专题 1.2　与三角形有关角的几何综合

典例精析

【典例 1】【问题背景】

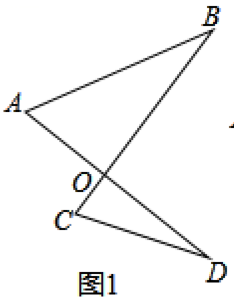


图1

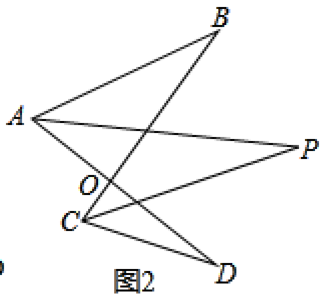


图2

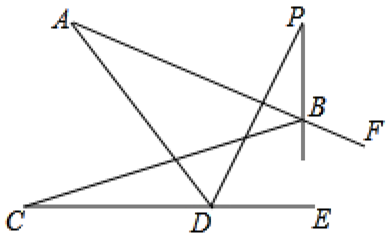


图3

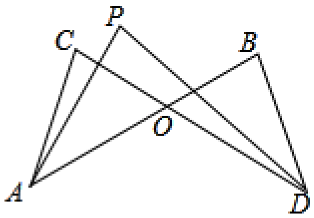


图4

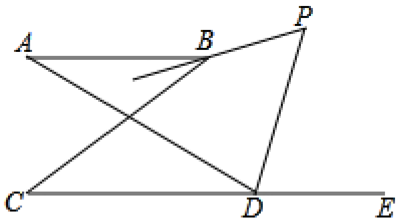


图5

（1）如图 1 的图形我们把它称为“8 字形”，请说理证明$\angle A+\angle B=\angle C+\angle D$.

【简单应用】（可直接使用问题（1）中的结论）

（2）如图 2，AP、CP分别平分$\angle BAD$、$\angle BCD$，

①若$\angle ABC=28°$，$\angle ADC=20°$，求$\angle P$的度数；

②$\angle D$和$\angle B$为任意角时，其他条件不变，试直接写出$\angle P$与$\angle D$、$\angle B$之间数量关系.

【问题探究】

（3）如图 3，直线BP平分$\angle ABC$的邻补角$\angle FBC$，DP平分$\angle ADC$ 的邻补角$\angle ADE$，

①若$\angle A=30°$，$\angle C=18°$，则$\angle P$的度数为____________；

②$\angle A$和$\angle C$为任意角时，其他条件不变，试直接写出$\angle P$与$\angle A$、$\angle C$之间数量关系.

【拓展延伸】

（4）在图 4 中，若设$\angle C=x$，$\angle B=y$，$\angle CAP=\frac{1}{4}\angle CAB$，$\angle CDP=\frac{1}{4}\angle CDB$，试问$\angle P$与$\angle C$、$\angle B$之间的数量关系为____________；（用 x、y 的代数式表示$\angle P$）

（5）在图 5 中，直线BP平分$\angle ABC$，DP平分$\angle ADC$的外角$\angle ADE$，猜想$\angle P$与$\angle C$、$\angle A$的关系，直接写出结论____________.

【思路点拨】

（1）利用三角形内角和定理解决问题即可；

（2）①设$\angle BAP=\angle PAD=x$，$\angle BCP=\angle PCD=y$，利用（1）中结论，构建方程组即可解决问题；

②由①的结论即可得到数量关系；

（3）①如图3中，设$\angle CBJ=\angle JBF=x$，$\angle ADP=\angle PDE=y$．利用（1）中结论，构建方程组即可解决问题；

②与（3）中①相同；

（4）如图4中，设$\angle CAP=\alpha$，$\angle CDP=\beta$，则$\angle PAB=3\alpha$，$\angle PDB=3\beta$，利用（1）中结论，构建方程组即可解决问题；

