1BD . 构造辅助线得出 AC_1 与平面 A_1BD 的交点 E , 然后根据相似三角形, 即可得出答案.



如图, 连接 AC_1 , AD_1 ,

由正方体的性质可知, $C_1D_1 \perp$ 平面 ADD_1A_1 , $A_1D \perp AD_1$.

因为 $A_1D \subset$ 平面 ADD_1A_1 , 所以 $C_1D_1 \perp A_1D$.

因为 $C_1D_1 \subset$ 平面 AC_1D_1 , $AD_1 \subset$ 平面 AC_1D_1 , $AD_1 \cap C_1D_1 = D_1$,

所以 $A_1D \perp$ 平面 AC_1D_1 .

因为 $AC_1 \subset$ 平面 AC_1D_1 , 所以 $A_1D \perp AC_1$.

同理可得 $AC_1 \perp A_1B$.

因为 $A_1D \subset$ 平面 A_1BD , $A_1B \subset$ 平面 A_1BD , $A_1D \cap A_1B = A_1$,

所以 $AC_1 \perp$ 平面 A_1BD .

连接 AC 交 BD 于 O , 连接 A_1O 交 AC_1 于点 E ,

则 C_1 到平面 A_1BD 的距离即等于 C_1E 的长.

因为 $AA_1 \parallel CC_1$, 且 $AA_1 = CC_1$, 所以四边形 ACC_1A_1 为平行四边形.

又 $AO = \frac{1}{2}AC$, 所以 $\triangle AOE \sim \triangle C_1A_1E$, 则 $\frac{AE}{C_1E} = \frac{AO}{A_1C_1} = \frac{1}{2}$,

所以 $C_1E = \frac{2}{3}AC_1 = 2\sqrt{3}$, 即 C_1 到平面 A_1BD 的距离为 $2\sqrt{3}$.

故答案为: $2\sqrt{3}$.

13. 已知直线 m, n 的方向向量分别为 $\vec{a} = (1, -2, 2)$, $\vec{b} = (1, 3, 0)$, 则直线 m, n 夹角的余弦值为_____.

【答案】 $\frac{\sqrt{10}}{6}$

【解析】

【分析】直接利用向量的夹角公式求解即可.

【详解】设直线 m, n 夹角为 θ ,

$$\text{则 } \cos \theta = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{|1-6|}{\sqrt{1+4+4}\sqrt{1+9}} = \frac{\sqrt{10}}{6}.$$

故答案为: $\frac{\sqrt{10}}{6}$.

14. 在古代数学中, 把正四棱台叫做方亭, 数学家刘徽用切割的方法巧妙地推导出了方亭的体积公式

$V = \frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2)h$, a 为方亭的下底面边长, b 为上底面边长, h 为高. 某地计划在一片平原地带挖一

条笔直的沟渠, 渠的横截面为等腰梯形, 上底为10米, 下底为6米, 深2米, 长为837.5米, 并把挖出的土堆成一个方亭, 设计方亭的下底面边长为70米, 高为6米, 则其侧面与下底面所成的二面角的正切值为_____.

【答案】 $\frac{6}{25}$ ## 0.24

【解析】

【分析】计算出挖出的土的体积, 利用台体体积公式求出 b 的值, 然后作出图形, 找出其侧面与下底面所成的二面角的平面角, 即可计算出侧面与下底面所成的二面角的正切值.

【详解】由题意知挖出的土的体积 $V = 837.5 \times \frac{1}{2} \times (10 + 6) \times 2 = 13400$,

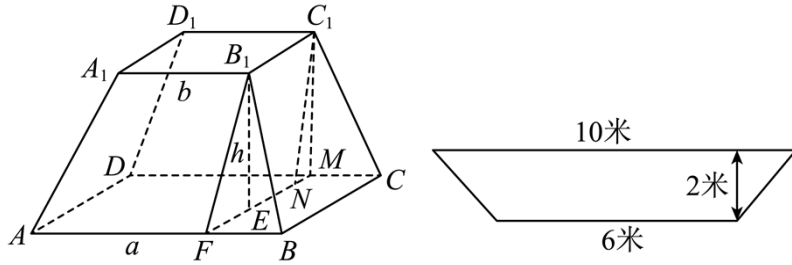
则由 $\frac{1}{3} \times (70^2 + 70b + b^2) \times 6 = 13400$, 整理得 $b^2 + 70b - 1800 = 0$,

解得 $b = 20$ 或 $b = -90$ (舍去).