（5）如图5中，延长AB交PD于J，设$\angle PBJ=x$，$\angle ADP=\angle PDE=y$．利用（1）中结论，构建共线时即可解决问题．

【解题过程】

（1）解：如图1中，

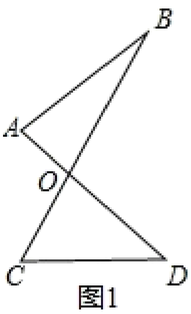


图1

$\because \angle A+\angle B+\angle AOB=180°$，$\angle C+\angle D+\angle COD=180°$，$\angle AOB=\angle COD$，

$\therefore \angle A+\angle B=\angle C+\angle D$；

（2）解：①如图2中，

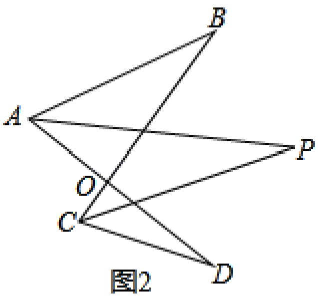


图2

设$\angle BAP=\angle PAD=x$，$\angle BCP=\angle PCD=y$，

则有$\begin{cases}x+\angle B=y+\angle P\\x+\angle P=y+\angle D\end{cases}$，

$\therefore \angle B-\angle P=\angle P-\angle D$，

$\therefore 2\angle P=\angle B+\angle D$，

$\therefore \angle P=\frac{1}{2}(\angle B+\angle D)=\frac{1}{2}(28°+20°)=24°$；

②由①得：$2\angle P=\angle B+\angle D$；

（3）解：①如图 3 中，设$\angle CBJ=\angle JBF=x$，$\angle ADP=\angle PDE=y$，

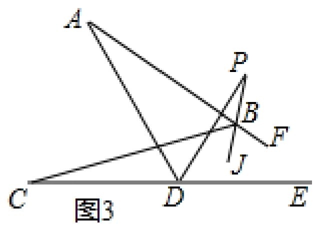


图3

则有，$\begin{cases}\angle P+x=\angle A+y\\ \angle A+180°-2x=\angle C+180°-2y\end{cases}$

$\therefore 2\angle P=\angle A+\angle C$，

$\therefore \angle P=\frac{1}{2}\times(30°+18°)=24°$；

故答案为：24° ；

②设$\angle CBJ=\angle JBF=x$，$\angle ADP=\angle PDE=y$

则有$\begin{cases}\angle P+x=\angle A+y\\ \angle A+180-2x=\angle C+180-2y\end{cases}$，

$\therefore 2\angle P=\angle A+\angle C$；

（4）解：如图 4 中，设$\angle CAP=\alpha$，$\angle CDP=\beta$，则$\angle PAB=3\alpha$，$\angle PDB=3\beta$，

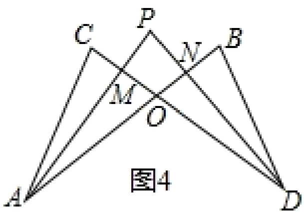


图4

则有$\begin{cases}\angle P+\beta=\angle C+\alpha\\ \angle P+3\alpha=\angle B+3\beta\end{cases}$，

$\therefore 4\angle P=3\angle C+\angle B$ ，

$\therefore \angle P=\frac{1}{4}(3x+y)$，

故答案为$\angle P=\frac{1}{4}(3x+y)$；

（5）解：如图 5 中，延长AB交PD于 J，设$\angle PBJ=x$，$\angle ADP=\angle PDE=y$

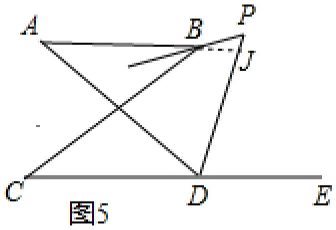


图5

则有$\angle A+2x=\angle C+180°-2y$，

$\therefore x+y=90°+\frac{1}{2}$（$\angle C-\angle A$），

$\because \angle P+x+\angle A+y=180°$，

$\therefore x+y=180°-\angle P-\angle A$，

$\therefore \angle P=90°-\frac{1}{2}\angle C-\frac{1}{2}\angle A$；

故答案为$\angle P=90°-\frac{1}{2}\angle C-\frac{1}{2}\angle A$．

学霸必刷

1．（2023春·全国·七年级专题练习）探究：

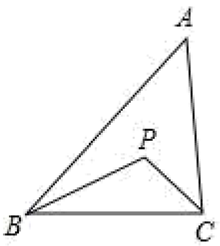


图1

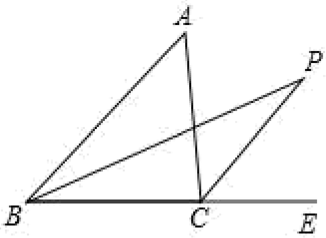


图2

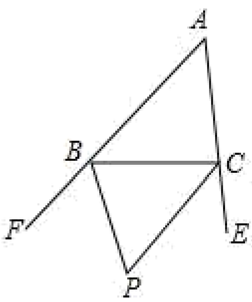


图3

（1）如图1，在△ABC中，BP平分$\angle ABC$，CP平分$\angle ACB$．求证：$\angle P=90°+\frac{1}{2}\angle A$．

（2）如图2，在△ABC中，BP平分$\angle ABC$，CP平分外角$\angle ACE$．猜想$\angle P$和$\angle A$有何数量关系，并证明你的结论．

（3）如图3，BP平分$\angle CBF$，CP平分$\angle BCE$．猜想$\angle P$和$\angle A$有何数量关系，请直接写出结论．

2．（2023 秋·浙江·八年级专题练习）如图（1）$\triangle ABC$是一个三角形的纸片，点D、E分别是$\triangle ABC$边上的两点，

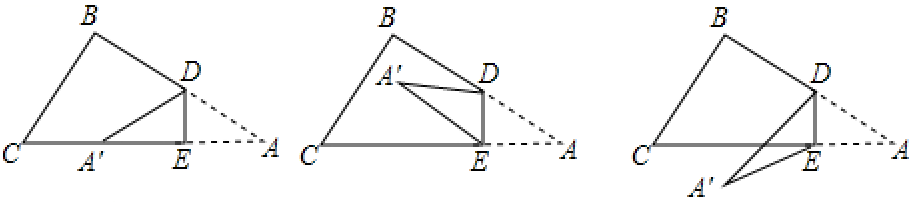


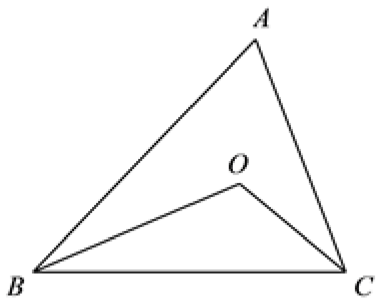
图1　　　　图2　　　　图3

研究（1）：如果沿直线DE折叠，写出$\angle BDA'$与$\angle A$的关系，并说明理由．

研究（2）：如果折成图 2 的形状，猜想$\angle BDA'$、$\angle CEA'$和$\angle A$的关系，并说明理由．

研究（3）：如果折成图 3 的形状，猜想$\angle BDA'$、$\angle CEA'$和$\angle A$的关系，并说明理由．

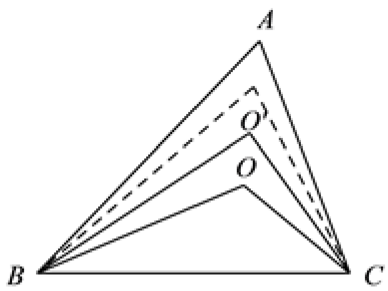
3．（2023 春·全国·七年级专题练习）如图，在$\triangle ABC$中，$\angle ABC$与$\angle ACB$的角平分线交于O点.