在正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=70$, $A_1B_1=20$,

设点 B_1 在底面 $ABCD$ 内的射影为点 E , 点 C_1 在底面 $ABCD$ 内的射影为点 N ,

设直线 EN 分别交 AB 、 CD 于点 F 、 M , 连接 B_1F 、 C_1M ,



因为 $B_1E \perp$ 平面 $ABCD$, $C_1N \perp$ 平面 $ABCD$, 所以, $B_1E \parallel C_1N$,

又因为平面 $ABCD \parallel$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$, 所以, $B_1E = C_1N$,

故四边形 B_1C_1NE 为矩形, 所以, $FM \parallel B_1C_1$,

因为 $AB \perp BC$, $B_1C_1 \parallel BC$, 则 $FM \parallel BC$, 所以, $AB \perp FM$,

因为 $B_1E \perp$ 平面 $ABCD$, $AB \subset$ 平面 $ABCD$, 则 $AB \perp B_1E$,

因为 $FM \cap B_1E = E$, FM 、 $B_1E \subset$ 平面 B_1C_1MF , 所以, $AB \perp$ 平面 B_1C_1MF ,

因为 $B_1F \subset$ 平面 B_1C_1MF , 所以, $B_1F \perp AB$,

所以, 侧面 AA_1B_1B 与底面 $ABCD$ 所成二面角的平面角为 $\angle B_1FE$,

易知四边形 AA_1B_1B 、 CC_1D_1D 是全等的等腰梯形, 且 $BB_1 = CC_1$, $\angle ABB_1 = \angle DCC_1$,

所以, $B_1F = BB_1 \sin \angle ABB_1 = CC_1 \sin \angle DCC_1 = C_1M$,

因为 $FM \parallel BC$, $BF \parallel CM$ 且 $FB \perp BC$, 则四边形 $BCMF$ 为矩形, 故 $FM = BC$, 则 $FM \neq B_1C_1$,

故四边形 B_1C_1MF 为等腰梯形,

因为 $B_1F = C_1M$, $B_1E = C_1N$, $\angle B_1EF = \angle C_1NM = 90^\circ$, 故 $\triangle B_1EF \cong \triangle C_1NM$,

所以, $EF = MN$,

又因为 $EN = B_1C_1 = 20$, $FM = BC = 70$, 故 $EF = \frac{FM - EN}{2} = \frac{70 - 20}{2} = 25$,

在 $\text{Rt}\triangle B_1EF$ 中, $\tan \angle B_1FE = \frac{B_1E}{EF} = \frac{6}{25}$.

故答案为: $\frac{6}{25}$.

15. 已知圆锥的底面半径为 $2\sqrt{3}$, 高为 2, S 为顶点, A, B 为底面圆周上的两个动点, 则下列说法正确的是_____.

①圆锥的体积为 8π ;

②圆锥侧面展开图的圆心角大小为 $\sqrt{3}\pi$;

③圆锥截面 SAB 面积的最大值为 $4\sqrt{3}$;

④若圆锥的顶点和底面上的所有点都在一个球面上, 则此球的体积为 $\frac{256}{3}\pi$.

【答案】①②④

【解析】

【分析】根据题意求出圆锥的母线长, 体积, 侧面展开图的弧长, 轴截面的面积, 外接球体积, 即可得出结论.

【详解】Q 圆锥的底面半径 $r = 2\sqrt{3}$, 高为 $h = 2$,

$\therefore$ 圆锥的母线长 $SA = SB = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = 4$,

$\therefore$ 圆锥的体积 $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \times (2\sqrt{3})^2 \times 2 = 8\pi$, ①正确;

设圆锥侧面展开图的圆心角大小为 α , 则 $2\pi \times 2\sqrt{3} = \alpha \times 4$, $\alpha = \sqrt{3}\pi$, ②正确;

当圆锥截面 SAB 为圆锥的轴截面时, 此时 $SA = SB = 4$, $AB = 4\sqrt{3}$,

则 $\cos \angle ASB = \frac{SA^2 + SB^2 - AB^2}{2SA \cdot SB} = -\frac{1}{2}$, 又 $\angle ASB \in (0, \pi)$,

$\therefore \angle ASB = \frac{2\pi}{3}$,

则当 $\angle ASB = \frac{\pi}{2}$ 时, 圆锥截面 SAB 面积的最大,

此时 $S_{\triangle ASB} = \frac{1}{2} \cdot SA \cdot SB \cdot \sin \angle ASB = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 \times 1 = 8$, 故③错误;

圆锥的顶点和底面上的所有点都在同一个球面上, 即为圆锥的外接球,

设圆锥的外接球半径为 R ,

由球的性质可知 $R^2 = (h - R)^2 + r^2$, 即 $R^2 = (2 - R)^2 + (2\sqrt{3})^2$,

解得 $R = 4$,

所以外接球体积 $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \times 4^3 = \frac{256\pi}{3}$, ④正确.