（1）若$\angle A = 40°$，则$\angle BOC =$_________°；

（2）若$\angle A = n°$，则$\angle BOC =$_________°；

（3）若$\angle A = n°$，$\angle ABC$与$\angle ACB$的角平分线交于O点，$\angle ABO$的平分线与$\angle ACO$的平分线交于点O_1，……，$\angle O_{2016}BD$的平分线与$\angle O_{2016}CE$的平分线交于点O_{2017}，则$\angle O_{2017} =$_________°.



4．（2023春·七年级课时练习）阅读材料：

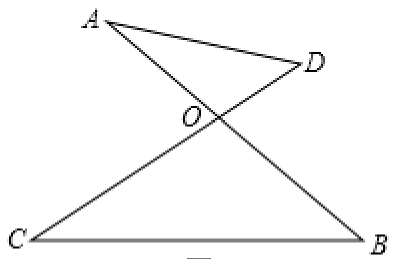


图1

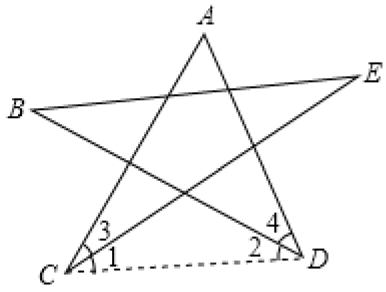


图2

如图1，AB、CD交于点O，我们把△AOD和△BOC叫做对顶三角形．

结论：若△AOD和△BOC是对顶三角形，则∠A+∠D＝∠B+∠C．

结论应用举例：

如图2：求五角星的五个内角之和，即∠A+∠B+∠ACE+∠ADB+∠E的度数．

解：连接CD，由对顶三角形的性质得：∠B+∠E＝∠1+∠2，

在△ACD中，∵∠A+∠ACD+∠ADC＝180°，

即∠A+∠3+∠1+∠2+∠4＝180°，

∴∠A+∠ACE+∠B+∠E+ADB＝180°

即五角星的五个内角之和为180°．

解决问题：

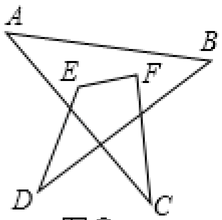
（1）如图①，∠A+∠B+∠C+∠D+∠E+∠F＝__；

（2）如图②，∠A+∠B+∠C+∠D+∠E+∠F+∠G＝__；

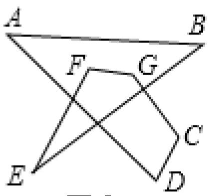
（3）如图③，∠A+∠B+∠C+∠D+∠E+∠F+∠G+∠H＝__；

（4）如图④，∠A+∠B+∠C+∠D+∠E+∠F+∠G+∠H+∠M+∠N＝__；

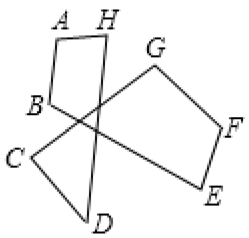
请你从图③或图④中任选一个，写出你的计算过程．



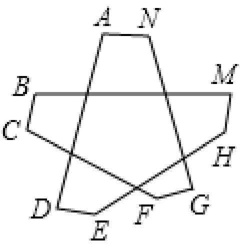
图①



图②



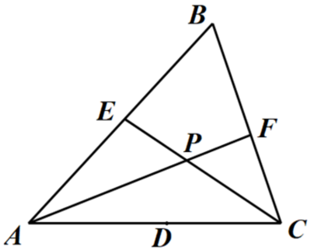
图③



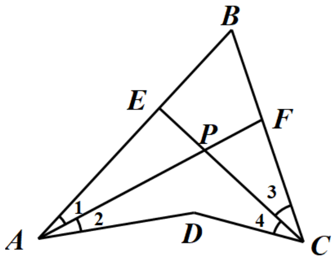
图④

5．（2023春·全国·七年级专题练习）（1）在锐角ΔABC中，AC边上的高所在直线和AB边上的高所在直线的交点为P，$\angle BPC=110°$，求$\angle A$的度数．

（2）如图，AF和CE分别平分$\angle BAD$和$\angle BCD$，当点D在直线AC上时，且B、P、D三点共线，$\angle APC=100°$，则$\angle B=$__________．



（3）在（2）的基础上，当点D在直线AC外时，如下图：$\angle ADC=130°$，$\angle APC=100°$，求$\angle B$的度数．



6．（2023春·七年级单元测试）【问题背景】

（1）如图1的图形我们把它称为“8字形”，请说明$\angle A+\angle B=\angle C+\angle D$；

【简单应用】

（2）阅读下面的内容，并解决后面的问题：如图2，AP、CP分别平分$\angle BAD$，$\angle BCD$，若$\angle ABC=36°$，$\angle ADC=16°$，求$\angle P$的度数；

解：$\because AP$、CP分别平分$\angle BAD$，$\angle BCD$

$\therefore \angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$

由（1）的结论得：$\begin{cases}\angle P+\angle 3=\angle 1+\angle B\\ \angle P+\angle 2=\angle 4+\angle D\end{cases}$

①+②，得$2\angle P+\angle 2+\angle 3=\angle 1+\angle 4+\angle B+\angle D$

$\therefore \angle P=\frac{1}{2}(\angle B+\angle D)=26°$.

①【问题探究】

如图3，直线AP平分$\angle BAD$的外角$\angle FAD$，CP平分$\angle BCD$的外角$\angle BCE$，若$\angle ABC=36°$，$\angle ADC=16°$，请猜想$\angle P$的度数，并说明理由.

②【拓展延伸】

在图4中，若设$\angle C=\alpha$，$\angle B=\beta$，$\angle CAP=\frac{1}{3}\angle CAB$，$\angle CDP=\frac{1}{3}\angle CDB$，试问$\angle P$与$\angle C$、$\angle B$之间的数量关系为：__（用$\alpha$、$\beta$表示$\angle P$），并说明理由.