故答案为: ①②④.

三、解答题共 4 小题, 共 40 分. 解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

16. 设 $x, y \in \mathbb{R}$, 向量 $\vec{a} = (x, 1, 1)$, $\vec{b} = (1, y, 1)$, $\vec{c} = (2, -4, 2)$, 且 $\vec{a} \perp \vec{b}$, $\vec{b} \parallel \vec{c}$.

(1) 求 $|\vec{a} + \vec{b}|$;

(2) 求向量 $\vec{a} + \vec{b}$ 与 $2\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ 夹角的大小.

【答案】(1) 3 (2) $\frac{\pi}{2}$

【解析】

【分析】根据空间向量垂直和平行的性质, 求出 x, y , 进而求出向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$, 再进行相应运算即可.

【小问 1 详解】

由题意, $\vec{a} \perp \vec{b}$, $\vec{b} \parallel \vec{c}$,

$$\text{可得} \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ \frac{1}{2} = \frac{y}{-4} = \frac{1}{2} \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases},$$

则 $\vec{a} = (1, 1, 1)$, $\vec{b} = (1, -2, 1)$, 所以 $\vec{a} + \vec{b} = (2, -1, 2)$,

$$\text{故} |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = 3.$$

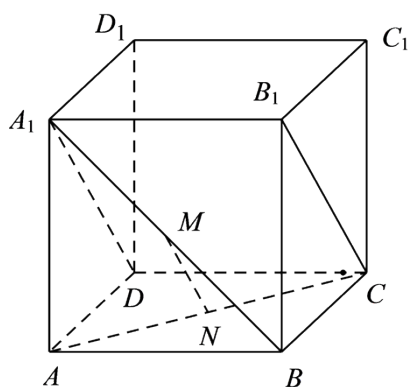
【小问 2 详解】

因为 $2\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = (1, 4, 1)$,

$$\text{所以} (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (2\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}) = 2 \times 1 + (-1) \times 4 + 2 \times 1 = 0,$$

故向量 $\vec{a} + \vec{b}$ 与 $2\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{2}$.

17. 如图, 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 棱长为 2, M, N 分别为 A_1B 、 AC 的中点.



(1) 证明: $MN \parallel$ 平面 BCC_1B_1 ;

(2) 求 A_1B 与平面 A_1B_1CD 所成角的大小.

【答案】(1) 证明见解析

(2) 30°

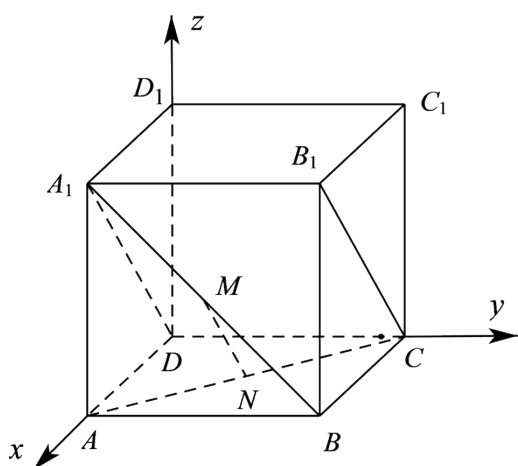
【解析】

【分析】(1) 以点 D 为坐标原点, DA 为 x 轴, DC 为 y 轴, DD_1 为 z 轴建立空间直角坐标系, 求出 $\overrightarrow{MN}$ 和平面 BCC_1B_1 的法向量, 利用空间向量证明即可,

(2) 求出平面 A_1B_1CD 的法向量, 利用空间向量求解即可.

【小问 1 详解】

如图, 以点 D 为坐标原点, DA 为 x 轴, DC 为 y 轴, DD_1 为 z 轴建立空间直角坐标系.



则 $A(2,0,0)$, $C(0,2,0)$, $A_1(2,0,2)$, $B(2,2,0)$, $B_1(2,2,2)$, $M(2,1,1)$, $N(1,1,0)$.

所以 $\overrightarrow{MN} = (-1, 0, -1)$,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/396132014233010211>