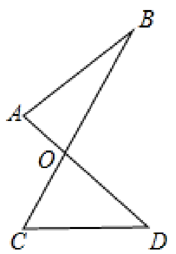


图1

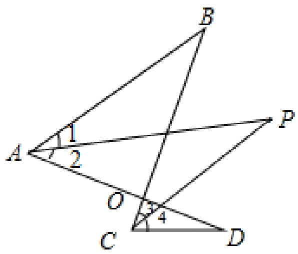


图2

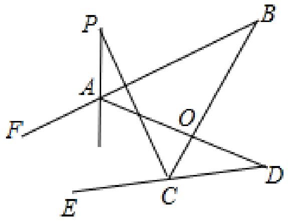


图3

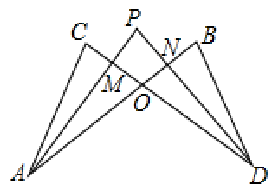


图4

7．（2023春·江苏·七年级专题练习）如图1，在$\triangle ABC$中，BD平分$\angle ABC$，CD平分$\angle ACB$．

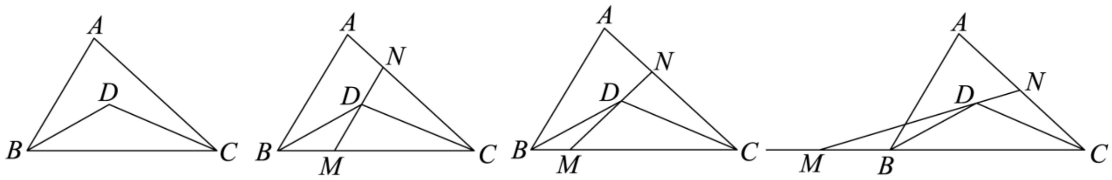


图1　　图2　　图3　　图4

（1）若$\angle A=60^{\circ}$，则$\angle BDC$的度数为__________；

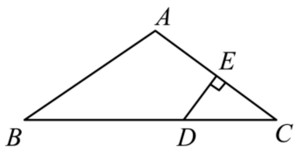
（2）若$\angle A=\alpha$，直线MN经过点D．

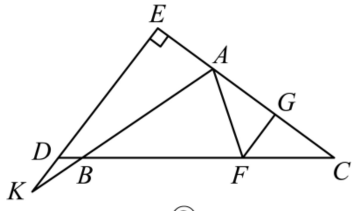
①如图2，若$MN\parallel AB$，求$\angle NDC-\angle MDB$的度数（用含α的代数式表示）；

②如图3，若MN绕点D旋转，分别交线段BC,AC于点M,N，试问旋转过程中$\angle NDC-\angle MDB$的度数是否会发生改变？若不变，求出$\angle NDC-\angle MDB$的度数（用含α的代数式表示），若改变，请说明理由；

③如图4，继续旋转直线MN，与线段AC交于点N，与CB的延长线交于点M，请直接写出$\angle NDC$与$\angle MDB$的关系（用含α的代数式表示）．

8．（2023春·八年级课时练习）如图，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，D为射线CB上一点，过点D作$DE\perp AC$于点E．



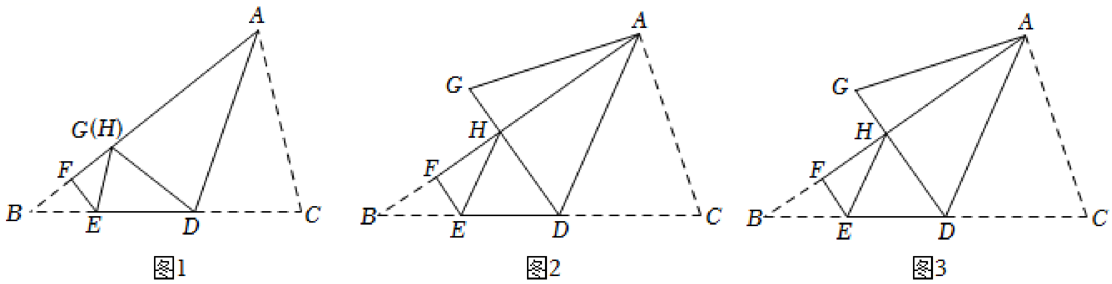


（1）如图①，当点D在线段BC上时，请直接写出$\angle BAC$与$\angle EDC$的数量关系；

（2）如图②，当点D在CB的延长线上时，$DE\perp AC$交CA的延长线于点E，探究$\angle BAC$与$\angle EDC$的数量关系，并说明理由；

（3）在（2）的条件下，若点F为线段BC上一点，过点F作$FG\perp AC$于点G，连接AF，且$\angle AFG=\angle CFG$，$\angle BAF=\angle BFA$，延长ED，AB交于点K，求$\angle EKA$的度数．

9．（2023·全国·九年级专题练习）如图，在$\triangle ABC$中，点D、E是边BC上两点，点F是边AB上一点，将$\triangle ADC$沿AD折叠得到$\triangle ADG$，DG交AB于点H；将$\triangle EFB$沿EF折叠得到$\triangle EFH$.



（1）如图1，当点G与点H重合时，请说明$\angle BAC=\angle EHD$；

（2）当点G落在$\triangle ABC$外，且$HE\parallel AD$，$\angle GAB:\angle CAD=1:3$

①如图2，请说明$\angle EHD=4\angle GAB$；

②如图3，若$\angle B=30°$，将$\triangle EFH$绕点H顺时针方向旋转一个角度α $(0<\alpha<180°)$，则在这个旋转过程中，当$\triangle EFH$的其中一边与$\triangle AHG$的某一边平行时，直接写出旋转角α的度数